Bevezetés

Erdős Pál szerint: „Máig is teljesen reménytelen annak az eldöntése, hogy van-e végtelen sok $2^p - 1$ alakú prímszám, ahol p prímszám. Azt szoktam mondani, hogy ez a kérdés talán nem a legsürgősebb, amelyet az emberiségnek meg kell oldani, de mindenesetre nincs nála nehezebb.” Ha sikerül bizonyítani, hogy végtelen sok ilyen prím van, abból Euklidesz egyik tétele alapján adódna az, hogy végtelen sok tökéletes szám van.

Az ókori görögök kezdték vizsgálni a tökéletes számokat, és az érdekes eredmények mellett megoldatlan kérdések is maradtak ránk. A matematikai tulajdonságokon túl vallásos jelentőséget is tulajdonítottak a tökéletes számoknak. Például Szent Ágoston azt írja Az Isten városáról c. művében, Isten azért teremtette 6 nap alatt a Földet (bár egy pillanat alatt megtehette volna), mert a 6 tökéletes szám. A Hold is hasonló okból kerüli meg a Földet éppen 28 nap alatt.

Érdekes Mersenne megjegyzése: „...világos, milyen ritkák a tökéletes számok, s mennyire méltán hasonlítanak a tökéletes férfiakhoz.” Ezt a gondolatot összevethetjük azzal a fontos kérdéssel, hogy van-e végtelen sok tökéletes szám.

2003 augusztusában az egyik hazai folyóiratban ezt olvastam: „Nemrégiben egy newnaili 13. osztályos gimnáziumi tanuló megtalálta az első páratlan tökéletes számot. Ez a 2 812 644 884 765 625.” A szeptemberi tanévnyitón ezt megmutattam T. Zs. kollégánknak, aki az ünnepi megnyitó alatt, számológép nélkül bebizonyította, hogy ez a szám nem tökéletes. (Egy későbbi lapszámban elnézést kértek a téves közlésért.) A páros tökéletes számokról Euklidesz és Euler adott pontos leírást. Azt, hogy van-e páratlan tökéletes szám, még most sem tudjuk.

A görögök vezették be a tökéletes szám fogalmát. Egy szám tökéletes, ha a tőle kisebb osztóinak összege maga a szám. Tökéletes szám a 6 és a 28 is:

$$6 = 1 + 2 + 3, \qquad 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$$

Bővebben olvashatunk a tökéletes számokról az interneten ezekben a szakdolgozatokban:

– Karlik Zsuzsanna: A tökéletes számok, (ELTE, 2009, témavezető Freud Róbert)

– Orthmayr Flóra: A tökéletes számok és társaik, (ELTE, 2012, témavezető Freud Róbert)

Miért nem tökéletes?

(1) 12345

(2) 1234567

(3) $3^4 \cdot 5^6 \cdot 7^8$

(4) $5^6 \cdot 7^7 \cdot 11^8$

(5) $p^5 \cdot q^6$, ahol p és q prímek, és $|p - q| = 2$

(6) 2 812 644 884 765 625

A cikk végén belátjuk, hogy ezen számok egyike sem tökéletes. Előbb oldjuk meg a következő feladatokat:

Feladatok

1. Mennyi
   a) az 1000 osztóinak összege?
   b) az 1000 páros osztóinak összege?

2. Jelölje n osztóinak összegét $\sigma(n)$, azaz

$$\sigma(n) = \sum_{d \mid n} d$$

   Mutassuk meg, ha a és b relatív prímek, akkor $\sigma(a \cdot b) = \sigma(a) \cdot \sigma(b)$.

3. Hány olyan szám van 20-ig, ill. 1000-ig, amely szám osztóinak összege páratlan?

4. Melyek azok a k pozitív egész számok, amelyekre $2 \cdot 3^k$ tökéletes szám? (KöMaL)

5. Különböző páratlan prímek szorzata lehet-e tökéletes szám?

6. Van-e négyzetszám a tökéletes számok között?

7. Van-e olyan szám, amelynek páros számú páratlan osztója van, és a páros osztóinak száma páratlan?

8. (Euklidesz, Euler) Az n páros szám pontosan akkor tökéletes, ha

$$n = 2^{k-1}\left(2^k - 1\right)$$

   alakú, ahol a $2^k - 1$ szám prímszám.

