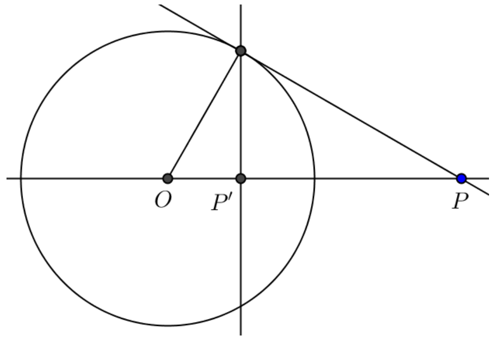
Első anyag: Összefoglalás az inverzióról – mit is tudunk eddig

1. Definíció



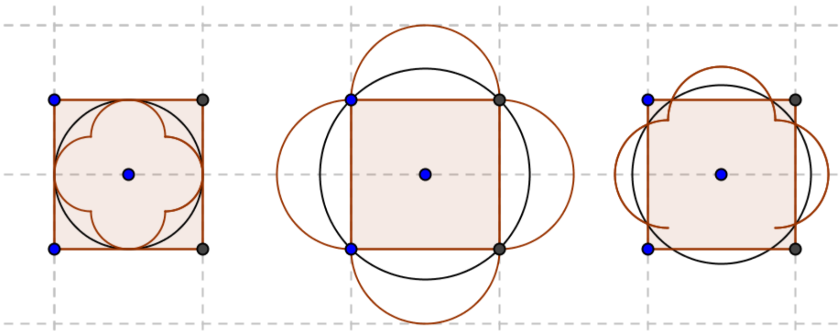
a) O középpontú, r sugarú alapkör esetén
P képe P' $\Rightarrow$ $OP \cdot OP' = r^2$.

b) Szerkesztés pl. a magasságtétellel (ábra):

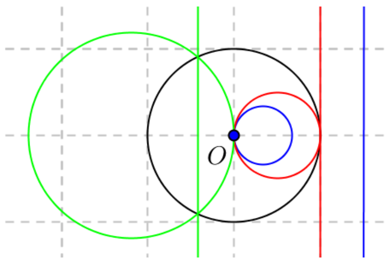
c) Alaptulajdonságok:
– O kivételével az egész síkon értelmezett,
– reciprocitás ($P \leftrightarrow P'$),
– ezért kölcsönösen egyértelmű.
– O-ra nem értelmezhetünk, nem teljesülne a folytonossági kritérium.

d) Elnevezések:
– O: az inverzió pólusa
– ’inverzió’ = kifordítás: körön belüli és kívüli pontok cserélnek helyet

e) A GeoGebra rendelkezik inverzió funkcióval (lsd. ábra, pl. négyzet képei)



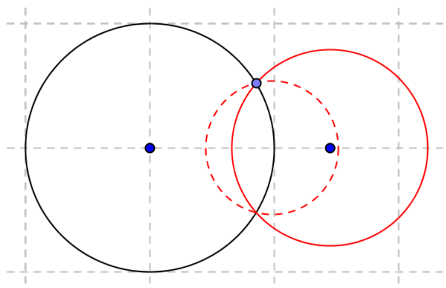
2. Egyenes inverziója



a) Póluson áthaladó egyenes képe önmaga
– de nem pontonként fix, csak invariáns alakzat

b) Póluson át nem haladó egyenes képe olyan kör, amely
– a póluson átmegy
– középpontja a póluson átmenő, az egyenesre merőleges egyenesen van
Bizonyítás: hasonlósággal

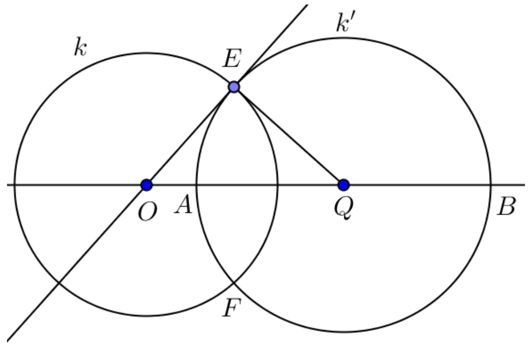
3. A kör inverziója



a) Az alapkör képe önmaga (pontonként fix)

b) Póluson áthaladó kör képe olyan egyenes, amely merőleges a kör O ponton átmenő átmérőjére (2.b) duálisa).

c) Póluson át nem haladó k kör képe olyan k' kör, amelyre az O, K, K' körközéppontok egy egyenesbe esnek.
Bizonyítás: pl. koordinátákkal.



d) **Fix körök**: az alapkört merőlegesen metszik.

Bizonyítás (szelőszakaszok, kör hatványa):
Az (O, k) inverzió esetén k' akkor lesz fix, ha A és B egymásnak képpontjai. (E, F fix pontok.) Ekkor az inverzió definíciója miatt $OA \cdot OB = r^2$, ahol r az alapkör sugara. Másrészt a külső pontból húzott szelőszakaszok tétele miatt $OA \cdot OB = e^2$, ahol e az O-ból k'-höz húzott érintési szakasz hossza.
Készen vagyunk: $OE = r = e$, ebből $OEQ\angle = 90°$ következik.

e) Megjegyzés: Kör középpontjának képe $\neq$ a képkör középpontja!!!

Bizonyítás: Szakasz felezőpontjának képe általában nem lesz a képszakasz felezőpontja.
Legyen az alapkör sugara 1, a k tárgykör középpontja az x tengelyen, átmérőjének két végpontja $A(a;\,0)$ és $B(b;\,0)$, ekkor középpontja $F\left(\frac{a+b}{2};\,0\right)$.

A leképezéskor $A'\left(\frac{1}{a};\,0\right)$ és $B'\left(\frac{1}{b};\,0\right)$ a képkör átmérőjének a végpontjai, a szakasz felezőpontja $\left(\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2};\,0\right)$, de ez általában nem egyezik meg az $F'\left(\frac{2}{a+b};\,0\right)$ ponttal. (A harmonikus közép kisebb, mint a számtani.)

f) Megjegyzés: Általában is igaz, hogy az inverzió egyenesre és körre szögtartó. (Nem bizonyítjuk.)

