Összegek előállítása alapműveletek és zárójelek segítségével

1. alapfeladat	8. 3_{10}[0–100]	15. 10_{10}[0–100]
2. Előállítás 2_6 bázisban	9. 4_{10}[0–100]	16. 11_{10}[0–100]
3. Előállítás X_6 bázisban	10. 5_{10}[0–100]	17. 12_{10}[0–100]
4. Általánosítás (alapszám)	11. 6_{10}[0–100]	18. A kivételek kezelése
5. Általánosítás (érték)	12. 7_{10}[0–100]	19. Alkalmazás
6. [0–100] előállítása	13. 8_{10}[0–100]	
7. 2_{10}[0–100]	14. 9_{10}[0–100]	

1. Alapfeladat: Egy ismert, népszerű általános iskolás feladatban egymás mellé írunk 10 darab 2-est, ezután a tanulóknak a 2-esek közé írt négy alapműveleti jel, valamint a zárójelek felhasználásával rendre elő kell állítani az 1, 2, 3, … , 10-es összeget.

Például: $1 = 2:2 + 2–2 + 2–2 + 2–2 + 2–2$, $7 = 2·2·2 – (2:2) + (2–2)·(2+2+2)$ és így tovább.

Ugyanezt a feladatot gyakran kitűzzük 2-esek helyett 10 darab 3-assal, 10 darab 4-essel, … , végül 10 darab 10-essel is. Bár egyik-másik feladat ekkor már nehezebb, tanítványaink így is általában sokféle megoldást találnak, és az egyes előállítások során elég nagy a mozgásterünk.

A feladat egyik nehezítése lehet, ha 10-nél kevesebb alapszámot használunk. A tapasztalat alapján úgy tűnik, hogy már 6 alapszám is elegendő az egyes előállításokhoz, ezért a cikk első részében ezt az állítást bizonyítjuk be.

2. feladat: Bizonyítsuk be, hogy minden 1, 2, 3, … , 10 célösszeg előállítható akkor is, ha kezdetben csak **hat darab** 2-est adunk meg!

3. feladat: Bizonyítsuk be, hogy minden előállítás megvalósítható a hat darab 2-es helyett a hat darab 3, hat darab 4, … , hat darab 10 kezdőszámok esetén is!

Megoldás: Tekintsük az *a a a a a a* kezdőhelyzetet! (A továbbiakban ezt a_6 bázisnak nevezzük és jelöljük; *a* a bázis alapszáma, a 6 index az elemeinek a száma.)

3.1. Előzetes észrevétel, hogy a 0-t 2 vagy több *a*-val előállíthatjuk, például az $(a – a)$ tényezővel szorozva.

3.2. Az alacsony (pozitív) konstansokat előállíthatjuk a_6-ban, például:

$1 = a:a+0$

$2 = a:a+a:a+0$

$3 = a:a+a:a+a:a$

$4 = (a+a):a+(a+a):a$

$5 = (a+a+a+a+a):a$

Hiányzik tehát a 6, 7, 8, 9, 10 előállítása a 2_6, 3_6, … , 10_6 bázisokban.

3.3. Az *a* értékétől függően az egész számok egy-egy intervallumát is előállíthatjuk a_6-ban:

$a = a+0$

$a \pm 1 = a \pm a:a+0$

$a \pm 2 = a \pm (a+a):a+0$

$a \pm 3 = a \pm (a+a):a \pm (a:a)$

$a \pm 4 = a \pm (a+a+a+a):a$

Azaz a_6-ban $a – 4$, $a – 3$, … , $a + 4$ előállítható. A 3.3. eredmény például 4_6-ban a 0, 1, 2, … , 8 számok „automatikus” előállítását garantálja. (Ezt a továbbiakban 4_6[0–8] módon jelöljük.)

Eddigi eredmények tehát 3.2. és 3.3. alapján:
3.2. miatt 1-től 5-ig minden előállítás minden bázisban; továbbá
3.3. miatt 2_6-ban: 6-ig, 3_6-ban: 7-ig, 4_6-ban: 8-ig, 5_6-ban: 9-ig,
6_6-tól 10_6-ig pedig 10-ig minden előállítás megvalósítható.

3.4. A hiányzó értékek előállítása a 6-elemű bázisokban

Általában többféle előállítás lehetséges, most csak egy-egy példát mutatunk.

2-es alapszám esetén (7-től): $2_6[7,8,9] = 8 \pm 1$ és $8 + 0 \Rightarrow 2+2+2+2 \pm (2:2)$ és $2+2+2+2 + (2–2)$. $2_6[10] = 2·2·2 + 2 + 0$.

3-as alapszám (8-tól): $3_6[8,9,10] = 3·3 \pm 1$ és $3·3 + 0 \Rightarrow 3·3 \pm 3:3$ és $3·3 \pm (3–3)$ stb.