9. Mutassa meg, hogy a páros tökéletes számok utolsó számjegye 6 vagy 8.

10. Mutassa meg, ha az n tökéletes szám mindkét szomszédja prímszám, akkor $n = 6$.

11. Van-e olyan 6-nál nagyobb tökéletes szám, amely osztható 3-mal, de nem osztható 9-cel?

12. Melyek azok a tökéletes számok, melynek prímtényezős felbontásában minden prím kitevője páratlan szám?

13. Bizonyítsuk be, hogy egy páratlan tökéletes szám (ha van ilyen) 4-gyel osztva 1 maradékot ad.

14. Mutassuk meg, hogy egy páratlan tökéletes számnak legalább három különböző prímosztója van.

15. Mutassuk meg, hogy nincs olyan páratlan tökéletes szám, amely osztható a 3, 5 és 7 prímekkel.

16. Mutassuk meg, hogy a páratlan tökéletes számok $n = (4k+1) \cdot m^2$ alakúak, ahol $4k+1$ prímszám.

17. a) Lássuk be, hogy

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \sum_{d \mid n} \frac{1}{d}$$

Innen következik, hogy egy tökéletes szám osztóinak reciprokait összeadva 2-t kapunk, azaz ha n tökéletes, akkor

$$\sum_{d \mid n} \frac{1}{d} = 2$$

hiszen $\frac{\sigma(n)}{n} = 2$.

b) Bizonyítsuk be, hogy van olyan n egész, amelyre $\frac{\sigma(n)}{n} > 10$.

c) Igazoljuk, hogy ha $m \mid n$, akkor $\frac{\sigma(n)}{n} \geq \frac{\sigma(m)}{m}$.

d) Mutassuk meg, hogy végtelen sok olyan n szám van, amelyre $\frac{\sigma(n)}{n} > \frac{\sigma(m)}{m}$, ha $n > m$.

18. Bizonyítsuk be, hogy ha $\frac{\sigma(n)}{n} = \frac{5}{3}$, akkor $5n$ páratlan tökéletes szám. (Weiner, 2000)

Megoldások

1. Mennyi
   a) az 1000 osztóinak összege?
   b) az 1000 páros osztóinak összege?

   Megoldás
   a) 1000 osztóinak összege: $(1+2+2^2+2^3)\cdot(1+5+5^2+5^3)=2340$, hiszen a zárójelek felbontása után megkapjuk 1000 mindegyik osztóját, és mindegyik osztót egyszer.

   b) 1000 osztóinak összegéből vegyük el a páratlan osztók összegét, és megmarad 1000 páros osztóinak összege: $2340-(1+5+5^2+5^3)=2340-156=2184$.

   Másképp is számolhatunk: a keresett összeg az 500 osztói összegének kétszerese: $2\cdot(1+2+2^2)\cdot(1+5+5^2+5^3)=2\cdot 1092=2184$.

2. Jelölje n osztóinak összegét $\sigma(n)$, azaz

$$\sigma(n)=\sum_{d\,|\,n} d$$

   Mutassuk meg, ha a és b relatív prímek, akkor $\sigma(a\cdot b)=\sigma(a)\cdot\sigma(b)$.

   Megoldás
   Ennek átgondolása önálló feladat.

   Egy példa:

$$\begin{aligned}\sigma(210)=&\sigma(14\cdot 15)=\sigma(14)\cdot\sigma(15)=\\ &=(1+2+7+14)\cdot(1+3+5+15)=24^2\end{aligned}$$

   Adódik egy kérdés:
   Lehet-e $\sigma(n)$ értéke végtelen sokszor négyzetszám?

3. Hány olyan szám van 20-ig, 1000-ig, amely szám osztóinak összege páratlan?

   Megoldás
   Nézzük meg a számokat 20-ig, az 1, 2, 4, 8, 16, a 9, és a 18 számok osztóinak összege páratlan. Válasz: 7

   Most nyilván nem vizsgáljuk meg a számokat egyesével 1000-ig. Az általános kérdést kell tisztázni: Melyek azok a számok, melyeknél az osztók összege páratlan?
   Egy páratlan n szám minden osztója páratlan. Ezen páratlan osztók összege akkor lesz páratlan, ha páratlan sok számot adunk össze. Mint tudjuk, a négyzetszámoknak és csakis nekik van páratlan sok osztója. Tehát a páratlan számok közül a négyzetszámok azok, melyek osztóinak összege páratlan.

