Megoldás:

Az ABC háromszög oldala legyen 2 egység.

Hosszabbítsuk meg a BD szakaszt a D felöli oldalon. Ahol ez metszi a háromszög AC oldalát ott lesz a H pont.

Írjunk AE sugarú kört az E pont, mint középpont köré.

A kör sugara: AE, az AEF derékszögű háromszögből számolható.

$$EF=CF-2(CF-DF)=2DF-CF=2-\sqrt{3}$$

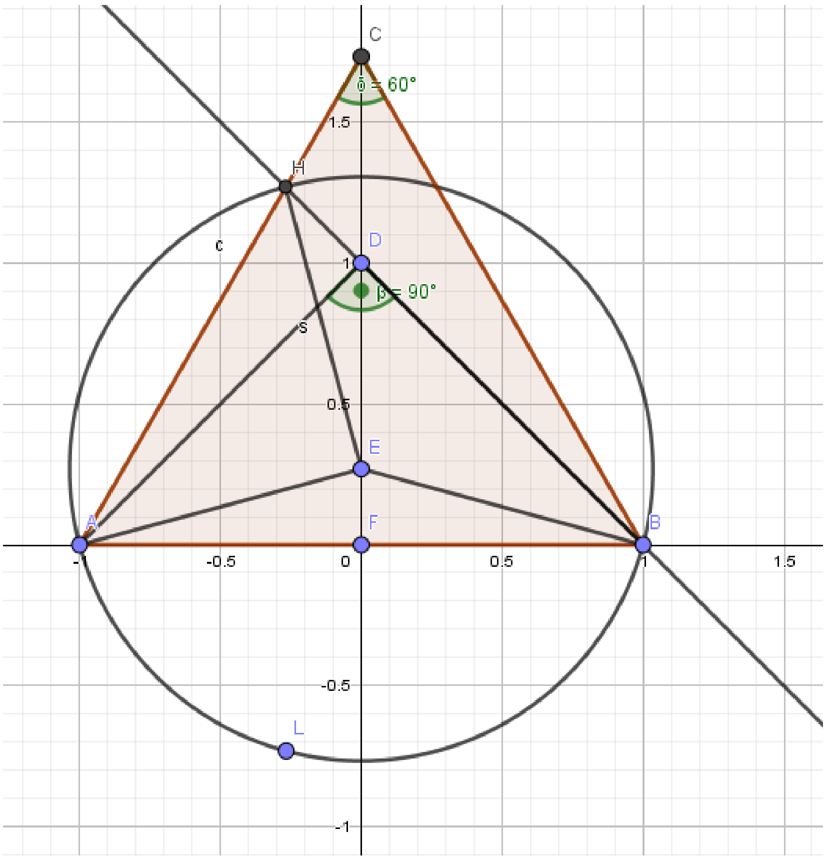
mert DF=1, hiszen DFB háromszög egyenlő szárú és derékszögű

$$CF=\sqrt{3}$$

hiszen a 2 egység oldalhosszúságú szabályos háromszög magassága

$$r=AE=\sqrt{1+\left(2-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{8-4\sqrt{3}}=2\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

Igazoljuk, hogy a H pont ezen a körön van!



Először határozzuk meg az AH szakasz hosszát. AHB háromszögben szinusz tételt írunk fel az AH oldalra. Az AHB háromszögről tudjuk:

HAB szög=60°

HBA szög=45° (Mivel DFB háromszög egyenlő szárú és derékszögű.)

AB=2 egység

Így $\frac{AH}{2} = \frac{\sin 45°}{\sin 75°}$

$$\sin 75° = \sin(30° + 45°) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$$

ezért

$$\frac{AH}{2} = \frac{\sin 45°}{\sin 75°} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{2}{1+\sqrt{3}}$$

$$AH = \frac{4}{1+\sqrt{3}} = \frac{4\left(\sqrt{3}-1\right)}{2} = 2\left(\sqrt{3}-1\right)$$

HCE háromszögből koszinusz tétellel ki tudjuk számolni a HE szakasz hosszát.