4. Koordinatizálás

Válasszuk az alapkör sugarát 1-nek, és legyen $P(x, y) \leftrightarrow P'(X, Y)$ az első síknegyedben.
a) Kérdés, milyen kapcsolat van a tárgypont és a képpont koordinátái között.
$OP \cdot OP' = 1 \Leftrightarrow (x^2+y^2)(X^2+Y^2)=1$. Tudjuk, hogy O, P, P' egy egyenesen van, így $\frac{y}{x}=\frac{Y}{X}$. Fejezzük ki pl. y-t és helyettesítsük vissza (csak egy változó marad, az x): $y=\frac{xY}{X}$ és $\left(x^2+\left(\frac{xY}{X}\right)^2\right)(X^2+Y^2)=1 \Leftrightarrow x=\frac{X}{X^2+Y^2}$, hasonlóan $y=\frac{Y}{X^2+Y^2}$. (Az eredmény a másik három síknegyedben is megfelelően előjelezhető.)
A reciprocitás miatt persze $X=\frac{x}{x^2+y^2}$ és $Y=\frac{y}{x^2+y^2}$ is teljesül, azaz meghatároztuk a képpontok koordinátáit.

b) Bizonyítsuk be 3.c)-t! (Póluson át nem haladó kör képe kör.)

Bizonyítás:
Válasszuk az alapkör sugarát 1-nek, egy tetszőleges (a; b) középpontú kör egyenlete
$x^2+y^2-2ax-2by+p^2=0$. Ha pontonként invertálunk, akkor az $x=\dfrac{X}{X^2+Y^2}$ és
$y=\dfrac{Y}{X^2+Y^2}$ helyettesítést alkalmazzuk; kérdés, mi lesz az (X, Y) görbe egyenlete.

Behelyettesítve $\dfrac{X^2}{(X^2+Y^2)^2}+\dfrac{Y^2}{(X^2+Y^2)^2}-\dfrac{2aX}{X^2+Y^2}-\dfrac{2bY}{X^2+Y^2}+p^2=0 \Leftrightarrow$
$X^2+Y^2-\dfrac{2aX}{p^2}-\dfrac{2bY}{p^2}+\dfrac{1}{p^2}=0$, és ez bizony ismét kör.

5. Alkalmazások I. – Apollóniusz-féle körérintési szerkesztések

a) Az eredeti feladat úgy szólt, hogy ha a pont, egyenes, kör objektumok közül adott három, akkor szerkesszünk olyan kört, amely illeszkedik a három objektumra. (Ponton átmegy, egyenest, kört érint.)

b) Hány eset van? A 3 objektumból kell 3-at kiválasztani, sorrend nem számít, ismétlődés lehet, ismétléses kombináció: $\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}3+3-1\\3\end{pmatrix}=10$ az esetek száma.

c) 1. p p p (körülírt kör)
2. p p e
3. p e e
4. e e e (hozzáírt körök)
A kiindulási kört nem tartalmazó eseteket elvileg mind meg tudjuk csinálni, házi feladat ezek meggondolása.

d) 5. p p k
6. p e k
7. e e k
8. p k k
9. e k k
10. k k k

Ezekkel kapcsolatban pedig házi feladat speciális esetek gyűjtése, amikor a szerkesztést még szintén elemi úton elvégezhetjük.

Előremutatás: A továbbiakban majd az inverzió segítségével oldjuk meg a szerkesztési feladatokat. a szerkesztések
1. egyszerűsödnek:
– az inverzió pólusát ügyesen választhatjuk meg;
– az inverzió alapkörét ügyesen választhatjuk meg (pl. könnyebb az alakzat inverzének szerkesztése, ha az eredeti alakzat metszi az alapkört);
– a póluson áthaladó körök képei egyenesek.
2. bonyolódnak:
– póluson át nem haladó egyenesek inverzei körök.

Második anyag: Apollóniusz-féle körérintési szerkesztések

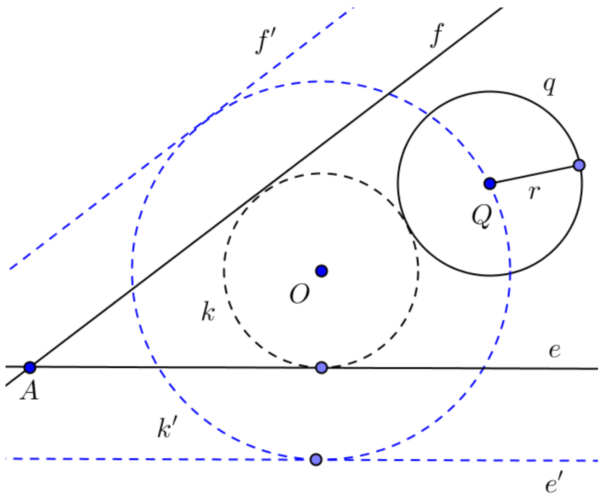
Mint említettem, az alapfeladat objektumokra illeszkedő kör szerkesztése, ha a pont, egyenes, kör objektumok közül adott három. (A kör ponton átmegy, egyenest, kört érint.)

I. A 10 esetből egyszerű **elemi megoldások adhatók** a következőkre:
1. (P P P) (háromszög körülírt köre)
2. (P P e)
3. (P e e)
4. (e e e) (háromszög hozzáírt körei)

A maradék esetek:
5. (P P k)
6. (P e k)
7. (e e k)
8. (P k k)
9. (e k k)
10. (k k k)

II. Ezekből a ***körzsugorítás/körnagyítás*** módszerével egyesek visszavezethetők másik esetre.

A **7. (e, e, k) eset** visszavezetése 3. (P, e, e)-re az ábrán látható.