   Nézzük a másik esetet, ha az n szám páros: $n=2^a\cdot b$, ahol b páratlan. Az n szám osztóinak összege úgy lesz páratlan, ha a páratlan osztóinak összege páratlan, azaz a b szám osztóinak összege páratlan. Ezt vizsgáltuk az előbb, és azt kaptuk, hogy a b páratlan szám négyzetszám. Emiatt az $n=2^a\cdot b$ szám vagy egy négyzetszám 2-szerese, vagy pedig négyzetszám, attól függően, hogy a 2^a hatványban a kitevő páratlan, vagy páros.

Azt kaptuk, hogy az a^2 és a $2a^2$ alakú számok azok, melyek osztóinak összege páratlan. 1000-ig 31 négyzetszám van, és 22 olyan szám, mely $2a^2$ alakú. A keresett számok száma $31 + 22 = 53$.

Válasz: 53

Másképp is megtaláljuk a választ.

$$n = p^{\alpha} \cdot q^{\beta} \cdot \ldots \cdot s^{\delta}$$
$$\sigma(n) = (1 + p + \ldots + p^{\alpha}) \cdot \left(1 + q + \ldots + q^{\beta}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + s + \ldots + s^{\delta}\right)$$

Ez a szorzat akkor páratlan, ha a tényezők mindegyike páratlan. Emiatt páratlan prímek esetén a zárójelben lévő utolsó tag kitevője páros, míg páros prím (azaz a 2) esetén a megnevezett kitevő lehet páros, lehet páratlan. Tehát az $n = p^{\alpha} \cdot q^{\beta} \cdot \ldots \cdot s^{\delta}$ szám prímtényezős alakjában a 2 kivételével minden prím kitevője páros, és a 2 kitevője tetszőleges.

Megjegyzés: A b) feladatra kapott válasz miatt 1000-ig legalább $500 - 53 = 447$ olyan szám van, amely nem lehet a $\sigma(n)$ értékkészletében. Belátható, hogy végtelen sok olyan szám van, amelyet nem kaphatunk meg egy szám osztóinak összegeként.

4. Melyek azok a k pozitív egész számok, amelyekre $2 \cdot 3^k$ tökéletes szám? (KöMaL)

   Megoldás
   Ez a KöMaL B.4553. feladata, a megoldást megtaláljuk az interneten, illetve a KöMaL –ban. (Számoljuk $\sigma(n)$-t. Csak egy megoldás van, és ez a 6.)

5. Különböző páratlan prímek szorzata lehet-e tökéletes szám?

   Megoldás
   Az $n = p \cdot q \cdot \ldots \cdot r$ szám osztóinak összege a szám 2-szerese, azaz

   $$(p + 1)(q + 1) \ldots (r + 1) = 2pq \ldots r$$

   A bal oldalon mindegyik zárójeles tényező páros, míg a jobb oldal osztható 2-vel, ám 4-gyel nem, ezért a bal oldalon csak egy tényező lehet: $p + 1 = 2p$ lehet. Ez nem ad megoldást.

6. Van-e négyzetszám a tökéletes számok között?

   Megoldás
   Tehetünk egy fontos észrevételt: Egy négyzetszám osztóinak összege páratlan. Ez kiderült a 3. feladat megoldásából.
   Mivel egy tökéletes szám osztóinak összege a szám kétszerese, azaz páros szám, így egy négyzetszám nem lehet tökéletes.

7. Van-e olyan szám, amelynek páros számú páratlan osztója van, és a páros osztóinak száma páratlan?

   Megoldás
   Legyen a keresett szám $n = 2^k \cdot b$, ahol b páratlan. A páratlan osztók száma páros, legyen ez m. A páros osztókat úgy kapom, hogy veszek egy páratlan osztót, és ezt szorzom a 2, 4, …, 2^k számokkal. Ezért a páros osztók száma az m többszöröse ($= m \cdot k$), azaz egy páros szám többszöröse, és ez nem lehet páratlan. Tehát nincs az elvárásoknak megfelelő szám.