HCE háromszögről tudjuk:

HC=AC-AH=2-2$\left(\sqrt{3}-1\right)$ =4-2$\sqrt{3}$

CE=CF-EF   EF=CF-2(CF-DF)=2DF-CF=$2-\sqrt{3}$

CE=$\sqrt{3} - \left(2-\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3} - 2 = 2(\sqrt{3}-1)$ (AH=CE)

HCE szög=30 fok

$$HE^2 = HC^2 + CE^2 - 2\cdot HC\cdot CE\cdot \cos 30°$$

$$HE^2 = \left(4-2\sqrt{3}\right)^2 + \left(2\sqrt{3}-2\right)^2 - 2\cdot\left(4-2\sqrt{3}\right)\cdot\left(2\sqrt{3}-2\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$HE^2 = 28 - 16\sqrt{3} + 16 - 8\sqrt{3} - \left(36 - 20\sqrt{3}\right) = 8 - 4\sqrt{3}$$

$$HE = \sqrt{8-4\sqrt{3}} = 2\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

ez éppen a kör sugara! Tehát H rajta van az E középpontú,

$$AE = r = 2\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

sugarú körön.

AHB, AB íven nyugvó kerületi szöghöz tartozó középponti szög AEB.

AHB szög=75 fok, mert CHB szög=105° (HCB háromszög szögei: 60, 15, 75 fokosak)

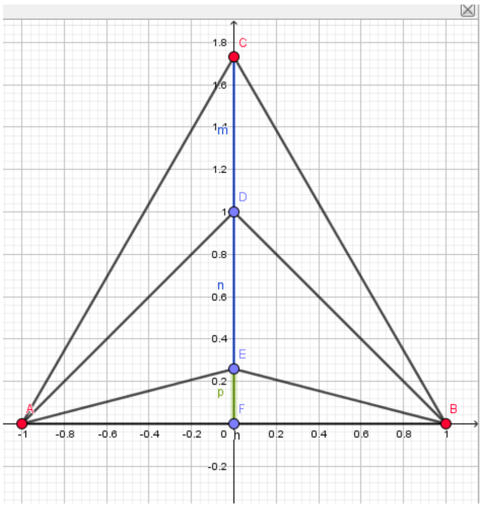
Mivel AHB szög=75 fok, ezért AEB szög= 150 fok.

2. Megoldás

Helyezzük el koordinátarendszerben az ABC háromszöget.

Legyen A(-1;0), B(1;0) , F azonos az origóval. Ekkor a háromszög oldala 2 egység hosszúságú, így a C csúcs koordinátái: C(0;$\sqrt{3}$) és CF=$\sqrt{3}$

Keressük az AEB=$\propto$ szöget, SZÖGFÜGGVÉNYEK segítségével



Mivel ADB szög derékszög, ezért és a szimmetria miatt

DF=FB= 1 egység, DC=CF-DF=$\sqrt{3}$-1 és tudjuk, hogy

DC=DE

Innen

EF=DF-DE=1-($\sqrt{3}$-1)=2-$\sqrt{3}$

$FEBszög\ = \propto/2$, FEB háromszög derékszögű, ezért

$$tg\frac{\propto}{2} = \frac{FB}{EF} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}$$

hiszen $\left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\left(2-\sqrt{3}\right) = 1$

Ha számológéppel visszakeressük a szöget, 75 fokot kapunk $\frac{\propto}{2}$-re.

De ez az érték (2+$\sqrt{3}$) pontosan $tg75°$?

