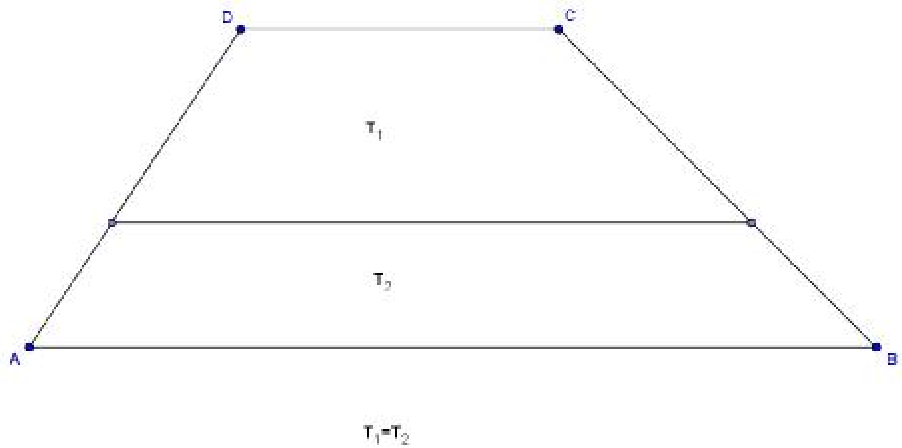
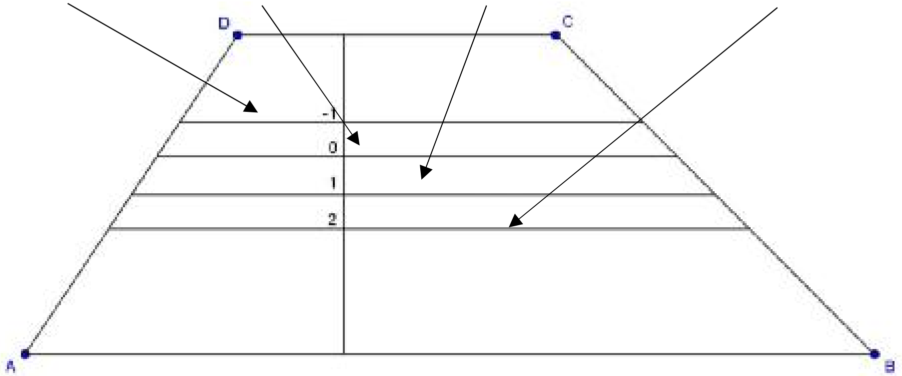
A folytonosan változó dimenzió

- Egy trapéz alapjai legyenek *a* és *b.* Osszuk két egyenlő területű részre az alapokkal párhuzamos egyenessel. Fejezzük ki ennek az egyenesnek a trapézon belüli hosszát *a*-val és *b*-vel.



$$c = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

$$\frac{1}{\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}} \qquad \sqrt{ab} \qquad \frac{a+b}{2} \qquad \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

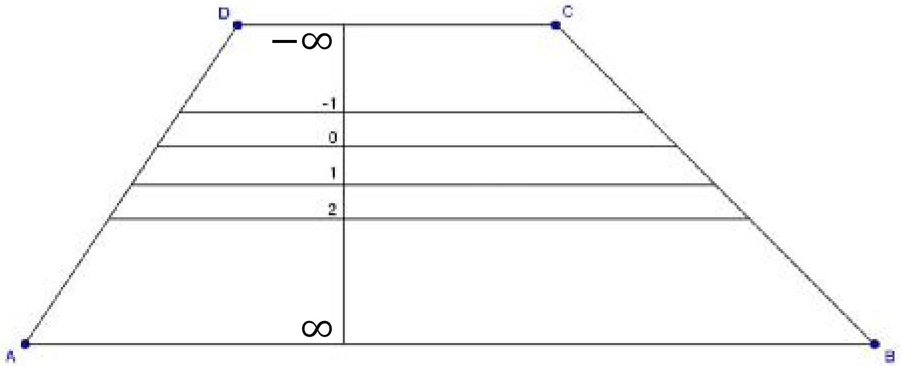


- A trapézon belül megjelennek a további közepek is, egymással párhuzamosan, méghozzá az átlók metszéspontján át húzott (harmonikus), a két hasonló trapézra vágó (mértani), a magasság felezőpontján át húzott (számtani) és a két egyenlő területre vágó egyenesek által (négyzetes).