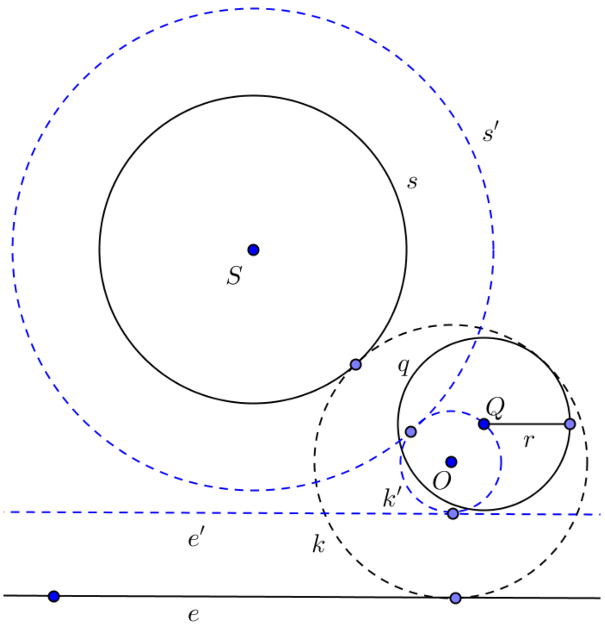
Adott az *e* és *f* egyenes és a *q* kör (*Q* középponttal és *r* sugárral). Tegyük fel, hogy megszerkesztettük a három objektumot érintő *k* kört (középpont *O*, sugár r_1, az ábrán szaggatottal). Toljuk el az ábra szerint, önmagukkal párhuzamosan *r* távolsággal az *e* és *f* egyeneseket (*e*' és *f* '). Ha a (szerkesztendő) *k* kör sugarát *r*-rel megnöveljük és ezzel a sugárral egy koncentrikus *k'* kört rajzolunk, akkor ez érinteni fogja az *e'*, *f '* és *Q* objektumokat. Ez pedig a 3. (P, e, e) szerkesztési alapesetet jelenti.
A szerkesztés menete tehát:
– megszerkesztjük az *e*' és *f* ' egyeneseket;
– a 3. (P, e, e) alapján megszerkesztjük az (*e*', *f* ', *Q*) illeszkedő *k*' kört (ezek az objektumok kékkel jelöltek);
– majd a *k*' kör sugarát *r*-rel csökkentve, megszerkesztjük a vele koncentrikus *k* kört (körzsugorítás módszere).

Diszkusszió: Mivel az (e', f', Q) illeszkedő kör általában kétféle lehet, így k-ra is két megoldást kapunk.

9. (e, k, k) eset visszavezetése 6. (P, e, k)-ra:

Adottak a $q(Q, r)$ és $s(S)$ körök, valamint az e egyenes. A feladat ezeket érintő $k(O)$ kör szerkesztése.
Tekintsük megoldottnak a feladatot (ábra)! Toljuk el önmagával párhuzamosan e-t (e') és s-t zsugorítsuk r-rel (s'), ezután pedig szerkesszünk olyan k' kört, ami érinti e'-t és s'-t, és átmegy Q-n! (Ez (P, e, k) típusú szerkesztés.) Ha most k'-t zsugorítjuk r-rel, akkor a keresett k kört kapjuk. (A megoldásban feltettük, hogy s sugara nagyobb vagy egyenlő, mint r.)

Most a körök kívülről érintették egymást, de hasonlóan kell eljárni akkor is, ha pl. q belülről érinti k-t (ábra).



Ekkor s sugarát növeljük, k-t pedig zsugorítjuk r-rel, és e-t a másik irányba toljuk el. A (Q, e', s') szerkesztés megadja k'-t, ennek sugarát pedig r-rel növelve megkapjuk k-t.

10. (k, k, k) eset visszavezethető 8. (P, k, k)-ra a körzsugorítás/körnagyítás módszerével.

Ekkor a $q(Q)$, s, t köröket érintő k kör szerkesztése a feladat. (Legyen pl. q sugara a legkisebb, r hosszúságú.)
Például ha k mindhárom kört kívülről érinti, akkor az s, t és q körök sugarát r-rel csökkentjük. A feladat típusa megváltozott 8. (P, k, k)-ra: az s' és t' köröket érintő, Q-n átmenő k' kört megszerkesztjük; majd k'-t r-rel visszazsugorítva kapjuk a szerkesztendő k-t. (Ez mindhárom kört érinti.)
Egy másik példa, ha k az s és t köröket tartalmazva érinti, míg q-t kívülről érinti. Ekkor az s és t körök sugarát r-rel növeljük, q sugarát r-rel csökkentjük. Az így kapott (Q, s', t') szerkesztést elvégezve kapjuk k'-t, ezt pedig r-rel visszazsugorítva a keresett k-t.
A többi eset is hasonlóan tárgyalható. (8 eset van, hiszen bármelyik kör lehet k-n belül vagy kívül is.)

A fennmaradó esetek:
5. (P P k)
6. (P e k)
8. (P k k)

Ezek tárgyalását nagyon megkönnyíti az inverzió alkalmazása.

Körérintési szerkesztések az inverzió alkalmazásával

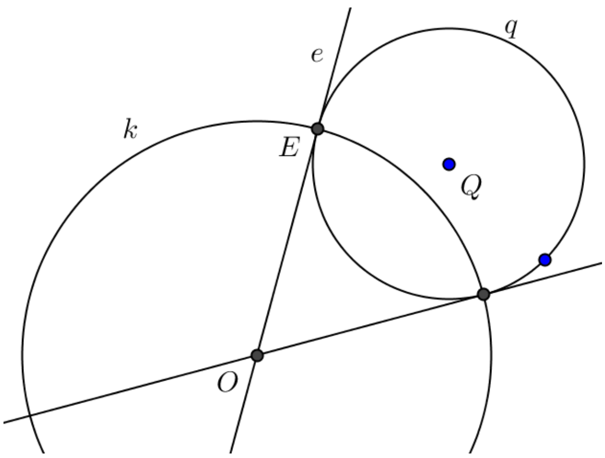
III. Alapok

Az O középpontú, r sugarú alapkörrel megadott inverzió szemléletesen invertálja a síkot: körön kívüli pont belső pont lesz és fordítva. (A pólust, azaz az inverzió centrumát nem képezzük le.)
Az inverzió alaptulajdonságai:
(1) kölcsönösen egyértelmű (emiatt illeszkedéstartó)
(2) póluson áthaladó (lyukas) egyenes képe önmaga
(3) póluson át nem haladó egyenes képe póluson áthaladó (lyukas) kör
(4) póluson át nem haladó kör képe kör
(5) póluson áthaladó (lyukas) kör képe egyenes (ugye ez (1)-ből és (3)-ból következik)
(6) az alapkört merőlegesen metsző körök képe önmaga

A szerkesztési technika az lesz, hogy
– az adott objektumokat invertáljuk;
– az így kapott egyszerűbb objektumokhoz illeszkedő alakzatot (egyenes, kör) szerkesztünk
– visszainvertálás (azaz újabb inverzió alkalmazása) után az illeszkedő alakzat az eredeti objektumokhoz is illeszkedni fog.