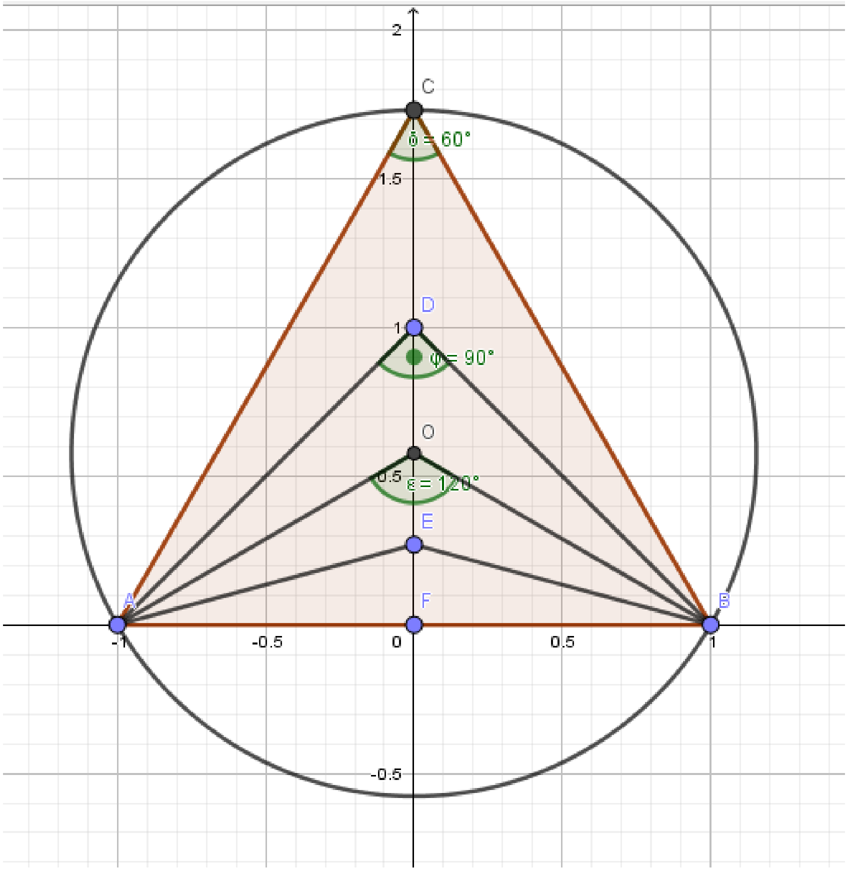
Könnyen utánajárhatunk:

$$tg(45° + 30°) = \frac{tg45°+tg30°}{1-tg45°\cdot tg30°} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\cdot\frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \frac{\left(3+\sqrt{3}\right)^2}{6} = \frac{12+6\sqrt{3}}{6} = 2+\sqrt{3}$$

Tehát $\frac{\propto}{2}$ pontosan 75 fok.

Innen $\propto = 150°$

3. Megoldás



A feladatban szereplő pontok koordinátái:

$A(-1;0)$ $B(1;0)$ $C(0;\sqrt{3})$ $D(0;1)$ $E(0;2-\sqrt{3})$ $F(0;0)$

$O(0;\frac{\sqrt{3}}{3})$ (az ABC háromszög köré írható kör középpontja)

Milyen arányban osztja az E pont az OF szakaszt?

Az OBF háromszög BE egyenese milyen arányban osztja a B csúccsal szemközti oldalt?

$$OE = \frac{\sqrt{3}}{3} - \left(2-\sqrt{3}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{3} - 2$$

$$EF = 2-\sqrt{3}$$

$$\frac{OE}{EF} = \frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}-2}{2-\sqrt{3}} = \frac{\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}-2\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}{1} = \frac{\frac{8\sqrt{3}}{3}-2\sqrt{3}}{1} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{1} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1}$$

De ez éppen az OBF háromszög B csúcsából kiinduló két oldalának aránya, hiszen OB szakasz hossza az OF szakasz kétszerese, mert az OFB háromszög éppen egy szabályos háromszög „fele”, szögei: 90, 60 és 30 fokosak.

Ezért

$$\frac{OB}{FB} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{1} = \frac{OE}{EF}$$

Ebből következik, hogy a BE szakasz a B csúccsal szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja, tehát a B csúcsnál levő szöget felezi.

Innen $EBF\ szög\ = 15°$

Az EBF háromszög szögei tehát, 15, 90 és 75 fokosak. Innen:

$$AEB\ szög\ = 150°$$

4. Megoldás

Skaláris szorzat segítségével határozzuk meg a CBE=γ szöget! Számoljuk ki a $\overrightarrow{BC}$ és$\overrightarrow{BE}$ vektorok szögét! A feladatban szereplő pontok koordinátái:

$A(-1;0)$ $B(1;0)$ $C\left(0;\sqrt{3}\right)$ $D(0;1)$ $E(0;2-\sqrt{3})$ $F(0;0)$

$$\overrightarrow{BC}\left(-1;\sqrt{3}\right),\ |\overrightarrow{BC}|=2$$

$$\overrightarrow{BE}\ \left(-1;2-\sqrt{3}\right),$$

$$|\overrightarrow{BE}| = \sqrt{1+\left(2-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{8-4\sqrt{3}} = 2\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

A skaláris szorzatot kétféleképp felírva:

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BE}=1+\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right) = 2\cdot 2\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot cos\gamma$$

$$cos\gamma = \frac{2\sqrt{3}-2}{2\cdot 2\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{\left(4-2\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}}{2} = \frac{\sqrt{2\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

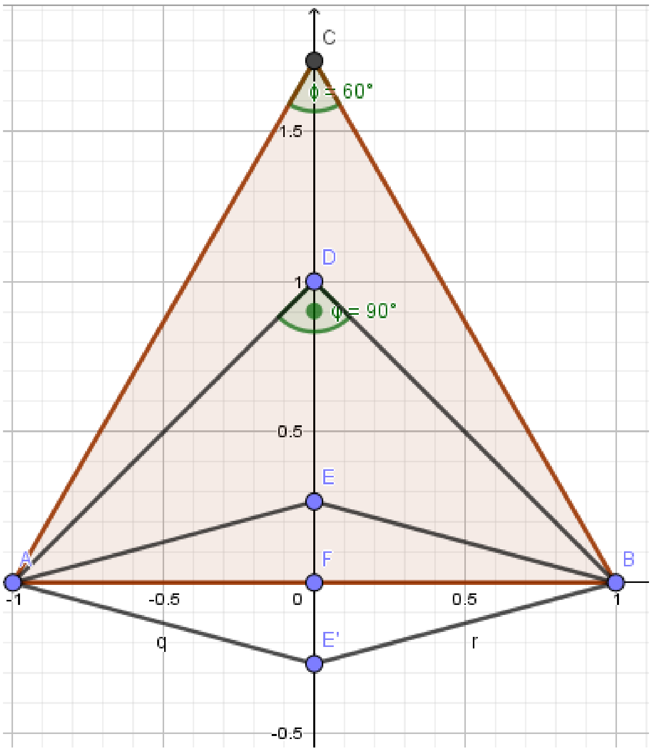
Innen

$$\gamma = 45°$$

Ha CBE = $\gamma = 45°$, akkor EBF szög 15°, és

AEB szög egyenlő 150 fokkal.

5. Megoldás



A feladatban szereplő pontok koordinátái:

$A(-1;0)$ $B(1;0)$ $C(0;\sqrt{3})$ $D(0;1)$ $E(0;2-\sqrt{3})$ $F(0;0)$

Tükrözzük az E pontot az x tengelyre!

A kapott pont koordinátái:

$$E'(0;\ \sqrt{3}-2)$$

Határozzuk meg a DBE'=δ szöget!

Írjuk fel a DBE' háromszög DE' oldalára a koszinusztételt!

A háromszög oldalainak hossza:

$$BD=\sqrt{2}$$

$$E'B=EB=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}-2\right)^2}=\sqrt{8-4\sqrt{3}}=2\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$E'D=DF+E'F=3-\sqrt{3}$$

ezért

$$\left(3-\sqrt{3}\right)^2=2+4\left(2-\sqrt{3}\right)-2\cdot\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot cos\delta$$

$$12 - 6\sqrt{3} = 10 - 4\sqrt{3} - 4\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \cdot cos\delta$$

$$2 - 2\sqrt{3} = -4\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \cdot cos\delta$$

$$2 - 2\sqrt{3} = -4\sqrt{\left(\sqrt{3} - 1\right)^2} \cdot cos\delta$$

$$cos\delta = \frac{2\left(1 - \sqrt{3}\right)}{-4\left(\sqrt{3} - 1\right)} = \frac{1}{2}$$