4-es alapszám (9-től): $4_6[9] = 8 + 1 = 4+4 + (4:4) + 0$ és $4_6[10] = 12 – 2 = 4+4+4 – (4+4):4$.

5-ös alapszám esetén: $5_6[10] = 5+5 + 0$.

Megjegyzés: Természetesen más jellegű megoldások is lehetségesek, pl. $a_6[a + 3] = (a \cdot a + a + a + a) : a$. Az esetleges további előállításokat most és a cikk későbbi részében sem említjük meg, inkább a rövidségre törekszünk.

3.5. Eredmény: A 2_6, 3_6, … , 10_6 bázisban a [0, 1, 2, … , 10] értékek előállíthatók. ♦

4. „Általánosítások" a bázis alapszámára

A 10-nél nagyobb alapú bázisokat vizsgáljuk.

11-es alapszám esetén 3.1, 3.2 és 3.3. miatt $11_6[0–5]$ és 11_6 [7–15] előállítható, hiányzik a 6 előállítása. Íme: $11_6[6] = (11 + 11:11) : ((11+11):11)$.

12-es alapszám esetén $12_6[0–5]$ és 12_6 [8–16] előállítható, hiányzik a 6 és a 7 előállítása: $12_6[6,7] = 6 +1$ vagy $6 +0$: $12:((12+12):12) + (12:12)$ vagy + 0 a végén.

13-as bázisban $13_6[0–5]$ és $13_6[9–17]$ előállítható, hiányzik a 6, 7 és a 8 előállítása: $13_6[6] = (13 – 13:13) : ((13+13):13)$ és $13_6[7] = (13 + 13:13) : ((13+13):13)$.

A $13_6[8]$ előállítása nem sikerült, így a bázis alapszámára vonatkozó (egységes) általánosítás csak 12-ig mondható ki.

4.1. Eredmény: A 2_6, 3_6, … , 12_6 bázisban a [0, 1, 2, … , 10] értékek előállíthatók. ♦

5. „Általánosítások" az előállított értékre

A 10-nél nagyobb értékek előállítását vizsgáljuk.

3.3. miatt (azaz $[a – 4, … , a + 4]$ előállíthatósága) a 11 előállítható 7_6 vagy nagyobb alapszámú bázisban, a 12 előállítható 8_6-tól, a 13 pedig 9_6-tól stb. Mivel $9_6[14]$ előállítása nem sikerült, ezért az előállított értékre vonatkozó egységes általánosítás legfeljebb 13-ig mondható ki.

A 4.1. hiányzó értékeinek előállítása 13-ig:
$2_6[11] = 2·2·2 +2 +(2:2)$, $2_6[12] = 2·2·2·2 –2 –2$, $2_6[13] = 2·(2·2+2) +(2:2)$;
$3_6[11] = 3·3 + (3:3) + (3:3)$, $3_6[12] = 3·3 + 3 + 0$, $3_6[13] = (3 + (3:3))·3 + 3:3$;
$4_6[11] = 4+4 + (4+4+4):4$, $4_6[12] = 4+4+4 + 0$; $4_6[13] = 4·4 – (4+4+4):4$;
$5_6[11–12] = 5+5 + (5:5)+0$ vagy $+(5:5 + 5:5)$, $5_6[13] = 5+5 + (5+5+5):5$;
$6_6[11–13] = 6+6 \pm (6:6)$ vagy $+0$;
$7_6[12–13] = 7+7 – (7:7)$ vagy $7+7 –(7:7) –(7:7)$;
$8_6[13] = 8+8 – (8+8+8):8$.

(A $9_6[11–13]$, $10_6[11–13]$, $11_6[11–13]$, $12_6[11–13]$ értékek 3.3. miatt „automatikusan" előállíthatók.

5.1. Eredmény: A 2_6, 3_6, … , 12_6 bázisban a [0, 1, 2, … , 13] értékek előállíthatók. ♦

Egyes bázisokban persze 13-nál nagyobb érték is előállítható. A cikk későbbi részében úgyis szükség lesz az előállításokra, ezért később részletesen felsoroljuk az eredményeket.

6. Nehezebbnek ígérkezik a „fordított irányú” probléma, amikor azt vizsgáljuk, hogy adott bázisban milyen $\{1, 2, \ldots , n\}$ összefüggő halmaz elemeit állíthatjuk elő, illetve hogy adott halmaz esetén mely elemek állíthatók elő, és melyek nem. Ha az előállításokat adott *n* esetén, az összes bázisra vonatkozóan vizsgáljuk, akkor a bázis alapszámára és a bázis elemszámára (és az *n* értékére is) mesterséges (szubjektív) előírást tehetünk. A bázis legnagyobb alapszámát pl. az 5.1. eredmény miatt választhatjuk 12-nek; kézenfekvőnek tűnik a bázis elemszámát 10-nek választani (így még talán általános iskolai szinten is kezelhető bonyolultságú a feladat); az *n* értékének pedig válasszuk a 100-at. Így a következő feladatot kapjuk:

6.1. feladat: A $\{0, 1, 2, \ldots , 100\}$ halmaz mely elemeit állíthatjuk elő a 2_{10}, 3_{10}, 4_{10}, … , 12_{10} bázisokban?