8. (Euklidesz, Euler) Az n páros szám pontosan akkor tökéletes, ha

$$n = 2^{k-1}\left(2^k - 1\right)$$

alakú, ahol a $2^k - 1$ szám prímszám.

Megoldás
Ha a $p = 2^k - 1$ szám prímszám, akkor az $n = 2^{k-1}\left(2^k - 1\right)$ szám osztói: $1, 2, 4, \ldots, 2^{k-1}$, és $p, 2p, 4p, \ldots, 2^{k-1}p$.
Számoljuk az osztók összegét:

$$1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{k-1} = 2^k - 1$$

illetve

$$p + 2p + 4p + \ldots + 2^{k-1}p = \left(2^k - 1\right)p$$

így az osztók összege

$$2^k - 1 + \left(2^k - 1\right)p = \left(2^k - 1\right)(1+p) = \left(2^k - 1\right)2^k = 2n$$

Beláttuk, ha $n = 2^{k-1}\left(2^k - 1\right)$ alakú, ahol a $2^k - 1$ szám prímszám, akkor az n szám tökéletes.

(Megjegyzés: az osztók összegét számolhattuk volna a $\sigma(a \cdot b) = \sigma(a) \cdot \sigma(b)$ összefüggés segítségével is.)

Milyen egy páros tökéletes szám?
Nézzük az $n = 2^t \cdot m$ tökéletes számot, ahol m páratlan.

$$\sigma\left(2^t \cdot m\right) = \sigma\left(2^t\right) \cdot \sigma(m)$$

$$2^{t+1} \cdot m = \left(2^{t+1} - 1\right) \cdot \sigma(m)$$

Vonjunk ki m-et mindkét oldalból:

$$\left(2^{t+1} - 1\right) \cdot m = \left(2^{t+1} - 1\right) \cdot \sigma(m) - m$$

Azaz:

$$m = \left(2^{t+1} - 1\right) \cdot [\sigma(m) - m]$$

A második tényező $[\sigma(m) - m] = d$ osztója m-nek, és az első tényező nagyobb 1-nél (legalább $2^2 - 1 = 3$), így a d osztó m-nél kisebb.
$d + m = [\sigma(m) - m] + m = \sigma(m)$, a bal oldali összeg tehát kiadja m osztóinak összegét, ezért csak $[\sigma(m) - m] = d = 1$ lehet. Tehát m prím. $m = 2^{t+1} - 1$ prím, és a keresett páros tökéletes szám $n = 2^t(2^{t+1} - 1)$ alakú, ahol $2^{t+1} - 1$ prímszám.

9. Mutassa meg, hogy a páros tökéletes számok utolsó számjegye 6 vagy 8.

Megoldás
Mivel n páros, így $n = 2^{k-1}\left(2^k - 1\right)$. Itt nézzük a két tényező utolsó számjegyét, és használjuk, hogy k prím, azaz páratlan (kivéve a 2).

10. Mutassa meg, ha az n tökéletes szám mindkét szomszédja prímszám, akkor $n = 6$.

    Megoldás
    Mivel n páros tökéletes szám, így $n = 2^{k-1}\left(2^k - 1\right)$. Itt k páratlan. Nézzük ezeket. Indukcióval láthatjuk, hogy $n + 1$ osztható 3-mal.

11. Van-e olyan 6-nál nagyobb tökéletes szám, amely osztható 3-mal, de nem osztható 9-cel?

    Megoldás
    Ha az n tökéletes szám osztható 3-mal, de nem osztható 9-cel, akkor ha d osztója az n számnak és d nem osztható 3-mal, akkor $3d$ is osztója n-nek. Így n osztói $(d, 3d)$ párokba rendezhetők, és $d + 3d = 4d$ osztható 4-gyel, tehát n osztóinak összege osztható 4-gyel. Az osztók összege $2n$(hiszen n tökéletes szám), ez osztható 4-gyel, így n páros szám.
    Az n páros szám osztható 3-mal, $n = 6k$ alakú, és 6-nál nagyobb, ezért $k > 1$. Az n osztói között vannak az $6k, 3k, 2k, k, 1$ számok, ám már ezek összege is $12k + 1 = 2n + 1 > 2n$, tehát az n nem lehet tökéletes szám.