Ügyeskedési lehetőségek:
– Az inverzió pólusát és alapkörét mi választhatjuk meg (tezsőlegesen).
– A GeoGebra elvégzi az alakzatok inverzióját, de az ábra áttekinthetőbb, ha minél kevesebb képpel dolgozunk. Érdemes tehát úgy megválasztani az alapkör sugarát, hogy ez valamelyik adott kört merőlegesen metssze. (Ekkor ugyanis a kör képe önmaga.)

IV. Ismétlés: O-n átmenő, q-t merőlegesen metsző k kör szerkesztése



O-ból érintőt húzunk q-hoz, az (egyik) érintési pont legyen e. Ekkor a keresett kör sugara OE.

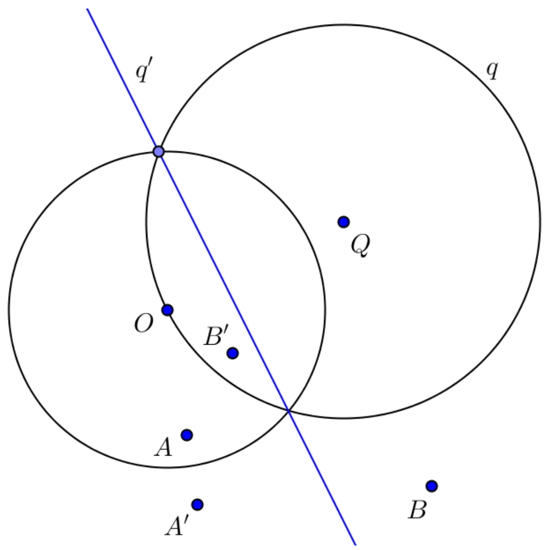
Indoklás: Ha q sugara r, akkor a szelőszakaszok tétele miatt külső O pontra $OQ^2 - r^2 = OE^2$. Ez viszont éppen azt jelenti, hogy az OEQ háromszög E-ben derékszögű.

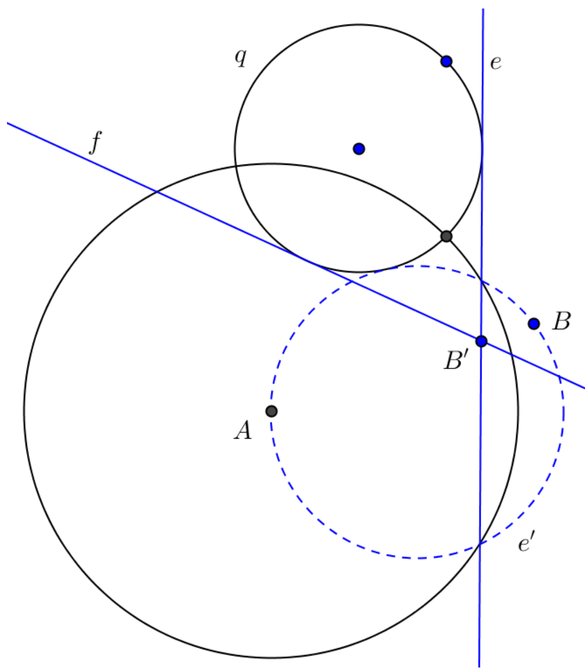
V. A 5. (P P k) eset

A feladat: Adott a q kör, valamint az A és B pont. Szerkesztendő olyan k kör, amelyik átmegy A-n és B-n, és érinti q-t.

Az inverziós feladatokra általában többféle megoldás lehetséges.

Első megoldás: Az inverzió O pólusát érdemes a q körön felvenni. Ha az ábrát ekkor invertáljuk, A' és B' képpontok mellett q képe a q' egyenes lesz (az ábrán kékkel). Most az invertált objektumok (A', B', q') körérintési szerkesztése a 2. (P, P, e) típus, azaz elemi eszközökkel megoldható. Ha az így megszerkesztett k' kört visszainvertáljuk, képe olyan k kör lesz, amelyik átmegy az A és B pontokon, és érinti q-t.





A diszkussziót érdemes átgondolni. Általában 2 megoldás van, de az elfajult eset problémát okozhat, amikor pl. k' átmegy O-n. Ekkor ugyanis k' képe, k egyenes lesz, tehát nem kapunk megoldást. (Mikor lép fel ez az eset?)

Második megoldás a második ábrán:
Ekkor az inverzió pólusát A-nak választottuk, az alapkör pedig merőlegesen metszi q-t. Az invertálás után q képe önmaga, B képe B'. Érintőt szerkesztünk B'-ből q-hoz (ez az e egyenes); és ha most az ábrát visszainvertáljuk, akkor e képe az A-n és B-n átmenő e' kör lesz (ami persze érinti a fix q-t).

Megjegyzés: A két megoldás minőségileg különbözik. Az első megoldásban az inverzióval egyszerűbb alakzatokhoz jutottunk, ezekhez kellett érintő kört szerkeszteni; míg a második megoldásban az inverzió után egyszerűbb alakzatot, ***érintő kör*** helyett ***érintő egyenest*** kellett szerkesztenünk.

VI. A 6. (P e k) eset

A feladat: Adott a q kör, valamint az A pont és az e egyenes. Szerkesztendő olyan k kör, amelyik átmegy A-n és érinti e-t és q-t.