A *k*-ad rendű közép

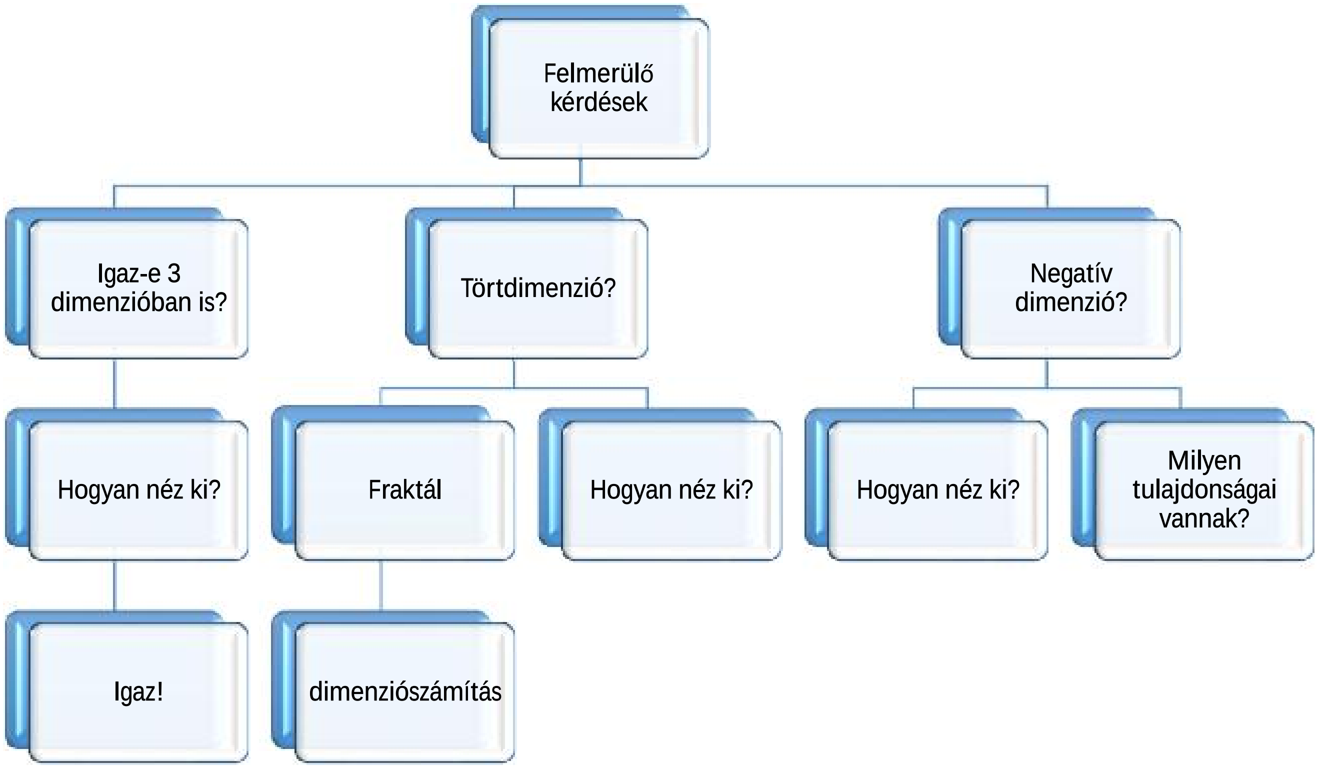
- $A_k(a,b) = \left(\frac{a^k+b^k}{2}\right)^{\frac{1}{k}}$
- $\lim_{k\to 0} A_k = \sqrt{ab}$
- $\lim_{k\to \infty} A_k = a$
- $\lim_{k\to -\infty} A_k = b$

- $A_k(a,b) = \left(\frac{a^k+b^k}{2}\right)^{\frac{1}{k}}$ -vel jelöljük *a* és *b* pozitív számok k-adrendű közepét. Ha k tart 0-hoz, akkor a mértani közepet kapjuk, illetve, ha *a*>*b*, akkor igazak a lenti egyenletek is.

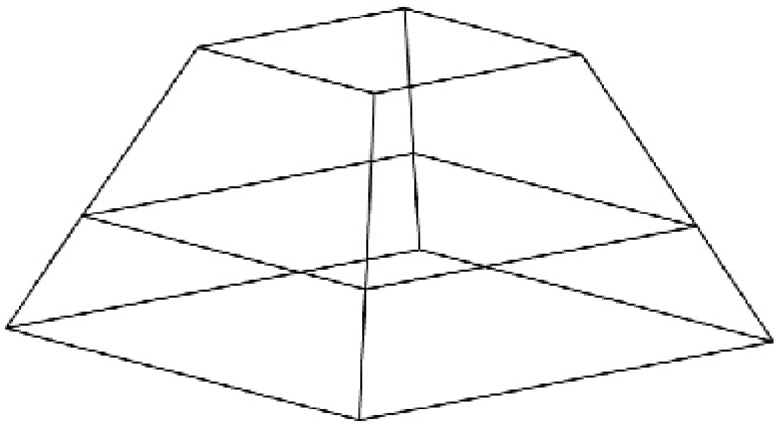


- Ezek alapján kiegyészíthetjük az ábrát. Így a magasságon megjelenik az összes valós szám, amin a *k* ponton keresztül húzott alapokkal párhuzamos szakasz hossza épp a *k*-ad rendű közép.