    Megjegyzés: 3 helyett 7-tel ugyanez eljátszható.

12. Melyek azok a tökéletes számok, melynek prímtényezős felbontásában minden prím kitevője páratlan szám?

    Megoldás
    Belátjuk, hogy egy ilyen szám van, a 6.
    Ha a keresett n tökéletes szám páros, akkor $n = 2^{k-1}\left(2^k - 1\right)$ alakú, ahol a $2^k - 1$ szám prímszám. Tudjuk, hogy ekkor k is prím. Ha ez a prím páratlan, akkor a 2 kitevője páros. Tehát a páros n tökéletes szám prímtényezős felbontásában csak akkor lehet minden prím kitevője páratlan szám, ha $k = 2$, és ekkor $n = 6$.
    Ha a keresett n tökéletes szám páratlan, és a prímtényezős felbontásában minden prím kitevője páratlan szám, akkor az osztók összegét adó szorzatban minden zárójeles tényező páros szám:

    $$(1 + p + \ldots + p^\alpha) \cdot \left(1 + q + \ldots + q^\beta\right) \cdot (1 + r + \ldots + r^\gamma) \cdot \ldots \cdot \left(1 + s + \ldots + s^\delta\right)$$

    Ez a szorzat a páratlan tökéletes szám 2-szerese, tehát nem osztható 4-gyel, így csak egy tényezőből állhat a szorzat. A keresett páratlan tökéletes szám csak $n = p^\alpha$ alakú lehet. Azonban

    $$1 + p + \ldots + p^\alpha = 2p^\alpha$$

    egyenletnek nincs megoldása, hiszen

    $$1 + p + p^2 + \ldots + p^\alpha = \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1} < \frac{p^{\alpha+1}}{p - 1} < 2p^\alpha$$

    mivel $\dfrac{p}{p - 1} < 2$, mert $p > 2$
    Tehát a keresett tökéletes szám nem lehet páratlan.

    Másképp megoldva: Ha p prím osztója n-nek, és x olyan osztója n-nek, amely nem osztható p-vel, akkor az osztókat párokba rendezhetjük:

    $$(x, px), \left(p^2x, p^3x\right), \ldots, \left(p^{2k}x, p^{2k+1}x\right)$$

Tehát az osztók összege osztható $p+1$-gyel, hiszen ez teljesül minden párban a két osztó összegére.
Válasszuk p-nek az n legkisebb prímosztóját, így a $p+1 \mid 2n$ oszthatóságból következtethetünk arra, hogy $p=2$.
Ekkor 3 is osztója n-nek, tehát $n=6k$.
Ha $k>1$, akkor az $n=6k$ számnak különböző osztói $1, k, 2k, 3k, 6k$(használtuk a $k>1$ feltételt), ezek összege $12k+1>2n$, tehát n nem tökéletes.
Egy lehetőség maradt: $k=1$, ekkor $n=6$ tökéletes.

13. Bizonyítsuk be, hogy egy páratlan tökéletes szám 4-gyel osztva 1 maradékot ad.

Megoldás
Egy prímszám nem lehet tökéletes szám. Az n páratlan szám összes osztója páratlan, az osztók

$$1<d_1<d_2<\ldots<d_m<n$$

Az n-nél kisebb osztók összege páratlan, emiatt m páros, $m=2k$.
A (d_1, d_m), (d_2, d_{m-1}), $\ldots$ osztópárokban a két társosztó szorzata n. A $d_1, d_2, \ldots, d_m$ osztók mind szerepelnek ezekben a párokban, hiszen m páros.
Tegyük fel, hogy $n=4N+3$ alakú. Ebben az esetben a társosztók egyike $4a+1$, a másik $4b+3$ alakú, hiszen ezek szorzata $4N+3$ alakú szám, míg két $4a+1$ alakú szám szorzata $4N+1$ alakú, és két $4a+3$ alakú szám szorzata is $4N+1$ alakú. Tehát, ha a páratlan tökéletes szám $n=4N+3$ alakú, akkor a társosztók egyike $4a+1$, a másik $4b+3$ alakú, ezek összege 4-gyel osztható. Így a $d_1, d_2, \ldots, d_m$ osztók összege 4-nek többszöröse, az $1, d_1, d_2, \ldots, d_m$ osztók összege $4M+1$ alakú, tehát az nem egyezhet meg az $n=4N+3$ számmal. Azt kaptuk, hogy egy páratlan tökéletes szám nem lehet $4N+3$ alakú.