Megoldás: Az előző pont második megoldása módszerét alkalmazzuk.
Az inverzió pólusát A-nak választjuk, az alapkör pedig merőlegesen metszi q-t. Az invertálás után q képe önmaga, e képe az e' kör. Ekkor a feladat átfogalmazható: adott q és e' körökhöz kell közös érintőket (érintő egyeneseket) szerkeszteni.
Ha a közös érintőt f jelöli, akkor visszainvertálás után f' olyan kör lesz, amelyik átmegy az A ponton, és érinti a q kört és az e egyenest.
Készen vagyunk.

A **diszkusszión** megint érdemes elgondolkodni (HF). Két körhöz (q és e') általában 0, 1, 2, 3 vagy 4 közös érintőt húzhatunk, ennyi lehet a megoldásszám. (Ez általában attól függ, hogy a körök kívülről vagy belülről érintik egymást.) Ugyanakkor a szerkesztési lépések során lehetnek elfajult esetek, amik befolyásolják a megoldásszámot. (Ha például q és e' közös érintői közül átmegy valamelyik A-n, akkor inverz képe nem kör lesz, hanem (önmaga) egyenes. (Ez a „végtelen sugarú kör” esete.)

VII. A 8. (P k k) eset maradt a végére.

A feladat: Adott a q és s kör, valamint az A pont. Szerkesztendő olyan k kör, amelyik átmegy A-n és érinti q-t és s-t.

Megoldás: Az előző megoldás mintájára az inverzió pólusát A-nak választjuk, az alapkör pedig merőlegesen metszi q-t. Az invertálás után q képe önmaga, s képe az s' kör. Ekkor a feladat átfogalmazható: adott q és s' körökhöz kell közös érintőket (érintő egyeneseket) szerkeszteni.
Ha a közös érintőt f jelöli, akkor visszainvertálás után f' olyan kör lesz, amelyik átmegy az A ponton, és érinti a q és s köröket.

VIII. Házi feladat

Ezzel készen vagyunk a körérintési szerkesztésekkel. Nagyon hálás lennék, ha valamelyik feladatra más megoldást adnátok, vagy valamelyik speciális esetet – diszkusszióval együtt – átrágnátok. (Pl. **(P e k)**, ha az egyenes érinti a kört.) Rendkívül tanulságosak lehetnek az eredmények.

Harmadik anyag: Szerkesztések csak körző használatával

Az euklideszi szerkesztések során három szerkesztési lépést hajthatunk végre: kijelölhetjük

I. két egyenes metszéspontját;

II. egyenes és kör metszéspontjait;

III. és két kör metszéspontját.

Csak körző engedélyezésével a III. lépés nyilvánvaló, az első kettő a kérdés. (A továbbiakban csak körzős szerkesztésekben gondolkodunk, és az általában könnyebb feladatokra vezető speciális helyzetektől eltekintünk. A csak körzős szerkesztések során egy egyenest két pontjával már meghatározottnak tekintünk.)

Az inverzió segítségével egyszerűsödhet a feladat, hiszen a jól megválasztott alapkör felvétele után az eredeti objektumok képei körök lesznek; ezek metszéspontjait kijelölhetjük; majd visszainvertálás után adódnak az eredetileg keresett metszéspontok.

Az első lépés tehát pontok inverzének megszerkesztése lehet (csak körzővel).

A második lépés egyenes és kör inverzének szerkesztése. A képköröket 3 pontjuk meghatározza, de problémát jelent, hogy a k kör inverz körének középpontja nem egyezik meg a k kör középpontjának inverzével, azaz a képkörök középpontját nem ismerjük (egyelőre).

Viszont korábban erre a feladatra (körközéppont szerkesztése csak körzővel) már adtunk elemi (inverzió nélküli) megoldást, ezt felhasználva a fenti lépések végrehajthatók.

A továbbiakban bevezetünk néhány jelölést: $k(Q, r)$ a Q középpontú, r sugarú kört jelenti; P^x a P pont x objektumra való tükrözését jelöli; $A \to B$ módon pedig a leképezés tárgy és képpontjait adjuk meg.

1. Egy lehetséges program (csak körzős szerkesztésekre) a következő:

(0) Kör középpontja (pont tükrözése egyenesre)

(1) Külső pont inverze

(2) Szakasz n-szerezése (pont tükrözése pontra)

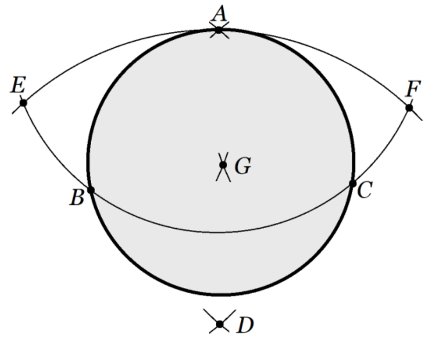
(3) Szakasz m-ed része

(4) Az előző két pontból következik adott szakasz racionális arányú részének (osztópontjának) megszerkesztése.

(5) Belső pont inverze

(6) Egyenes inverz képe

Az (1), (5), (6) és (0) megadja a feladat megoldását.



(0) Kör középpontja

Emlékeztető a már korábban látott elemi szerkesztésre (keressük a k kör középpontját):

i) Tetszőleges A és B pont felvétele a k körön

ii) $k_2(A, r = AB)$, ez metszi k-t másodszor C-ben.

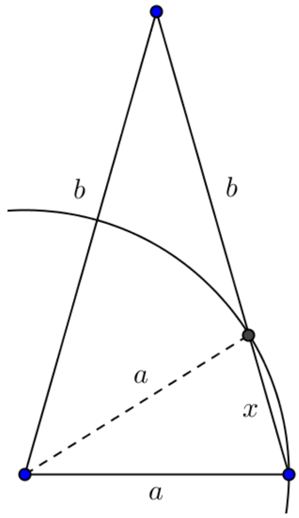
iii) $k_3(B, r)$ és $k_4(C, r)$, metszéspontjuk D.

iv) $k_4(D, q = DA)$, ez metszi k_2-t az E és F pontokban.

v) $k_5(E, EA)$ és $k_6(F, FA)$, második metszéspontjuk G.

Ez k keresett középpontja.

