Valószínűségszámítási „gyöngyszemek” a világ minden részéről

1. Egy egyetemi vizsgán a hallgatók *2n* db ($\boldsymbol{n \in \mathbb{N}^+, n \geq 2}$) problémából véletlenszerűen kiválasztva hármat-hármat kapnak. A vizsga egy diák számára akkor eredményes, ha a feladatai közül legalább kettőt sikeresen old meg. Mi a valószínűsége, hogy egy tanuló sikeres vizsgát tesz, ha ő csak az összes probléma felének ismeri a megoldását?

Megoldás:
Jelölje A_i azt az eseményt, amikor a vizsgált tanuló a neki adott 3 problémából i db-ot old meg. $(i = 0, 1, 2, 3)$
Ekkor azon A esemény valószínűségét keressük, melyre

$$A = A_2 + A_3 \text{ és } P(A) = P(A_2) + P(A_3),$$

mivel A_2 és A_3 egymást kizáró események. Másrészt

$$P(A_0) + P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 1$$

Mivel a hallgató a problémák felét ismeri, ezért

$$P(A_0) = P(A_3) = \frac{\binom{n}{3}\binom{n}{0}}{\binom{2n}{3}}$$

és

$$P(A_1) = P(A_2) = \frac{\binom{n}{2}\binom{n}{1}}{\binom{2n}{3}}$$

Így

$$2[P(A_2) + P(A_3)] = 1$$

$$P(A) = P(A_2) + P(A_3) = \frac{1}{2}$$

Tehát a diák $\frac{1}{2}$ valószínűséggel teljesíti sikeresen a vizsgát.

2. Egy pénzérmét sokszor egymás után feldobva mi a valószínűsége annak, hogy előbb dobunk egymás után 5 fejet, mint 2 írást?

Megoldás:
Nevezzünk egy dobássorozatot sikeresnek, ha előbb lép fel benne a *FFFFF* részlet, mint az II.
Ekkor egy sikeres dobássorozat az alábbi típusok közül kerülhet ki:
a) írással kezdődik, amit egy olyan dobássorozat követ, ami fejjel kezdődik,
b) *F*, *FF*, *FFF*, *FFFF* részlettel kezdődik, amit egy olyan sikeres dobássorozat követ, ami írással kezdődik,
c) egyéb részletek nélkül az *FFFFF* sorozat.
Jelöljük P_I és P_F-fel az írással illetve fejjel kezdődő sikeres dobássorozatok valószínűségét!
Ekkor

$$P_I = \frac{1}{2} P_F$$

$$P_F = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right) P_I + \frac{1}{32} = \frac{15}{16} P_I + \frac{1}{32}$$

Az egyenletrendszer megoldásaként $P_F = \frac{1}{17}$ és $P_I = \frac{1}{34}$.
Így a keresett valószínűség: $\frac{3}{34}$.

3. Az $1, 2, \dots, 3k+1$ $(k \in \mathbb{N}^+)$ számokat véletlenszerű sorrendben leírjuk egymás mellé. Mi a valószínűsége annak, hogy a sorozat első tagjától kezdve tetszőleges számú szomszédos számot összeadva sosem kapunk 3-mal osztható összeget?

Megoldás:
Jelöljük a_n-nel az *n*. számot, S_n-nel pedig az első *n* tag összegét! $(n \in \mathbb{N}^+,\ n \leq 3k+1)$
Csoportosítsuk a leírt számokat a hárommal való osztási maradékuk szerint!
a) 1 maradékot adnak az 1, 4, 7, ... , $3k+1$ számok,
b) 0 maradékot adnak a 3, 6, 9, ... , $3k$ számok,
c) –1 maradékot adnak a 2, 5, 8, ... , $3k-1$ számok.
Továbbá, ha $S_i \equiv m_i\ (mod\ 3)$ és $S_{i+1} \equiv m_{i+1}\ (mod\ 3)$ $(m_i,\ m_j \in \mathbb{Z})$, akkor

$$m_{i+1} = m_i,\quad m_{i+1} = m_i + 1 \quad \text{illetve} \quad m_{i+1} = m_i - 1$$

lehetséges aszerint, hogy a_{i+1} 3-mal osztva 0, 1 vagy -1 maradékot ad-e.
Tehát ha a tagok összegének maradéka változik, akkor a változás csak ± 1 lehet.
Mivel a feltétel szerint egyik S_i sem lehet 3-mal osztható, ezért 3 nem osztója S_1-nek sem, ami a_1-nek felel meg, és $S_1 = a_1 \equiv -1\ (mod\ 3)$ sem állhat fenn, mivel $S_{3k+1} \equiv 1\ (mod\ 3)$ miatt S_n változási lehetőségeit figyelembe véve lenne olyan $1 < i < 3k+1$ $(i \in \mathbb{N}^+)$ melyre $S_i \equiv 0\ (mod\ 3)$ teljesülne.
Így $a_1 \equiv 1\ (mod\ 3)$,és annak valószínűsége, hogy ezt a számot helyesen válasszuk ki $\frac{k+1}{3k+1}$.
A további 3*k* szám helyes elrendezésénél S_n hármas osztási maradékának változási lehetőségeit figyelembe véve a további $2k$ db 3-mal nem osztható szám csak 1, 1, -1, $1, -1, \dots,\ 1,\ -1\ (mod\ 3)$ sorrendben követhetik egymást.
A k db 3-mal osztható szám szabadon elhelyezhető a $2. -(3k+1).$ helyekre tetszőlegesen beillesztve a 3-mal nem osztható tagok közé.
Ezt figyelembe véve a keresett valószínűség

$$P = \frac{k+1}{3k+1} \cdot \frac{k! \cdot k!}{(2k)!} = \frac{k!\,(k+1)!}{(3k+1)(2k)!}$$