14. Mutassuk meg, hogy egy páratlan tökéletes számnak legalább három különböző prímosztója van.

Megoldás
Van-e olyan páratlan tökéletes szám, amelynek csak egy prímosztója van?
Ha az $n=p^\alpha$ alakú szám tökéletes, akkor $\sigma(n)=2n$, azaz $\dfrac{\sigma(n)}{n}=2$.
Mivel

$$\sigma(n)=1+p+p^2+\ldots+p^\alpha=\frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}$$

és

$$\frac{\sigma(n)}{n}=\frac{p^{\alpha+1}-1}{p^\alpha\cdot(p-1)}<\frac{p^{\alpha+1}}{p^\alpha\cdot(p-1)}=\frac{p}{p-1}\leq\frac{3}{2}$$

így

$$\frac{\sigma(n)}{n}<2$$

az n szám nem lehet tökéletes.
Van-e olyan páratlan tökéletes szám, amelynek két prímosztója van?
Ha az $n=p^\alpha\cdot q^\beta$ alakú szám tökéletes, akkor $\sigma(n)=2n$.
Ekkor

$$\sigma(n)=\left(1+p+p^2+\ldots+p^\alpha\right)\cdot\left(1+q+q^2+\ldots+q^\beta\right)$$

Innen

$$\begin{aligned}\sigma(n) =& \frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}\cdot\frac{q^{\beta+1}-1}{q-1}\\ \frac{\sigma(n)}{n} =& \frac{p^{\alpha+1}-1}{p^{\alpha}\cdot(p-1)}\cdot\frac{q^{\beta+1}-1}{q^{\beta}\cdot(q-1)} < \frac{p^{\alpha+1}}{p^{\alpha}\cdot(p-1)}\cdot\frac{q^{\beta+1}}{q^{\beta}\cdot(q-1)} =\\ =& \frac{p}{p-1}\cdot\frac{q}{q-1} < \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4} = \frac{15}{8} < 2\\ \frac{\sigma(n)}{n} <& 2\end{aligned}$$

ezért n nem lehet tökéletes.
Ezek miatt egy páratlan tökéletes számnak legalább három különböző prímosztója van.

Megjegyzés Vajon az előbbi gondolatsorral beláthatjuk-e, hogy egy páratlan tökéletes számnak legalább négy különböző prímosztója van?

15. Mutassuk meg, hogy nincs olyan páratlan tökéletes szám, amely osztható a 3, 5 és 7 prímekkel, azaz 105-tel.

Megoldás
Legyen $n = p^{\alpha}\cdot q^{\beta}\cdot r^{\gamma}\cdot\ldots\cdot s^{\delta}$, ahol p, q, r, ..., s páratlan prímek, és tegyük fel, hogy közöttük ott vannak a 3, 5 és 7 prímek, továbbá n tökéletes szám: $\sigma(n) = 2n$, azaz
$2n = (1+p+\ldots+p^{\alpha})\cdot\left(1+q+\ldots+q^{\beta}\right)\cdot(1+r+\ldots+r^{\gamma})\cdot\ldots\cdot\left(1+s+\ldots+s^{\delta}\right)$.
A zárójeles tényezők között pontosan egy páros van, ezért az $\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\delta$ kitevők között pontosan egy páratlan, a többi páros. Legyen $\alpha = 2k+1$.
$1+p \mid (1+p)+\ldots+\left(p^{2k}+p^{2k+1}\right)$, emiatt ha $p=3$ vagy $p=7$, akkor $p+1$ osztható 4-gyel, azaz $2n$ is osztható 4-gyel, ami nem lehet, hiszen n páratlan. Tehát csak $p=5$ lehet.
$2n = \sigma(n)$-ből $2 = \left(1+\frac{1}{p}+\ldots+\frac{1}{p^{\alpha}}\right)\left(1+\frac{1}{q}+\ldots+\frac{1}{q^{\beta}}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{s}+\ldots+\frac{1}{s^{\delta}}\right)$,
és tekintettel arra, hogy α kivételével a kitevők párosak:

$$2 \geq \left(1+\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}\right)\left(1+\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}\right)$$

és $p=5$, $q=3$, $s=7$, azaz

$$2 \geq \left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{7}+\frac{1}{49}\right) = \frac{6\cdot 13\cdot 57}{5\cdot 9\cdot 49} > 2$$

ez ellentmondás.
Igazoltuk az állítást.