A ii) lépés előállította az ABC egyenlő szárú háromszöget, a iii) lépésben A-t tükröztük a BC egyenesre, azaz $A^{BC} = D$, így kaptuk az $ABDC$ rombuszt. A iv) lépés az EDA, FDA egybevágó, egyenlő szárú háromszögek előállítása, ezekre már alkalmazhatjuk az v) szerkesztési trükköt, amelyet (1)-ben részletesebben kifejtünk.

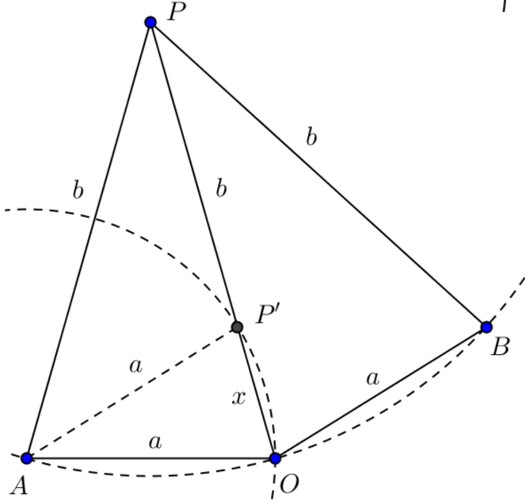


(1) Külső pont inverze

Ha $k(O, r)$ az alapkör, akkor $P \to P'$ esetén $OP \cdot OP' = r^2$, másképpen az $OP' = \dfrac{r^2}{OP}$ szakaszt szerkesztjük meg. Csak körzős szerkesztéshez felvesszük az a alapú, b szárú egyenlő szárú háromszöget, és az alap egyik végpontjából a sugarú kört rajzolunk. Ez a szárból x hosszú szakaszt metsz ki (ábra).

Az egyenlő szárú háromszögek hasonlósága miatt $\dfrac{x}{a} = \dfrac{a}{b} \Leftrightarrow x = \dfrac{a^2}{b}$. Vagyis az $a = r$, $b = OP$ választás mellett $x = OP'$, azaz x a $P \to P'$ leképezés képszakaszának hossza.

Bár az $OP' = x$ szakasz hossza megvan, a P' pontot még nem kaptuk meg, hiszen az OP egyenes – csak körzős szerkesztéseknél – nincs megrajzolva. Ezen a problémán úgy segíthetünk, hogy P'-t két körív metszéspontjaként állítjuk elő (második ábra).



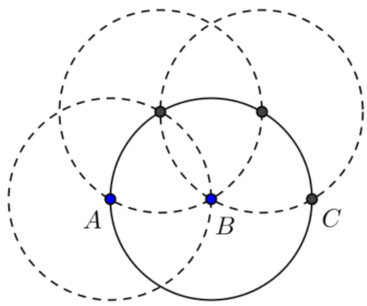
A $k(O, a = r)$ és $k_1(P, b = PO)$ körök mindkét metszéspontját kijelöljük, ezek A és B. Ekkor a P' pont a $k_2(A, a)$ és $k_3(B, a)$ körök metszéspontja.

A szerkesztést akkor tudjuk végrehajtani, ha $a < b \Leftrightarrow r < PO$, azaz ha P az alapkörön kívüli pont.

(2) Szakasz *n*-szerezése

Az A pontot B-re ***tükrözzük***, ha a $k(B, BA)$ körre A-ból kiindulva háromszor felmérjük az AB sugarat. Ekkor $A^B = C$.

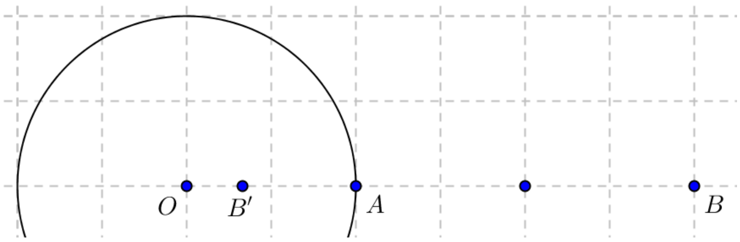
Egyúttal megkaptuk az AB szakasz 2-szeresét, AC-t is. Az eljárást tetszőlegesen folytathatjuk: $BC = D$ esetén $AD = 3AB$ stb.



(3) Szakasz *m*-ed része

Adott OA szakasz m-ed részét az inverzió segítségével szerkesztjük meg.

Legyen az alapkör $k(O, r = OA)$. Megszerkesztjük (2) alapján az OA szakasz m-szeresét, OB-t, majd (1) alapján B inverz képét, B'-t. Állítás: $OB' = \dfrac{OA}{m}$.



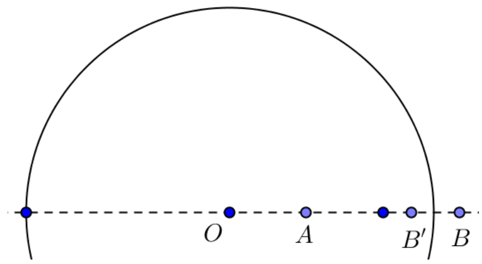
Bizonyítás: $OB = m \cdot OA = m \cdot r$, $OB' = \dfrac{r^2}{OB} = \dfrac{r^2}{m \cdot r} = \dfrac{r}{m} = \dfrac{OA}{m}$. (Az ábrán m = 3.)

(4) Szakasz racionális arányú osztópontja

Adódik (2)-ből és (3)-ból.

(5) Belső pont inverze

Legyen az alapkör $k(O, r)$, és keressük A inverz képét, ahol $OA < r$. (Szerkesztendő $OA' = \dfrac{r^2}{OA}$.)