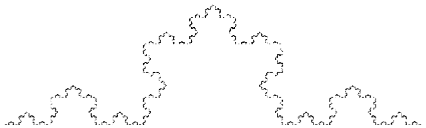
- Feltehetjük a következő kérdést: igaz-e az, hogy egy *k* dimenziós trapézt a két egyenlő mértékre vágó alapokkal párhuzamos szakasz hossza egyenlő az alapok hosszának *k*-ad rendű közepével?
- *k*=1-re, illetve *k*=2-re látszik az ábrán, hiszen egy 2 dimenziós trapéznál ez a másodrendű közép, az 1 dimenziósnál (szakasz) pedig a hagyományos átlag az, ami két egyenlő hosszra vágja azt.

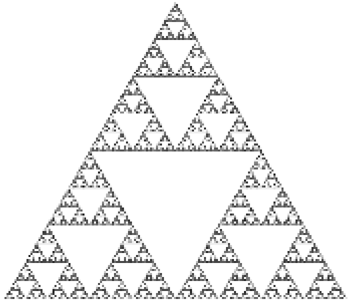

Felmerülő kérdések
Igaz-e 3 dimenzióban is?
Törtdimenzió?
Negatív dimenzió?
Hogyan néz ki?
Fraktál
Hogyan néz ki?
Hogyan néz ki?
Milyen tulajdonságai vannak?
Igaz!
dimenziószámítás

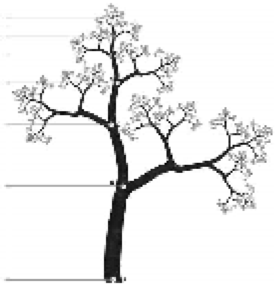
Három dimenziós trapéz

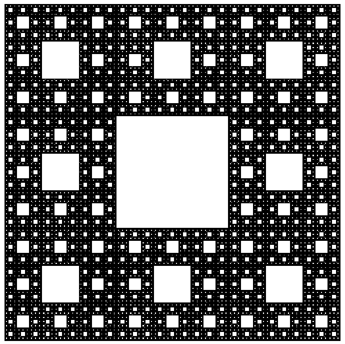


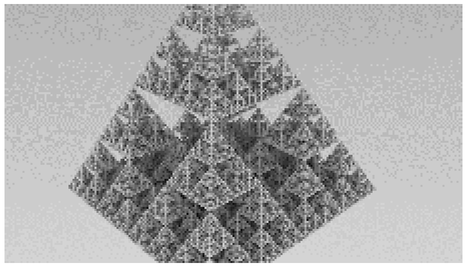
- Három dimenzióban a trapéz egy csonkagúla. Az állítás itt is igaz. Felmerül a kérdés, hogy igaz-e 4-re, 0-ra, -1-re, esetleg egyéb negatív értékekre vagy nem egész számokra?
- Az előbbiekkel nem, de a tört dimenziós terekkel foglalkozunk a továbbiakban.







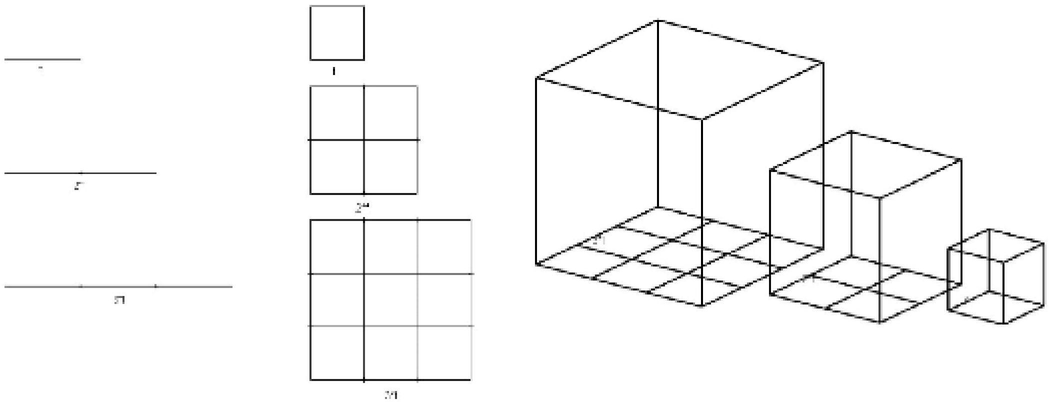




- Ehhez kicsit megpróbáljuk megismerni a törtdimenziós tereket, a fraktálokat.

Cantor-halmaz, Koch-görbe, Sierpiński-háromszög, -szőnyeg és -tetraéder, valamint egy fa. Mind-mind önhasonló alakzatok. De vajon milyen dimenzióval rendelkeznek, hogyan lehet kiszámolni ezt?