16. Mutassuk meg, hogy a páratlan tökéletes számok $n = (4k+1)\cdot m^2$ alakúak, ahol $4k+1$ prímszám.

Megoldás
Legyen $n = p^{\alpha}\cdot q^{\beta}\cdot r^{\gamma}\cdot\ldots\cdot s^{\delta}$, ahol p, q, r, ..., s páratlan prímek, és tegyük fel, hogy n tökéletes szám: $\sigma(n) = 2n$, azaz
$2n = (1+p+\ldots+p^{\alpha})\cdot\left(1+q+\ldots+q^{\beta}\right)\cdot(1+r+\ldots+r^{\gamma})\cdot\ldots\cdot\left(1+s+\ldots+s^{\delta}\right)$.

A zárójeles tényezők között pontosan egy páros van (és ez nem osztható 4-gyel), ezért az $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \delta$ kitevők között pontosan egy páratlan, legyen $\alpha = 2a+1$, a többi páros.
Ezért

$$n = p^{2a+1} \cdot q^{2b} \cdot r^{2c} \cdot \ldots \cdot s^{2d} = p \cdot p^{2a} \cdot q^{2b} \cdot r^{2c} \cdot \ldots \cdot s^{2d} = p \cdot m^2$$

$$1+p \mid (1+p) + \ldots + \left(p^{2a} + p^{2a+1}\right)$$

így ha $p = 4k-1$, akkor $1+p$ osztható 4-gyel, emiatt $1+p+\ldots+p^{\alpha}$ is osztható 4-gyel, ami nem lehet.
Tehát $p = 4k-1$ nem lehet, marad a $p = 4k+1$ lehetőség.

17. a) Lássuk be, hogy

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \sum_{d \mid n} \frac{1}{d}$$

Innen következik, hogy egy tökéletes szám osztóinak reciprokait összeadva 2-t kapunk, azaz ha n tökéletes, akkor

$$\sum_{d \mid n} \frac{1}{d} = 2$$

hiszen $\frac{\sigma(n)}{n} = 2$.

b) Bizonyítsuk be, hogy van olyan n egész, amelyre $\frac{\sigma(n)}{n} > 10$.

c) Igazoljuk, hogy ha $m \mid n$, akkor $\frac{\sigma(n)}{n} \geq \frac{\sigma(m)}{m}$.

d) Mutassuk meg, hogy végtelen sok olyan n szám van, amelyre $\frac{\sigma(n)}{n} > \frac{\sigma(m)}{m}$, ha $n > m$.

Megoldás
a) Az osztó-társosztó párosítás alapján látjuk az egyenlőséget.
b) Gondoljunk az a) feladatra.
c) Ha $n = m!$, akkor az n számnak (többek között) osztói az 1, 2, 3, …, m számok, így

$$\frac{\sigma(n)}{n} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m}$$

és ez az összeg tetszőlegesen nagy lehet.
d) Az a) feladat szerint $\frac{\sigma(n)}{n}$ az n szám osztói reciprokának összege, és az összegek közötti egyenlőtlenség jó látszik.
e) Keressünk a $\frac{\sigma(n)}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ sorozatban – amely a c) indoklása alapján felülről nem korlátos sorozat – lokális csúcsokat, olyan csúcsot, mely magasabb, mint az őt megelőző csúcsok.

Megjegyzés Tudjuk, hogy a $\frac{\sigma(n)}{n}$ értékek mindenütt sűrűn helyezkednek el az 1-nél nagyobb számok körében.
Ha $\frac{\sigma(n)}{n}$ értéke valamely n-re $\frac{5}{3}$ lenne, akkor volna páratlan tökéletes szám, és ez az $5n$. Erről szól a következő feladat.