A feladat $101\cdot 11$ számú előállításra kérdez rá, természetesen egy lehetséges megoldás lenne az előállítások konkrét felsorolása. Néhány észrevétellel azonban jelentősen lerövidíthető a munka.

6.2. Igen hatékony segítség a ***részekre bontás módszere***. Ekkor pl. ha $X_6[a]$ és $X_4[b]$ is előállítható (azaz az X_6 és X_4 bázisokban előállítottuk az *a*, illetve *b* értékeket), akkor X_{10}-ben a $\pm a \pm b$, $a\cdot b$ és $a:b$ előállítások is megvalósíthatók.

6.3. Egy másik észrevétel, hogy tetszőleges a_4 bázisban is előállíthatunk két, szomszédos egész számokból álló intervallumot (azaz az előállításhoz már a bázis *négy alapszáma* is elegendő):

$a_4[0] = 0$; $a_4[1] = a:a + 0$; $a_4[2] = a:a + a:a$; $a_4[3] = (a+a+a):a$. Valamint

$a_4[a] = a + 0$; $a_4[a \pm 1] = (a\cdot a \pm a):a$ és $a_4[a \pm 2] = a \pm (a + a):a$;

így $a_4[0–3]$ és $a_4[(a–2) – (a+2)]$ előállíthatók minden bázisban.

6.4. Hasonló intervallumokat állíthatunk elő az a_5 bázisban is:

$a_5[2] = (a + a):a + (a–a)$ $a_5[3] = (a+a):a + a:a$ $a_5[4] = (a+a+a+a):a$

$a_5[a \pm 1] = a \pm a:a + (a–a)$ $a_5[a \pm 2] = (a\cdot a \pm a \pm a):a$ $a_5[a \pm 3] = a \pm (a+a+a):a$;

így $a_5[0–4]$ és $a_5[(a–3) – (a+3)]$ előállíthatók minden bázisban.

7. Kezdjük a 2-esekkel: A {0, 1, 2, … , 100} halmaz mely elemeit állíthatjuk elő a 2_{10} bázisban?

Megoldás: Először a kisebb elemszámú bázisokat vizsgáljuk.

6.3. miatt $2_4[0–4]$ előállítható. 2_4 további intervallum-előállításai:

$2_4[5] = 2+2 + 2:2$, $2_4[6] = 2\cdot 2\cdot 2 – 2$.

Tehát $2_4[0–6]$ előállítható.

Megjegyzés: Persze további értékek előállítása is lehetséges, pl. $2_4[8] = 2\cdot 2 + 2 + 2$ vagy $2_4[10] = 2\cdot 2\cdot 2 + 2$. Ezeket később szükség szerint felhasználhatjuk, de most egyelőre *összefüggő* intervallumokat állítunk elő.

2_5 intervallum-előállításai: $2 \pm 2_4[0–6]$ miatt 0–8-ig minden érték előállítható.

$2_5[9] = 2\cdot 2\cdot 2 + 2:2$; $2_5[10] = 2+2+2+2+2$;

Tehát $2_5[0–10]$ előállítható.

Tudjuk (5.1. eredmény), hogy $2_6[0–13]$ előállítható. 2_6 további intervallum-előállításai:

$2_6[14] = (2\cdot 2\cdot 2 – (2:2))\cdot 2$; $2_6[15, 16, 17] = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 \pm 2:2$ vagy $+0$; $2_6[18] = (2\cdot 2\cdot 2 + (2:2))\cdot 2$.

Tehát $2_6[0–18]$ előállítható.

Ezután a részekre bontás módszerét alkalmazhatjuk 2_{10}-ben a [0; 100] egyes részintervallumainak az előállításához.

$2_4[16] = 2·2·2·2$, így $2_4[16] ± 2_6[0–18]$ miatt $2_{10}[0–34]$ előállítható.
$2_5[32] = 2·2·2·2·2$, így $2_5[32] ± 2_5[0–10]$ miatt $2_{10}[22–42]$ előállítható.
$2_6[64] = 2·2·2·2·2·2$, így $2_6[64] ± 2_4[0–6]$ miatt $2_{10}[58–70]$ előállítható.
$2_7[80] ± 2_3[0–3] = 2·2·2 ·(2·2·2 +2) ± 2_3[0–3]$, így $2_{10}[77–83]$ előállítható.
$2_7[96] ± 2_3[0–3] = 2_4[16]·(2+2+2) ± 2_3[0–3]$ miatt $2_{10}[93–99]$ előállítható.