W1



$\lambda_1 = 2; \lambda_2 = 3;$

$M_1 = \lambda * M;$

$M_1 = \lambda^2 * M;$

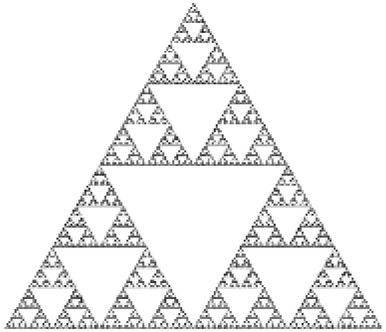
$M_1 = \lambda^3 * M;$

- Egy 1, 2, 3 dimenziós szakaszt, négyzetet vagy kockát középpontosan nagyítunk λ-szorosára, akkor próbáljuk meg lefedni az eredetivel őket. Azt látjuk, hogy λ, λ^2, λ^3 db kell. Vagyis a kitevőben megjelenik a dimenzió.

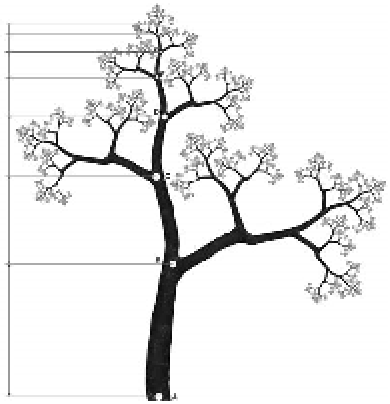
10. dia

W1 Windows-felhasználó; 2017. 07. 03.

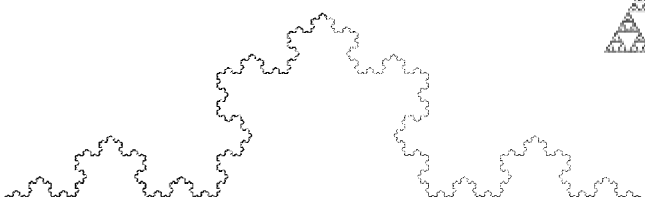
$d = log_3 2$



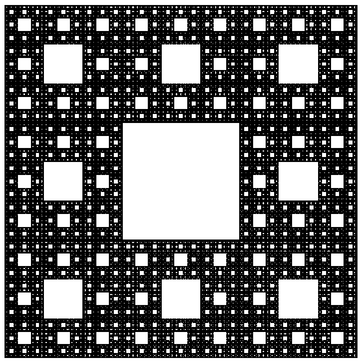
$d = log_2 3$



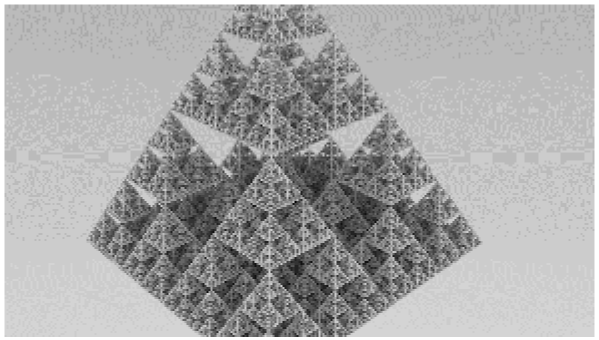
$d \approx 1.315$



$d = log_3 4$



$d = log_3 8$

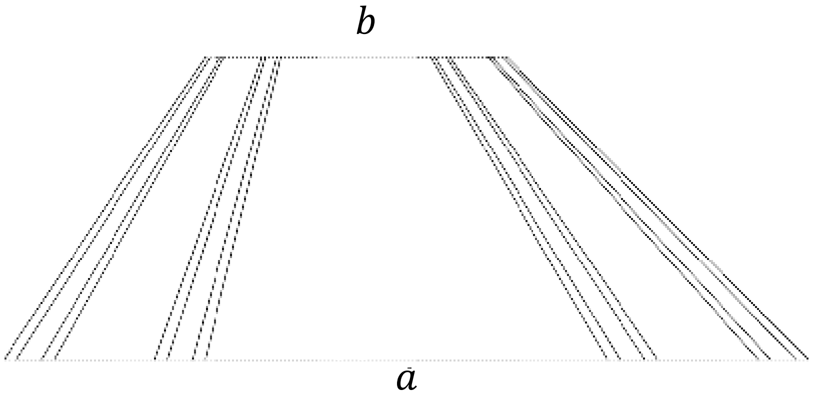


$d = log_2 4 = 2$

- Próbáljuk meg az alábbi ponthalmazoknál kitalálni ugyanezt. A Sierpiński-háromszögnél például egy készeres nagyítást követően három eredetivel lehet lefedni.

- A Cantor-halmaznál, ha változtatjuk azt, hogy a teljes szakasz mekkora részét vágjuk ki a közepéről, akkor különböző hasonlósági dimenziós ponthalmazokat kapunk. Például, ha a teljes szakasz felét, akkor d=0,5.