18. Bizonyítsuk be, hogy ha $\dfrac{\sigma(n)}{n} = \dfrac{5}{3}$, akkor $5n$ páratlan tökéletes szám. (Weiner, 2000)

Megoldás

Az $5n$ szám tökéletes, ha $\dfrac{\sigma(5n)}{5n} = 2$. Teljesül ez?
Ha a és b relatív prímek, akkor $\sigma(a \cdot b) = \sigma(a) \cdot \sigma(b)$, így ha n nem osztható 5-tel, akkor használhatjuk a $\sigma(5n) = \sigma(5) \cdot \sigma(n)$ összefüggést.

$$\frac{\sigma(5n)}{5n} = \frac{\sigma(5) \cdot \sigma(n)}{5n} = \frac{\sigma(5)}{5} \cdot \frac{\sigma(n)}{n} = \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{3} = 2$$

Tehát igazoltuk az állítást, ha belátjuk, hogy n nem osztható 5-tel és n páratlan (hiszen $5n$ páratlan).
Mivel $3\sigma(n) = 5n$, így $3 \mid n$.

Ha n páros, akkor $6 \mid n$. Tudjuk, ha $m \mid n$, akkor $\dfrac{\sigma(n)}{n} \geq \dfrac{\sigma(m)}{m}$. Ezért $\dfrac{\sigma(n)}{n} \geq \dfrac{\sigma(6)}{6} = 2$, ám ez nem lehet, hiszen $\dfrac{\sigma(n)}{n} = \dfrac{5}{3}$. Tehát n páratlan, és az előbbi egyenlőség miatt $\sigma(n)$ is páratlan.

Ha n páratlan és $\sigma(n)$ is páratlan, akkor n négyzetszám. (Hiszen n minden osztója páratlan, és az osztók összege páratlan, akkor az osztók száma páratlan. Egy szám osztóinak száma pontosan akkor páratlan, ha a szám négyzetszám. Ezt igazoltuk a 3.b) megoldásában is.)

Az n szám négyzetszám és $3 \mid n$, ezért $9 \mid n$.

Az n szám nem osztható 5-tel. Ha mégis, akkor $9 \cdot 5 \mid n$, így

$$\frac{\sigma(n)}{n} \geq \frac{\sigma(9 \cdot 5)}{9 \cdot 5} = \frac{78}{45} = \frac{26}{15} > \frac{5}{3}$$

ez ellentmond annak, hogy $\dfrac{\sigma(n)}{n} = \dfrac{5}{3}$. Tehát n nem osztható 5-tel (és páratlan).

Célba értünk.

Miért nem tökéletes?

(1) 12345

(2) 1234567

(3) $3^4 \cdot 5^6 \cdot 7^8$

(4) $5^6 \cdot 7^7 \cdot 11^8$

(5) $p^5 \cdot q^6$, ahol p és q prímek, és $|p-q| = 2$

(6) 2 812 644 884 765 625

Megoldás
Belátjuk a következő állítást:

Ha az n páratlan szám osztható 3-mal, és nem osztható 9-cel, akkor nem lehet tökéletes.

Ugyanis ha d osztója az n számnak és d nem osztható 3-mal, akkor $3d$ is osztója n-nek. Így n osztói $(d, 3d)$ párokba rendezhetők, és $d+3d = 4d$ osztható 4-gyel, tehát n osztóinak összege osztható 4-gyel. Azonban a páratlan tökéletes szám osztóinak összege a szám 2-szerese, azaz 2-vel osztható, ám 4-gyel nem. Ezért az n páratlan szám nem lehet tökéletes. (Lásd még a 11. feladatot.)

Ezért az (1) és a (6) alatti számok egyike sem tökéletes. (A (6) alatti szám számjegyeinek összege 78. Tehát a szám osztható 3-mal, de 9-cel nem.)

A (6) alatti szám prímtényezős alakja: 2 812 644 884 765 625 $= 3 \cdot 5^9 \cdot 7^5 \cdot 13^4$.

A (2) alatti szám $4k+3$ alakú, így a 13. feladat szerint nem lehet tökéletes.

A (3) alatti szám négyzetszám, ami a 6. feladat szerint nem lehet tökéletes.

A (4) alatti szám a 16. feladat miatt nem lesz tökéletes.

Az (5) alatti szám a 14. feladat szerint nem lehet tökéletes.