$$\delta = 60°$$

Tehát

DBE’ szög=$60°$

EBF szög=E’BF szög= $60° - 45° = 15°$

Ezért

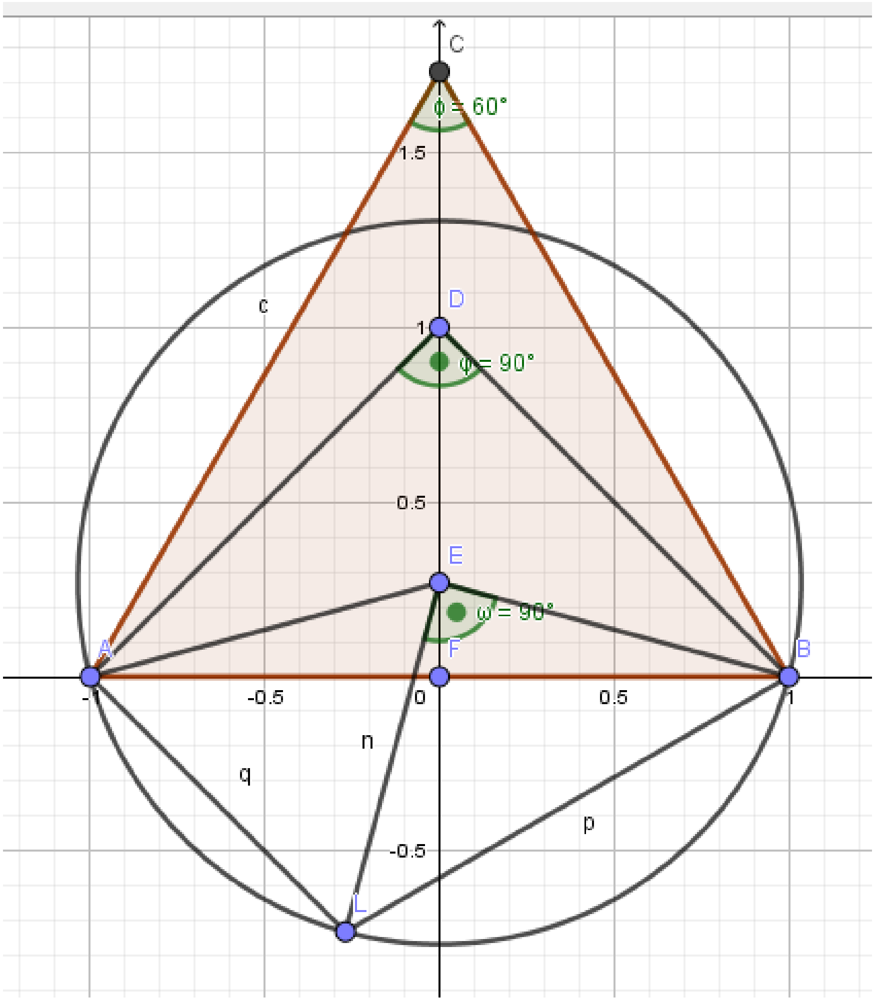
FEB szög=75°

AEB szög egyenlő 150°

6. Megoldás

A feladatban szereplő pontok koordinátái:

$A(-1;0)$ $B(1;0)$ $C(0;\sqrt{3})$ $D(0;1)$ $E(0;2-\sqrt{3})$ $F(0;0)$



Forgassuk el az $\overrightarrow{EB}$ vektort 90 fokkal az óramutató járásával megegyező irányba.

Így megkapjuk az $\overrightarrow{EL}$ vektort.

$$\overrightarrow{EB}(1;\sqrt{3}-2)$$

$$\overrightarrow{EL}(\sqrt{3}-2;-1)$$

$\overrightarrow{FL}$ helyvektor végpontja megadja az L pont koordinátáit.

$$\overrightarrow{FL} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EL}$$

$$\overrightarrow{FL}(\sqrt{3}-2;1-\sqrt{3})$$

$$L(\sqrt{3}-2;1-\sqrt{3})$$

Igazoljuk, hogy az így kapott AEL háromszög szabályos!

AE=$2\sqrt{2-\sqrt{3}}$

EL=$\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2+1} = 2\sqrt{2-\sqrt{3}}$

AL=$\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{3}-1\right)^2} = \sqrt{8-4\sqrt{3}} = 2\sqrt{2-\sqrt{3}}$

Tehát az AEL háromszög szabályos, LEB háromszög derékszögű.

Így AEB szög 60+90=150 fokos.