Másfél dimenziós trapéz



- A másfél dimenziós trapézt egy fél dimenziós Cantor-halmazból kapjuk, ha azt középpontból nagyítjuk, majd a megfelelő pontokat összekötjük.

$$M_1 = \int_0^{m_1\frac{a}{a-b}+m_2\frac{b}{a-b}} \frac{b}{(m_1+m_2)\frac{b}{a-b}} x^d dx - \int_0^{m_1\frac{b}{a-b}+m_2\frac{b}{a-b}} \frac{b}{(m_1+m_2)\frac{b}{a-b}} x^d dx$$

$$= \left[\frac{a-b}{m_1+m_2}\cdot\frac{1}{d+1}\cdot\left(m_1\frac{a}{a-b}+m_2\frac{b}{a-b}\right)^{d+1}\right]$$

$$-\left[\frac{a-b}{m_1+m_2}\cdot\frac{1}{d+1}\cdot\left(m_1\frac{b}{a-b}+m_2\frac{b}{a-b}\right)^{d+1}\right]$$

$$= \frac{a-b}{m_1+m_2}\cdot\frac{1}{d+1}\cdot\left[\left(c\cdot\frac{m_1+m_2}{a-b}\right)^{d+1} - \left(b\cdot\frac{m_1+m_2}{a-b}\right)^{d+1}\right]$$

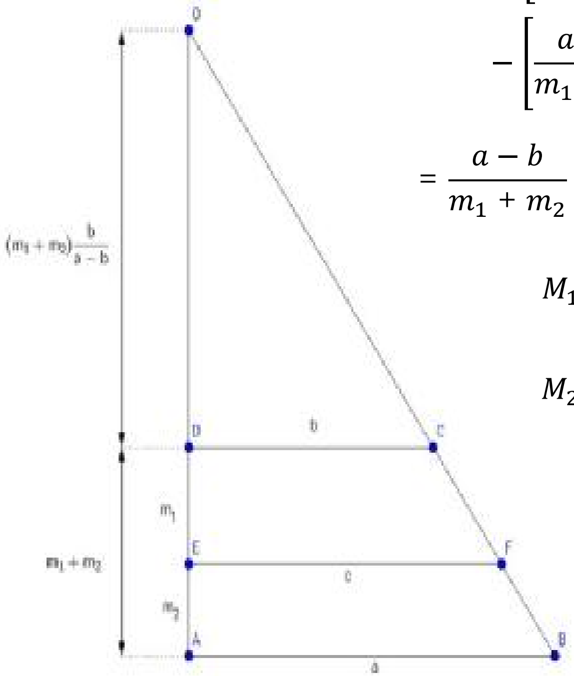
$$M_1 = \left(\frac{m_1+m_2}{a-b}\right)^d\cdot\frac{1}{d+1}\cdot[c^{d+1}-b^{d+1}]$$

$$M_2 = \left(\frac{m_1+m_2}{a-b}\right)^d\cdot\frac{1}{d+1}\cdot[a^{d+1}-c^{d+1}]$$

$$M_1 = M_2$$

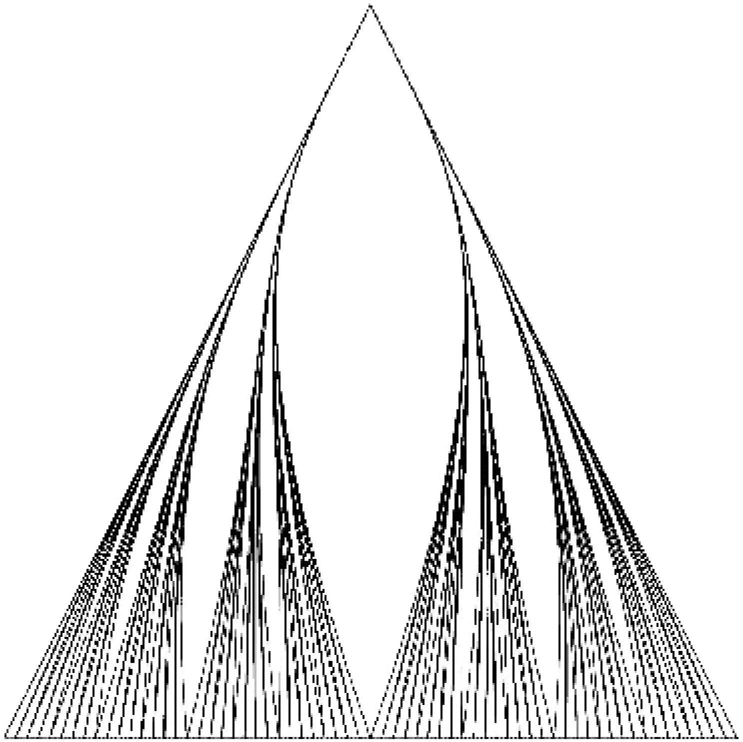
$$c^{d+1}-b^{d+1} = a^{d+1}-c^{d+1}$$

$$c = \left(\frac{a^{d+1}+b^{d+1}}{2}\right)^{\frac{1}{d+1}}$$



- Innen már Akár integrálással is megkaphatjuk az általunk megsejtett összefüggést, aáltalános *d* dimenzióra. Létezik csak hasonlósággal egyszerűbb bizonyítás is.