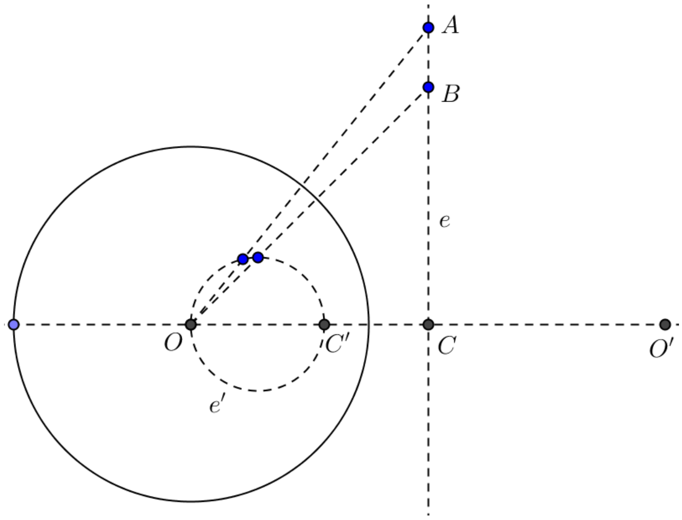


Megszerkesztjük az OA szakasz m-szeresét, OB-t úgy, hogy B külső pont legyen, majd megszerkesztjük B inverz képét, B'-t. (Az ábrán m = 3.) Mivel $OB' = \dfrac{r^2}{OB} = \dfrac{r^2}{m \cdot OA}$, így az OB' szakasz m-szerezése megadja OA'-t.

(Vagyis belső pont esetén kétszer kell szakaszt m-szerezni, és közben egyszer invertálni.)

(6) Egyenes inverz képe

Alapprobléma, hogy az egyenes véges sok pontját leképezve véges sok pontot kapunk a képkörről, de ennek középpontját nem ismerjük. (A (0) feladatban a kör A, B, C három kiindulási pontja ***egyenlő szárú háromszöget*** határozott meg.)



Két pontjával adott egyenes inverz képe (általában) kör. Ennek a középpontját megszerkeszthetjük, ha ismerjük az egyenes egy speciális pontját.

Az $e(A, B)$ egyenes $k(O, r)$ alapkörre vonatkozó inverze az e' kör. Ha O-ból merőlegest bocsátunk e-re, metszéspontjuk olyan C pont, amelynek C' inverz képe megadja az e' kör OC' átmérőjét (ábra). Ennek felezőpontját pedig már meg tudjuk szerkeszteni.

Tehát tükrözzük O-t e-re, így kapjuk az O' pontot. Az OO' szakasz C felezőpontja szerkeszthető; ezután C-t invertáljuk, kapjuk C'-t; az OC' szakasz felezőpontja, és ezzel a középponttal az e' kör is megszerkeszthető.

(Az eljárás akkor is működik, ha az e egyenesnek és a k alapkörnek van közös pontja.)

Ügyesebben is eljárhatunk, ha észrevesszük, hogy O' inverz képe éppen az OC' szakasz keresett F felezőpontja.

Legyen ugyanis $OC = c$, ekkor $OC' = \frac{r^2}{c}$, $OF = \frac{OC'}{2} = \frac{r^2}{2c}$, $OO' = 2c$, és valóban: O' inverz képe $\frac{r^2}{2c}$ távolságra van O-tól, azaz egybeesik F-fel.

Tehát gyorsabb az eljárás, ha $O^{AB} = O'$ után rögtön O'-t invertáljuk, képe a keresett körközéppont.

Egy másik (elvi) lehetőség:

C megszerkesztése után A-t tükrözzük C-re, $A^C = D$. Ekkor az A' és D' inverz képek O-val egyenlő szárú háromszöget határoznak meg, így a k kör középpontja (0) alapján megszerkeszthető.

2. A csak körzős szerkesztési feladat megoldása

I. Két egyenes metszéspontjának szerkesztése

Ha adott két-két pontjával az $e(A, B)$ és $f(C, D)$ egyenes, akkor a metszéspontjaik szerkesztése a következő lehet:

i) Tetszőleges $k(O, r)$ alapkört veszünk fel, pl. úgy, hogy az egyenesekkel ne legyen közös pontja.

ii) Invertáljuk az adott (külső) pontokat.

iii) Megszerkesztjük az O, A', B' pontok köré írt kört a fentebb leírt valamelyik módon, kapjuk az e' kört.

iv) Hasonlóan megszerkesztjük az f '(O, C', D') kört.

v) e' és f ' O-n kívüli második metszéspontja legyen P.

vi) Ha a (belső pont) P-t „visszainvertáljuk”, akkor P' megadja e és f keresett metszéspontját.

Megjegyzés: Az első módszerrel tehát az I. lépés (két egyenes metszéspontjának szerkesztése) megoldható a (0) eljárás nélkül is.

II. Egyenes és kör metszéspontjainak szerkesztése

Ha adott két pontjával az $e(A, B)$ egyenes és adott a k kör (középpontja nélkül), akkor a metszéspontok szerkesztése a következő lehet:

i) Megszerkesztjük k középpontját (0) segítségével, az így kapott $k(O, r)$ lesz az inverzió alapköre.

ii) Invertáljuk az adott A, B pontokat.

iii) Megszerkesztjük az O, A', B' pontok köré írt e' kört.

iv) e' és k metszéspontjai C és D, ezek adják a feladat megoldását.

(Ha ugyanis az e' kört „visszainvertáljuk”, akkor C és D helyben marad.)

Egyszerűbben is eljárhatunk.

A ii) lépésben O-t tükrözzük $e(A, B)$-re, kapjuk O'-t. (A tengelyes tükrözés elvégezhető csak körzővel, a $k_1(A, AO)$ és $k_2(B, BO)$ körök második metszéspontja O'.)

iii) A $k(O, r)$ és $k_3(O', r)$ körök metszéspontjai adják a feladat megoldását.

Mindkét megoldásban szükség volt a (0) körközéppont szerkesztésére.