7.1. Eddigi eredmény 2_{10}-ben a [0–42], [58–70], [77–83] és [93–99] intervallumok előállítása; azaz hiányoznak a [43–57], [71–76], [84–92] és [100] értékek.
7.2. Előállítható minden $n = x·y$ alakú érték, ahol $2_6[x]$ és $2_4[y]$, azaz $x = 1, 2, … , 18$ és $y = 1, 2, … , 6$.
7.3. Előállítható minden $n = x·y$ alakú érték, ahol $2_5[x]$ és $2_5[y]$, azaz $x = 1, 2, … , 10$ és $y = 1, 2, … , 10$.

7.2. és 7.3. segítségével elvégezzük a lehetséges felbontásokat (a hiányzó számokat satírozzuk):
43, 44 = 11·4, 45 = 9·5, 46, 47, 48 = 8·6, 49 = 7·7, 50 = 10·5, 51 = 17·3, 52 = 13·4, 53, 54 = 9·6, 55 = 11·5, 56 = 8·7, 57, 71, 72 = 18·4, 73, 74, 75 = 15·5, 76, 84 = 12·7, 85 = 17·5, 86, 87, 88, 89, 90 = 10·9, 91, 92, 100 = 10·10.

A 15 hiányzó eset vizsgálata $2_{10}[\ ]$-ben:
$43 = 4·11 – 1 = 2·2·2_6[11] – (2:2)$
$46 = 2·23 = 2·(2_4[16] + 2_5[7])$
$47 = 48 – 1 = 2_4[16]·(2+2+2):2 – (2:2)$
$53 = 9·6 –1 = (2·2·2 +(2:2))·(2+2+2) – (2:2)$
$57 = 3·19 = (2 + 2:2)(2_4[16] + 2 + 2:2)$
$71 = 8·9 – 1 = 2·2·2·2_5[9] – 2:2$
$73 = 8·9 + 1 = 2·2·2·2_5[9] + 2:2$
$74 = 2_6(64) + 2·2·2 + 2$
$76 = 4·19 = 2·2· (2_4[16] + (2+2+2):2)$
$86 = 8·10 + 6 = 2·2·2 ·(2·2·2 +2) + 2+2+2$
$87 = 3·29 = (2 + 2:2)·(2_5[32] – 2 – 2:2)$
$88 = 8·11 = 2·2·2·(2+2+2+2+2 + 2:2)$
$89 = 88 + 1 = 2·2·2·2_6[11] + (2:2)$
$91 = 16·6 – 5 = 2_4[16]·(2+2+2) – 2·2 – 2:2$
$92 = 16·6 – 4 = 2_4[16]·(2 + 2:2)·2 –2·2$

Sajnos a 87, 89 és 91 előállítása csak 11 darab 2-es segítségével sikerült.

7.4. Eredmény: A négy alapművelet alkalmazásával $2_{10}[0–100]$ előállítható, kivéve a 87, 89 és 91 számokat. ♦

8. A {0, 1, 2, … , 100} halmaz mely elemeit állíthatjuk elő a 3_{10} bázisban?

6.3. miatt $3_4[0–5]$ előállítható. $3_4[\ ]$ további intervallum-előállításai:
$3_4[6,7] = 3+3 + (3:3)$ vagy $+(3–3)$
$3_4[8, 9, 10] = 3·3 ± (3:3)$ vagy $+(3–3)$
Tehát $3_4[0–10]$ előállítható.

$3_5[\ ]$ intervallum-előállításai: $3 ± 3_4[0–10]$ miatt $3_5[0–13]$ előállítható.
Tehát $3_5[0–13]$ előállítható.

Korábbról tudjuk (5.1. eredmény), hogy $3_6[0–13]$ előállítható. $3_6[\ ]$ további előállításai:
$3_6[14, 15, 16] = 3·3 + 3+3 ± (3:3)$ vagy $+(3–3)$;
$3_6[17, 18, 19] = 3·3 + 3·3 ± (3:3)$ vagy $+(3–3)$.
Tehát $3_6[0–19]$ előállítható.

$81 = 3·3·3·3$, így $3_4[81] ± 3_6[0–19]$ miatt [62–100] előállítható,

$54 = 3·3·3 + 3·3·3$, így $3_6[54] \pm 3_4[0–10]$ miatt [44–64] előállítható,
$30 = 3·3·3 + 3$, így $3_4[30] \pm 3_6[0–19]$ miatt [11–49] előállítható.