4. Magic Johnson kosárra dobál. Az első kísérlete sikeres, a második sikertelen. Ezután minden további dobásánál a találat esélye megegyezik az addigi sikeres kísérleteinek relatív gyakoriságával. 100 dobás elvégzése esetén mennyi a valószínűsége annak, hogy Johnsonnak 50 találata lesz?

Megoldás:
Jelölje $P(n, k)$ annak a valószínűségét, hogy Johnson *n* dobásból *k* találatot ér el!
$(n \in \mathbb{N}^+,\ n \geq 2,\ k \in \mathbb{N}^+,\ k \leq n-1)$
Ekkor a kosaras a 3. dobásánál $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ eséllyel talál, illetve hibázik, így

$$P(3, 1) = P(2, 1) \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

és

$$P(3, 2) = P(2, 1) \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

A 4. dobásánál, ha addig 1 illetve 2 találatot ért el, akkor $\frac{1}{3}$ illetve $\frac{2}{3}$ eséllyel talál, így

$$P(4, 1) = P(3, 1) \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P(4,2) = P(3,1) \cdot \frac{1}{3} + P(3,2) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$
$$P(4,3) = P(3,2) \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

A továbbiakban n szerinti teljes indukcióval fogjuk igazolni, hogy

$$P(n,1) = P(n,2) = \cdots = P(n,n-1) = \frac{1}{n-1}$$

Mint korábban beláttuk, $n = 3, 4$ esetén az állítás igaz.
Tegyük fel, hogy az állítás $n = k \geq 3$ ($n, k \in \mathbb{N}^+$) esetén is teljesül, vagyis

$$P(k,1) = P(k,2) = \cdots = P(k,k-1) = \frac{1}{k-1}$$

Ekkor $n = k + 1$ esetén

$$P(k+1,1) = P(k,1) \cdot \frac{k-1}{k} = \frac{1}{k-1} \cdot \frac{k-1}{k} = \frac{1}{k}$$

és $i \in \mathbb{N}^+$, $2 \leq i \leq k$ esetén

$$P(k+1,i) = P(k,i) \cdot \frac{k-i}{k} + P(k,i-1) \cdot \frac{i-1}{k} = \frac{1}{k-1} \cdot \frac{k-i}{k} + \frac{1}{k-1} \cdot \frac{i-1}{k} = \frac{1}{k}$$

Ezzel az állítást beláttuk.
Ez alapján a keresett valószínűség $\frac{1}{99}$.

5. András és Béla feldob 25, illetve 20 szabályos pénzérmét. Mi a valószínűsége annak, hogy azonos számú fejet dobnak?

Megoldás:
Annak a valószínűsége, hogy Béla n db fejet és $20 - n$ db írást dob ($n \in \mathbb{N}, n \leq 20$) pontosan annyi, mint annak az esélye, hogy n db írást és $20 - n$ db fejet dob.
Így a keresett valószínűséget úgy is kiszámíthatjuk, hogy meghatározzuk annak az esélyét, hogy András n, Béla pedig $20 - n$ számú fejet dob.
Ekkor ketten együtt $25 + 20 = 45$ érmével végzik a kísérletet és összesen $n + 20 - n = 20$ fejet dobnak.
A binomiális eloszlásra vonatkozó összefüggés alapján a keresett valószínűség

$$P = \binom{45}{20} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{20} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{25} \approx 0{,}090093$$

6. Egy tréfás kedvű rablóvezér egy jól sikerült akció után elhelyez 4, 8, 16, 32 aranyat egy-egy bekötött zsákocskába, és arra készül, hogy másnap majd véletlenszerűen kiosztja jutalomként négy társának. Amikor ezt a többiek megtudják, nagyon megijednek, mert mindegyikük fél attól, hogy másnap balszerencsés lesz, és csak kevés arany fog jutni neki a zsákmányból. Ezért éjszaka egymás után, egyesével belopóznak a pénzes kamrába, és ott mindnyájan kibontanak két zsákocskát, tartalmukat egyesítik, a pénzt két egyenlő részre osztják, visszahelyezik a zsákocskákba, majd távoznak.
Mi a valószínűsége annak, hogy a 4 rabló éjszakai látogatása után másnap mindegyikük azonos számú aranyat fog kapni a jutalmazásnál?