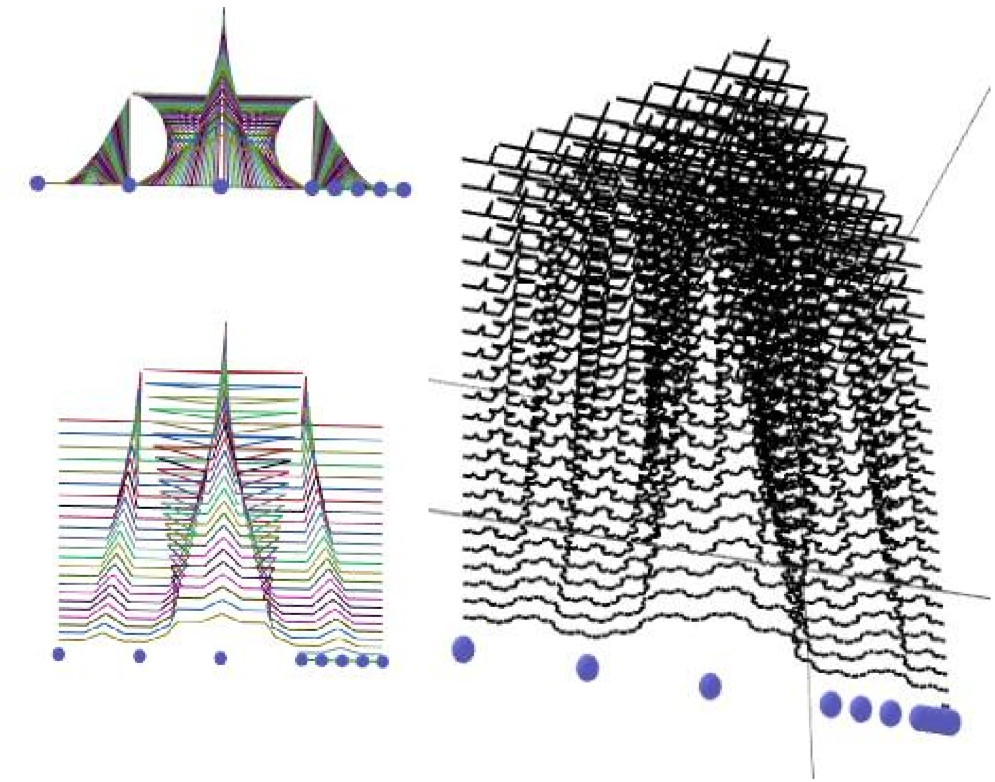
Folytonosan változó dimenziójú Cantor-halmaz



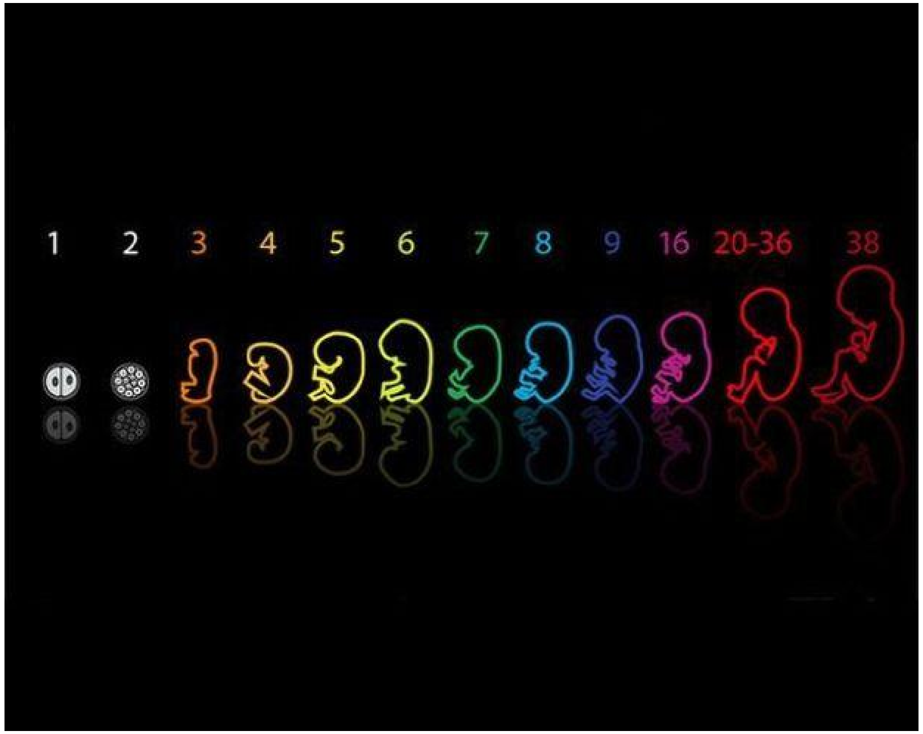
- Ha a Cantor-halmazból bármilyen 0 ás 1 közötti dimenziót elérhetünk, akkor most tegyük egymás mellé ezeket a halmazokat. Így az alábbi háromszöget kapjuk, aminek minden, az alapjával párhuzamos metszete egy megfelelő dimenziós Cantor-halmaz.