A halmazok összevonása után:
8.1. Eredmény: A négy alapművelet alkalmazásával $3_{10}[0–100]$ előállítható. ♦

9. A {0, 1, 2, … , 100} halmaz mely elemeit állíthatjuk elő a 4_{10} bázisban?

6.3. miatt $4_4[0–6]$ előállítható. $4_4[\ ]$ további intervallum-előállításai:
$4_4[7, 8, 9] = 4+4 \pm (4:4)$ vagy $+(4–4)$.
Tehát $4_4[0–9]$ előállítható.

$4_5[\ ]$ intervallum-előállításai:
$4 \pm 4_4[0–9]$ miatt $4_5[0–13]$ előállítható. $4_5[14] = 4·4 – (4+4):4$.
Tehát $4_5[0–14]$ előállítható.

$4_6[\ ]$ intervallum-előállításai:
$4 \pm 4_5[0–14]$ miatt $4_6[0–18]$ előállítható.
$4·4 \pm 4_4[0–9]$ miatt $4_6[7–25]$ előállítható.
Tehát $4_6[0–25]$ előállítható.

$4_4[32] = 4·4 + 4·4$, így $4_4[32] \pm 4_6[0–25]$ miatt $4_{10}[7–57]$ előállítható.
$4_4[80] = 4·(4·4 + 4)$, így $4_4[80] \pm 4_6[0–25]$ miatt $4_{10}[55–100]$ előállítható.

A halmazok összevonása után:
9.1. Eredmény: A négy alapművelet alkalmazásával $4_{10}[0–100]$ előállítható. ♦

10. A {0, 1, 2, … , 100} halmaz mely elemeit állíthatjuk elő az 5_{10} bázisban?

6.3. miatt $5_4[0–7]$ előállítható.
$5_4[\ ]$ további előállításai: $5_4[9, 10, 11] = 5 + 5 \pm (5:5)$ vagy $+(5–5)$.
Tehát a 8 kivételével a [0–11] előállítható. Jelölés: **$5_4[0–11/8]$ előállítható.**

$5_5[\ ]$ intervallum-előállításai: $5 \pm 5_4[0–11/8]$ miatt **$5_5[0–16/13]$ előállítható**.

$5_6[\ ]$ intervallum-előállításai: $5 \pm 5_5[0–16/13]$ miatt $5_6[0–21/18]$ előállítható.
$5·5 \pm 5_4[0–11/8]$ miatt $5_6[25–36/33]$ és [14–25/17] előállítható.
Összesítve: **$5_6[0–36/33]$ előállítható.**

$5_7[\ ]$ intervallum-előállításai: $5 \pm 5_6[0–36/33]$ miatt **$5_7[0–41/38]$ előállítható.**

$5·5 \pm 5_6[0–36/33]$ miatt **$5_8[0–61/58]$ előállítható**.

$5·5 \pm 5_8[0–61/58]$ miatt $5_{10}[0–86/83]$ előállítható.
$5·5·5 – 5_7[0–41/38]$ miatt $5_{10}[84–100/87]$ előállítható.
A halmazok egyesítése után: $5_{10}[0–100/83,87]$ előállítható. A két hiányzó szám előállítása:
$83 = 6·14 – 1 = (5 + 5:5)·5_5[14] – (5:5)$.
$87 = 20·4 + 7 = (5·5 – 5)·(5 – 5:5) + 5_4[7]$.

10.1. Eredmény: A négy alapművelet alkalmazásával $5_{10}[0–100]$ előállítható. ♦

11. A {0, 1, 2, … , 100} halmaz mely elemeit állíthatjuk elő a 6_{10} bázisban?

6.3. miatt **6_4[0–8] előállítható.**
$6 \pm 6_4$[0–8] miatt **6_5[0–14] előállítható.**
$6 \pm 6_5$[0–14] miatt **6_6[0–20] előállítható**.
$6 \pm 6_6$[0–20] miatt **6_7[0–26] előállítható**.
$6 \pm 6_7$[0–26] miatt **6_8[0–32] előállítható**.

6_{10}[ ] intervallum-előállításai:
$6·6 + 6+6 \pm 6_6$[0–20] miatt 6_{10}[28–68] előállítható.
$6·(6+6) \pm 6_7$[0–26] miatt 6_{10}[46–98] előállítható.

6_8[0–32] előállíthatósága miatt már csak a 99 és 100 hiányzik. Íme:
$99 = 6_5[9]·6_5[11]$ és $100 = 6_5[10]·6_5[10]$.