3. Fejlesztés

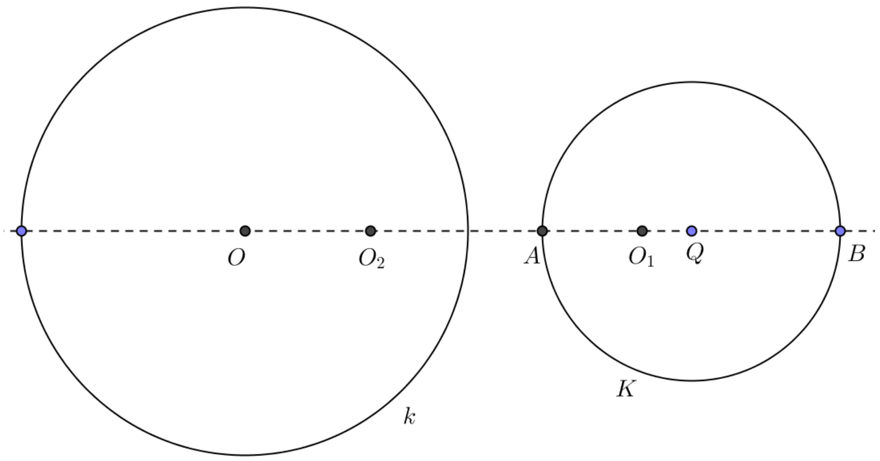
3.1. Adott kör középpontjának megszerkesztése csak körzővel, inverzió nélkül, (azaz (0) elvégzése) elég bonyolult eljárás. Kérdés, ki lehet-e küszöbölni II-ből.

3.2. Ha egy $K(Q, q)$ kört invertálunk, akkor a középpontja nem az inverz kör középpontjába kerül. Kérdés, hogy mi jellemzi az inverz kör középpontját?

3.3. Kör inverz képe
Nem volt rá szükségünk a csak körzős szerkesztésekhez, de azért jó lenne tudni, végrehajtható-e.

Először 3.2-vel foglalkozunk.

Legyen $k(O, r)$ az inverzió alapkörre, és tegyük fel, hogy az OQ centrális A-ban és B-ben metszi K-t. Invertáljuk O-t a K *alapkörre* vonatkozóan, képe legyen O_1; majd invertáljuk O_1-et k-ra, a képe legyen O_2.
Állítás: K inverz képének, K'-nek a középpontja O_2.



Bizonyítás: Igazolnunk kell, hogy az $A'B'$ szakasz F felezőpontja O_2. Legyen $OQ = d$, $OA = a = d - q$ és $OB = b = d + q$ (ábra).

Az A és B pontok képeire $OA' = \dfrac{r^2}{OA} = \dfrac{r^2}{d-q}$, $OB' = \dfrac{r^2}{OB} = \dfrac{r^2}{d+q}$,

$$OF = \frac{OA' + OB'}{2} = \frac{\dfrac{r^2}{d-q} + \dfrac{r^2}{d+q}}{2}.$$

Az O pont O_1 képére $QO_1 = \dfrac{q^2}{OQ} = \dfrac{q^2}{d}$, így $OO_1 = d - QO_1 = d - \dfrac{q^2}{d} = \dfrac{d^2 - q^2}{d}$.

Az O_1 pont O_2 képére $OO_2 = \frac{r^2}{OO_1} = \frac{r^2 d}{d^2 - q^2}$, így igazolandó, hogy

$$\frac{\frac{r^2}{d-q} + \frac{r^2}{d+q}}{2} = \frac{r^2 d}{d^2 - q^2} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{d-q} + \frac{1}{d+q}}{2} = \frac{d}{d^2 - q^2}.$$ Elvégezve kijön.

Igazolható, hogy az eredmény akkor is érvényes, ha pl. k és K metszi egymást. (Bár a csak körzős szerkesztésekhez erre nincs szükség, hiszen mindig felvehetünk az adott objektumokhoz diszjunkt helyzetű alapkört.) Az eljárással tehát tetszőleges kör inverz körének megszerkeszthetjük a középpontját.

3.3. Kör inverz képe

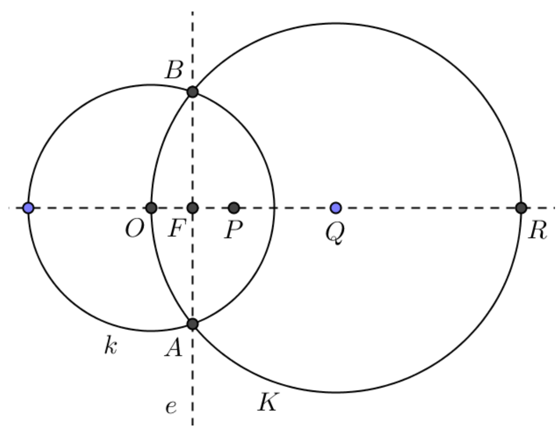
Ez most már nem gond. Megszerkesztjük egy pont képét és 3.2. alapján az inverz kör középpontját, így a képkör is megrajzolható.

3.1. Egyenes és kör metszéspontjainak szerkesztése csak körzővel, (0) nélkül

A kör és az egyenes inverz képét megszerkesztjük (6) és 3.3. alapján. A két inverz kör metszéspontjait visszainvertáljuk, ezek lesznek a keresett metszéspontok.

4. Adott kör középpontjának szerkesztése inverzió segítségével

A (0) szerkesztés nyomokban emlékeztet az inverziós szerkesztésekre, például $k(A, r = AB)$ alapkörrel a $D \to G$ invertálás adja meg a középpontot. Ez alapján egyszerűbben (könnyebben megjegyezhető módon) megadhatjuk a körközéppont inverziós, csak körzős megszerkesztését.



Ha a K kör középpontját keressük, akkor az inverzió $k(O, r)$ alapkörét úgy vegyük fel, hogy O a K körön legyen. A két kör metszéspontja A és B, és ekkor K inverz képe az $e(A, B)$ egyenes.

Állítás: Ha $O^{AB} = P$, akkor P inverz képe megadja a K kör Q középpontját: $P \to Q$.

Bizonyítás mint korábban (ábra):
R inverz képe az AB szakasz F felezőpontja, ezért $OF = \frac{r^2}{2q}$; a tükrözés miatt $OP = \frac{r^2}{q}$; az invertálás miatt pedig $OQ = \frac{r^2}{OP} = q$.

Készen vagyunk, Q valóban az OR szakasz felezőpontja.

5. Specialitások csak körzős szerkesztésekre

Háromszög körülírt köre
Alapszerkesztések