A Koch-görbe dimenzió-növekedése

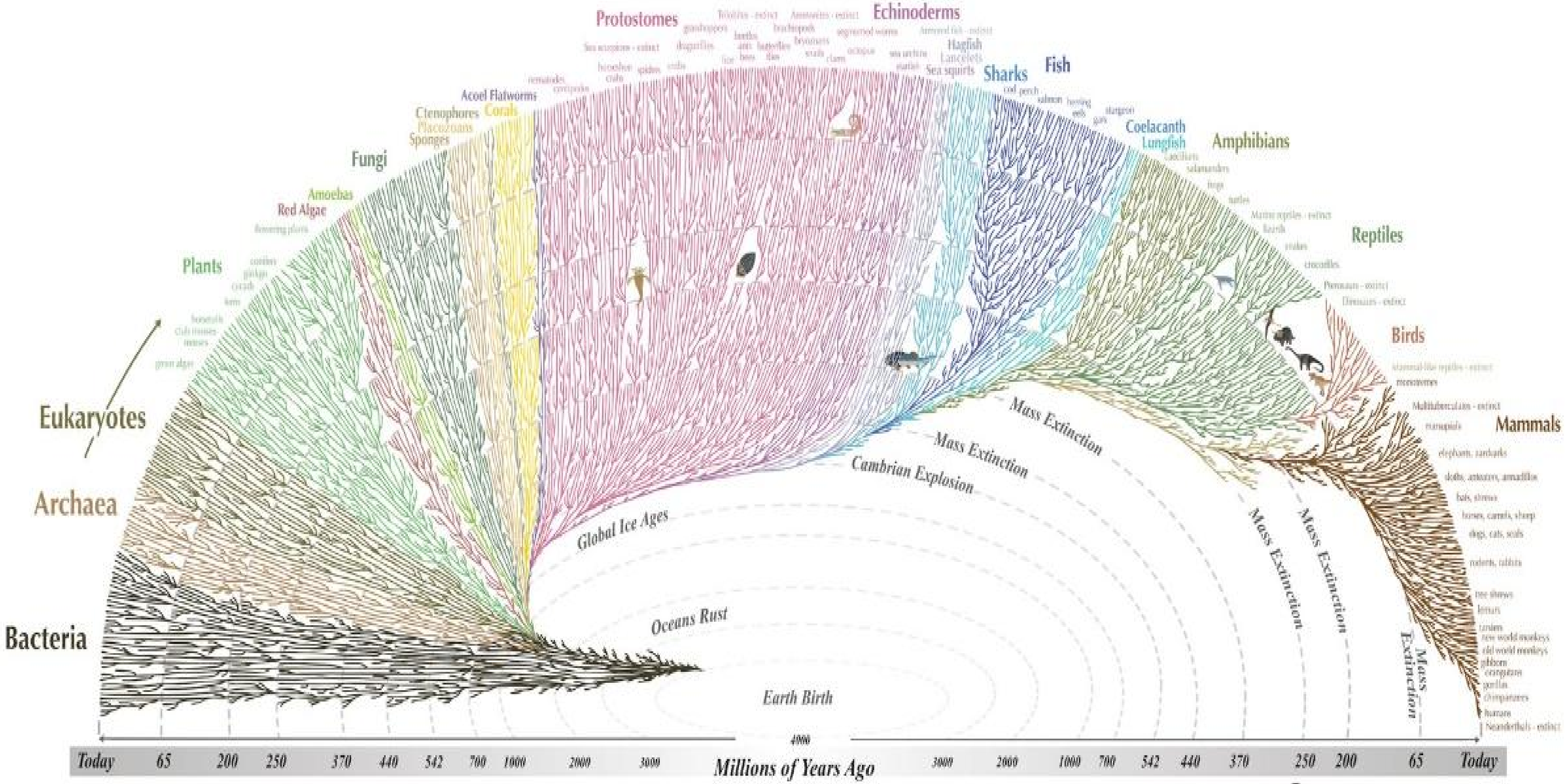
- Ugyan ezt elérhetjük más fraktáloknál is, itt például a Koch görbe folytonos dimenzió változását követhetjük nyomon, amint 1-ből válik 2 dimenzióssá.