11.1. Eredmény: A négy alapművelet alkalmazásával 6_{10}[0–100] előállítható. ♦

12. A {0, 1, 2, … , 100} halmaz mely elemeit állíthatjuk elő a 7_{10} bázisban?

6.3. miatt **7_4[0–9/4] előállítható.**
$7 \pm 7_4$[0–9/4] miatt **7_5[0–16/3,11] előállítható**.
$7 \pm 7_5$[0–16/3,11] miatt a 7_6[0–23/4,10,18] előállítások adódnak. Mivel 5.1-ben már előállítottuk 7_6[0–13]-at, ezért **7_6[0–23/18] előállítható.**
$7 \pm 7_6$[0–23/18] miatt **7_7[0–30/25] előállítható.**
$7 \pm 7_7$[0–30/25] miatt 7_8[0–37/32], sőt $7_8[32] = 7·7 – 7_6[17]$, így **7_8[0–37] előállítható.**

7_{10}[ ] intervallum-előállításai:
$7·7 + 7·7 \pm 7_6$[0–23/18] miatt 7_{10}[75–100/80] előállítható.
$7·7 \pm 7_8$[0–37] miatt 7_{10}[12–86] előállítható.

A halmazok egyesítéséből adódik:
12.1. Eredmény: A négy alapművelet alkalmazásával 7_{10}[0–100] előállítható. ♦

13. A {0, 1, 2, … , 100} halmaz mely elemeit állíthatjuk elő a 8_{10} bázisban?

6.3. miatt 8_4[0–10/4,5] előállítható. 4 = 8 : ((8+8):8); **tehát 8_4[0–10/5] előállítható.**

$8 \pm 8_4$[0–10/5] miatt **8_5[0–18/3,13] előállítható**.
$8 \pm 8_5$[0–18/3,13] miatt 8_6[0–26/5,11,21], 5.1. miatt 8_6[0–13], összesítve **8_6[0–26/21] előállítható**.
$8 \pm 8_6$[0–26/21] miatt **8_7[0–34/29] előállítható**.
$8 \pm 8_7$[0–34/29] miatt **8_8[0–42/37] előállítható**.

8_{10}[ ] intervallum-előállításai:
$8·8 \pm 8_8$[0–42/37] miatt 8_{10}[22–100/27] előállítható.

Ez utóbbi halmazt 8_8[0–42/37]-tel egyesítve adódik, hogy
13.1. Eredmény: A négy alapművelet alkalmazásával 8_{10}[0–100] előállítható.♦

14. A {0, 1, 2, … , 100} halmaz mely elemeit állíthatjuk elő a 9_{10} bázisban?

6.3. miatt **9_4[0–3] és 9_4[7–11] előállítható**.

$9 \pm 9_4$[0–3] és $9 \pm 9_4$[7–11] miatt a [9–12], [16–20], [6–9] és [0–2] intervallumok, 6.4. miatt 9_5[3, 4] is előállítható, így összevonás után **9_5[0–12/5] és 9_5[16–20] előállítható**.

$9 \pm 9_5$[0–12/5] és $9 \pm 9_5$[16–20] miatt a [9–21/14], [25–29], [0–9/4], valamint 5.1. miatt a [0–13] intervallumok, s így **9_6[0–21/14] és 9_6[25–29] is előállítható**.

$9 \pm 9_6$[0–21/14] és $9 \pm 9_6$[25–29] miatt **9_7[0–30/23] és 9_7[34–38] előállítható**.

$9 \pm 9_7$[0–30/23] és $9 \pm 9_7$[34–38] miatt **9_8[0–39/32] és 9_8[43–47] előállítható**.

Ez alapján 9_{10}[ ] intervallum-előállításai:

$9 \cdot 9 \pm 9_8$[0–39/32] miatt [42–100/49] előállítható.

$9+9 \pm 9_8$[0–39/32] miatt [0–57/50] előállítható.

A halmazok összevonása után:

14.1. Eredmény: A négy alapművelet alkalmazásával 9_{10}[0–100] előállítható.♦

15. A {0, 1, 2, … , 100} halmaz mely elemeit állíthatjuk elő a 10_{10} bázisban?

5.1. miatt 10_6[0–13] előállítható.

10_6[14] = 10 + (10+10+10+10):10, 10_6[15,25] = 10+10 ± 10·10:(10+10)

6.3. miatt $10+10 \pm 10_4$[0–3], azaz 10_6[17–23] előállítható.

Összevonva: **10_6[0–25/16,24]** előállítható.

$10 \pm 10_6$[0–25/16,24] miatt **10_7[0–35/26,34] előállítható**.

$10 \pm 10_7$[0–35/26,34] miatt **10_8[0–45/36,44] előállítható**.

10_{10}[ ] intervallum-előállításai:

$10 \cdot 10 - 10_8$[0–45/36,44] miatt [55–100/56,64] előállítható.

$10+10 \pm 10_8$[0–45/36,44] miatt [0–65/56,64] előállítható.

Hiányzik még 56 és 64 előállítása. Ezek:

10_{10}[56] = 10·10:(10+10) ·10_4[11] + (10:10);

10_{10}[64] = 8·8 = (10 – (10+10):10)·(10 – (10+10):10) +0.

15.1. Eredmény: A négy alapművelet alkalmazásával 10_{10}[0–100] előállítható.♦

16. A {0, 1, 2, … , 100} halmaz mely elemeit állíthatjuk elő a 11_{10} bázisban?

Előállítható intervallumok:

6.3. miatt **11_4[0–3, 9–13]**, 6.4. miatt 11_5[0–4, 8–14];

$11 \pm 11_4$[0–3, 9–13] miatt 11_5[11–14, 20–24, 8–11, 0–2]; összevonva **11_5[0–4, 8–14, 20–24]**.

$11 \pm 11_5$[0–4, 8–14, 20–24] miatt 11_6[11–15, 19–25, 31–35, 7–11, 0–3]. Használjuk még fel az 5.1. eredményt (11_6[0–13] előállítása), így összevonás után **11_6[0–15, 19–25, 31–35]** adódik.

$11 \pm 11_6$[0–15, 19–25, 31–35] miatt **11_7[0–26, 30–36, 42–46] előállítható**.

$11 \pm 11_7$[0–26, 30–36, 42–46] miatt **11_8[0–37, 41–47, 53–57] előállítható**.

11_{10}[ ] intervallum-előállításai:

$11 \cdot 11 - 11_8$[0–37, 41–47] miatt 11_{10}[74–80, 84–100] előállítható.

$11+11 \pm 11_8[0–37, 41–47]$ miatt $11_{10}[0–59, 63–69]$ előállítható.

A hiányzó 60, 61, 62; 70, 71, 72, 73 számok előállítása:
$11_7[60, 61] = (11\cdot 11 \pm 11:11) : ((11+11):11)$, így $11_{10}[62] = 11_7[60] + (11+11):11$.
$11_{10}[70,71,72] = 11_7[60] + 11 \pm 11:11$ vagy $+(11–11)$.
$11_{10}[73] = 11_7[61] + 11 + 11:11$.

16.1. Eredmény: A négy alapművelet alkalmazásával $11_{10}[0–100]$ előállítható.♦

17. A {0, 1, 2, … , 100} halmaz mely elemeit állíthatjuk elő a 12_{10} bázisban?

6.3. miatt **$12_4[0–3, 10–14]$ előállítható**, 6.4. miatt $12_5[0–4, 9–15]$ előállítható.

$12 \pm 12_4[0–3, 10–14]$ miatt $12_5[12–15, 22–26, 9–12, 0–2]$ előállítható. Az intervallumokat összevonva adódik, hogy **$12_5[0–4, 9–15, 22–26]$ előállítható**.

$12 \pm 12_5[0–4, 9–15, 22–26]$ miatt $12_6[12–16, 21–27, 34–38]$, valamint 5.1-ből adódóan $12_6[0–13]$, így összevonás után **$12_6[0–16, 21–27, 34–38]$ előállítható**.

$12 \pm 12_6[0–16, 21–27, 34–38]$ miatt **$12_7[0–28, 33–39, 46–50]$ előállítható**.

$12 \pm 12_7[0–28, 33–39, 46–50]$ miatt **$12_8[0–40, 45–51, 58–62]$ előállítható**.

$12_{10}[\ ]$ intervallum-előállításai:

$12\cdot 12 – 12_8[45–51, 58–62]$ miatt $12_{10}[82–86,93–99]$ előállítható.

$12_8[0–40, 45–51] \pm (12+12)$ miatt $12_{10}[0–64, 69–75]$ előállítható.

$12_4[6] = 12: ((12+12):12)$, így $12_5[72] = 12_4[6]\cdot 12$ és $72 + 12_5[0–4, 9–15]$ miatt $12_{10}[72–76, 81–87]$, valamint $72 – 12_5[0–4]$ miatt $12_{10}[68–72]$ előállítható.

A hiányzó számok: 65–67, 77–80, 88–92, 100. Ezek előállítását részek szorzataként készíthetjük el.

65–67 előállítása:
$12_8[66] = 6\cdot 11 = 12:(12:12 + 12:12)\cdot(12 – 12:12)$, így $12_{10}[65,66,67] = 12_8[66] \pm 12:12$ vagy $+0$.

77–79 előállítása: $12_8[78] = 12_3[11]\cdot 12_4[6] + 12$, így $12_{10}[78] = 12_8[78] \pm 12:12$ vagy $+0$.

90–92 előállítása: $12_5[7]\cdot 12_3[13] \pm 12:12$ vagy $+0$.