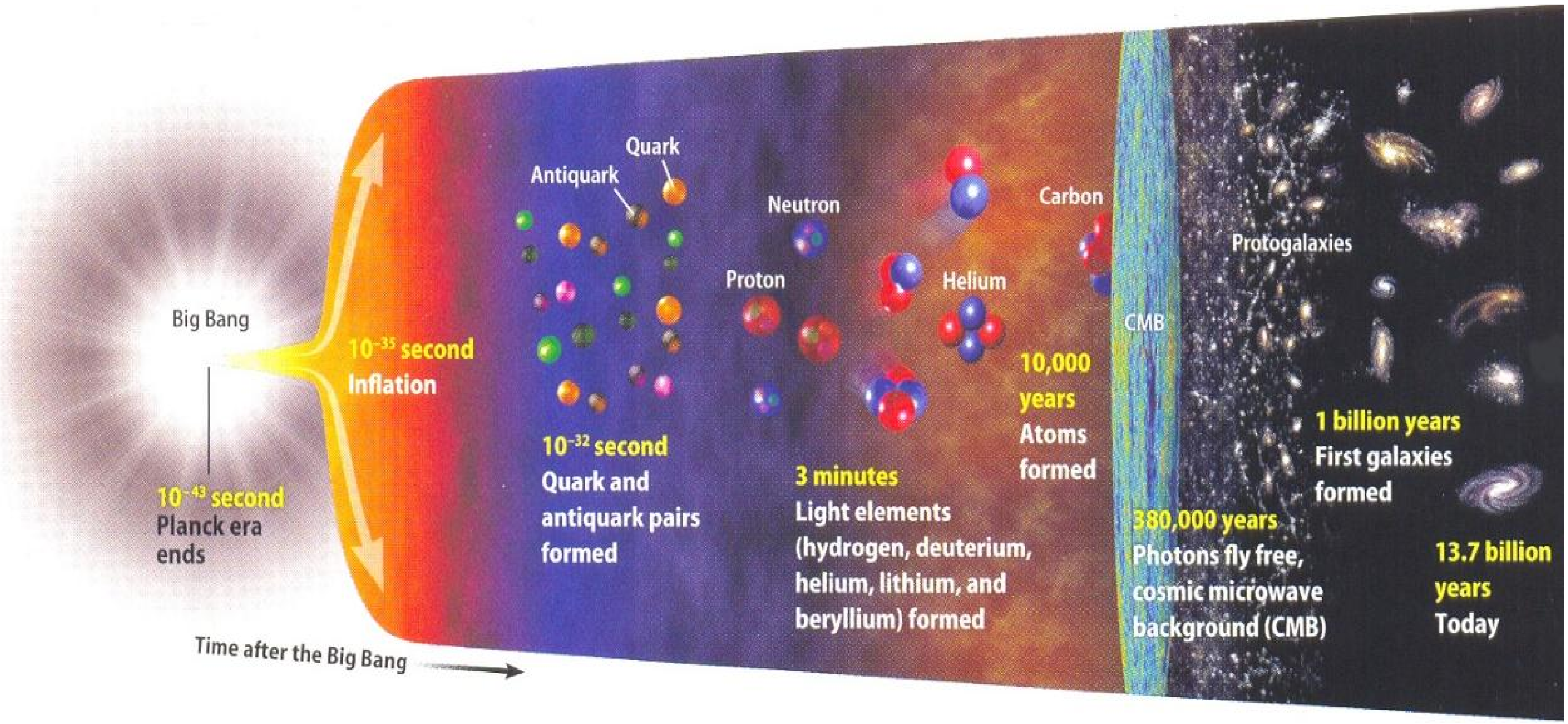
Itt pedig már a térben egymás mellé helyezett Koch görbék szintezési ábrái láthatóak. Ez a felület 3 dimenzióssá nő, bár a térfogata 0.



- Hasonló, folytonosan változó dimenziójú dolgokkal találkozhatunk például egy élőlény kifejlődésénél, ahol egy pontszerű sejtből lesz egy hatalmas sejtrendszer, illetve az evolúciónál vagy a világegyetem keletkezésénél is akár. Mintha pontszerűből növelné a dimenzióját a tér.



All the major and many of the minor living branches of life are shown on this diagram, but only a few of those that have gone extinct are shown. Example: Dinosaurs - extinct



Big Bang
10^{-43} second
Planck era ends
10^{-35} second
Inflation
Antiquark
Quark
10^{-32} second
Quark and antiquark pairs formed
Neutron
Proton
Helium
3 minutes
Light elements (hydrogen, deuterium, helium, lithium, and beryllium) formed
Carbon
10,000 years
Atoms formed
CMB
380,000 years
Photons fly free, cosmic microwave background (CMB)
Protogalaxies
1 billion years
First galaxies formed
13.7 billion years
Today
Time after the Big Bang

Köszönöm szépen a figyelmet!