$80 = 12_4[10]\cdot 12_6[8]$

$88 = 12_3[11]\cdot 12_7[8]$

$89 = 12_3[13]\cdot 12_4[6] + 12–(12:12)$

$100 = 12_5[10]\cdot 12_5[10]$

17.1. Eredmény: A négy alapművelet alkalmazásával $12_{10}[0–100]$ előállítható.♦

Összefoglalás

18. Összeredményül azt kaptuk, hogy a 2_{10}, 3_{10}, … , 12_{10} bázisokban a [0–100] intervallumban „majdnem minden” egész számot előállíthatunk a négy alapművelettel. A kivételek: $2_{10}[87]$, $2_{10}[89]$ és $2_{10}[91]$. Sajnálatos (és „csúnya”) a három kivétel.

A kivételek kezelése: Hogyan tudnánk „megmenteni” a feladatot?

Néhány lehetőség a feladat „megmentésére”:

18.1. Természetesen megtehetjük, hogy csak a 3_{10}, 4_{10}, … , 12_{10} bázisokban mondjuk ki a tételt.

18.2. „Szükség esetén” 11 darab 2-es felhasználását is megengedhetjük. (7.3-ban láttuk, hogy a három kivétel 2_{11}-ben előállítható.) A „szükség esetén” kitétel pl. úgy értendő, hogyha tanítási órán az 1–100 véletlenszámok előállítását játsszuk a tanulókkal éppen 2_{10}-ben, és éppen a három kivétel valamelyike a kisorsolt szám, akkor ennek előállításához a feltételt utólag módosíthatjuk 11 darab 2-esre.

18.3. „Szükség esetén” megengedhetjük a hatványozás műveletét is. Ekkor például:
87 = ((2 + (2:2))^(2+2) + 2_5[6], 89 = ((2 + (2:2))^(2+2) + 2_5[8], 91 = ((2 + (2:2))^(2+2) + 2_5[10].

18.4. Mivel a három kivétel páratlan szám, és a 7.3-beli előállításaik tartalmazzák a (2:2) = 1 tagot, „szükség esetén” megengedhetjük a reciprokképzés műveletét is. Ekkor például:

$$87 = 3\cdot 29 = 6\cdot\frac{29}{2} = 6\cdot\left(14+\frac{1}{2}\right) = (2\cdot 2+2)\left(2\cdot 2\cdot 2+2\cdot 2+2+\frac{1}{2}\right)$$

$$89 = 8\cdot 11+1 = 16\cdot\frac{11}{2}+1 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\left(2\cdot 2+2-\frac{1}{2}\right)+2:2$$

$$91 = 7\cdot 13 = 14\cdot\frac{13}{2} = (2\cdot 2\cdot 2+2\cdot 2+2)\left(2\cdot 2+2+\frac{1}{2}\right)$$

Megjegyzés: A reciprok-képzés „erős műveletnek” tűnik, mert a 87 és a 91 reciprok-előállításához már 9 darab 2-es is elegendő:

$$87 = 6\cdot\left(14+\frac{1}{2}\right) = (2\cdot 2+2)\left(2\cdot 2\cdot 2\cdot 2-2+\frac{1}{2}\right)$$

$$91 = 14\cdot\frac{13}{2} = (2\cdot 2\cdot 2\cdot 2-2)\left(2\cdot 2+2+\frac{1}{2}\right)$$

18.5. Végül játékos köntöst is adhatunk a feladatnak, ha nem minden 2-es előtt követeljük meg a műveleti jel használatát (azaz felhasználhatók például a 22 vagy a 222 számok is).
87 = 22 + 22 + 22 + 22 – (2:2), 89 = 22 + 22 + 22 + 22 + (2:2), 91 = 2·2·22 + 2_6[3].

18.6. Az utolsó előállítás-típus a 87-re és a 89-re is alkalmazható, ha további megszorításként csak *egyszer engedjük meg* a műveleti jel hiányát, azaz a 22 használatát.

19. Alkalmazás a gyakorlatban

A kapott eredmény egzisztencia-típusú; konkrét előállítások esetén nem egyszerű az alkalmazása. (Persze a konstrukció keresésekor már az a tény is nagyon sokat segít, hogy a kérdezett előállításról *tudjuk*, hogy létezik.) Kigyűjtöttük azokat az a_6[] bázisokra vonatkozó intervallum-előállításokat, amelyeket a_{10}[] elemzésekor előállítottunk, ezek ismerete sokat segíthet.

Az előállítható intervallumok:

2_6[0–18] **3_6[0–19]** **4_6[0–25]** **5_6[0–36/33]** **6_6[0–20]**
7_6[0–23/18] **8_6[0–26/21]** **9_6[0–13, 15–21, 25–29]**
10_6[0–15, 17–23, 25] **11_6[0–15, 19–25, 31–35]** **12_6[0–16, 21–27, 34–38]**

A fenti intervallumok nem lezárt, végleges eredmények. Esetenként tovább bővíthetők, hiszen a megoldás során erre már nem volt szükségünk. Egy példa: 21 = 42:2, így

6_6[21] = (6·6 + 6):((6+6):6).