Megoldás:
Nevezzük kedvezőnek azt az esetet, amikor mind a négy rabló azonos jutalmat kap. Mivel az aranyak összes darabszáma az egyes átrendezések során nem változik meg, ezért a kedvező esetben minden rablónak $(4 + 8 + 16 + 32) \div 4 = 15$ arany jut.
Mivel az aranyak eredeti elosztása esetén

- bármely két tasak aranykészletének összege különböző, és

- bármely két tasak aranykészletének átlaga 15-től különböző,

ezért az egyenlő jutalmazás 4 lépésben csak abban az esetben valósulhatott meg, ha minden átrendezésben két különböző értéket képviselő zsákocska vett részt.

Gondolkodjunk visszafelé, és korábbi megállapításainkat figyelembe véve határozzuk meg, hogy milyen lépéseken keresztül valósulhatott meg az igazságos jutalmazás!

Mivel a 4. rabló átrendezése csak két tasak tartalmát változatta meg, és a pénzmozgatás hatására került ezekbe a zsákocskákba 15-15 arany, ezért az aranyak megoszlása 3 lépés után csak $15,\ 15,\ 15-x,\ 15+x\ \ (x \in \mathbb{N}^+;\ \ x \leq 9)$ lehetett.

Mivel a 3. rabló pénzmozgatásának hatására is keletkezett két azonos értéket képviselő tasak, és $x \in \mathbb{N}^+$ esetén a $15,\ 15-x,\ 15+x$ számok páronként különbözőek, ezért a 3. átrendezési lépés hatására csak a két 15 aranyat tartalmazó zsákocska alakulhatott ki és az aranyak megoszlása a 2. lépés után csak $15-y,\ 15+y,\ 15-x,\ 15+x\ \ (x,y \in \mathbb{N}^+;\ x,y \leq 9)$ lehetett.

Mivel a 2. rabló pénzmozgatásának hatására is keletkezett két azonos értéket képviselő tasak, és $x,y \in \mathbb{N}^+$ esetén $15-x < 15+y$ és $15-y < 15+x$, ezért szükségképpen $15-x = 15-y$, vagy $15+x = 15+y$. Mindkét egyenlőség alapján $x = y$, ami azt jelenti, hogy az aranyak megoszlása a 2. lépés után csak $15-x,\ 15-x,\ 15+x,\ 15+x\ \ (x \in \mathbb{N}^+; x \leq 9)$ lehetett.

Ezt figyelembe véve az első két rabló pénzmozgatása valamilyen sorrend szerint a $15-x$, $15-x$ vagy a $15+x,\ 15+x$ aranyat tartalmazó zsákok kialakulását idézte elő.

Így az aranyak újracsoportosítása az alábbi lépéseken keresztül vezethetett el az igazságos elosztáshoz:

(A) Két $15-x$ aranyat tartalmazó zsákocska létrehozása $(x \in \mathbb{N}^+; x \leq 9)$,

(B) Két $15+x$ aranyat tartalmazó zsákocska létrehozása,

(C) Az egyik $15-x$ és $15+x$ aranyat tartalmazó zsákocska pár pénztartalmának egyesítése,

(D) A másik $15-x$ és $15+x$ aranyat tartalmazó zsákocska pár pénztartalmának egyesítése.

Az (A) és (B) lépések sorrendje felcserélhető, de a (C) és (D) lépések mindenképpen ezek után következnek.

Rátérve a valószínűség megállapítására, mivel bármely két kezdeti tasak aranytartalmának átlaga különbözőzik a másik kettőétől, ezért akár az (A), akár a (B) lépés is az első, ezután mindenképpen egy a,a,b,c arany összetételű mintához fogunk eljutni. (a,b,c páronként különböző pozitív egész számok)

A 2. rablónak viszont mindenképpen a b,c aranyat tartalmazó zsákocskák tartalmát kellett megváltoztatnia.

Így a kedvező lépés végrehajtásának valószínűsége:

$$\frac{1}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{6}$$

A 3. rablónak a két-két $15-x,\ 15+x$ aranyat tartalmazó tasakból kellett egyet-egyet kiválasztania a helyes folytatáshoz.

Ennek valószínűsége:

$$\frac{2 \cdot 2}{\binom{4}{2}} = \frac{2}{3}$$

Végül a 4. rablónak a $15-x,\ 15+x$ aranyat tartalmazó zsákocskák tartalmát kellett egységesítenie.

Ennek esélye:

$$\frac{1}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{6}$$

Mivel az igazságos osztozkodáshoz vezető lépések egymástól függetlenek, ezért az aranyak egyenlő elosztásának valószínűsége:

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{54}$$

7. Bergengóciában háromféle fémpénz van forgalomban. Ezek növekvő értéksorrendben az *alig*, a *bagó* és a *csenevész*. Márton és Nándor a következő játékot játsszák. Márton elővesz egy általa választott érmét, Nándor pedig a másik két fajtából választ egyet-egyet. A három pénzt egyszerre feldobják, és azé lesz mindhárom érme, akinek az írást mutató érméje vagy érméinek összértéke nagyobb. Ha csupa fej jön ki, akkor döntetlen az eredmény, és mindenki megtartja a saját pénzét. (Döntetlen más esetben nem fordulhat elő.) A fiúk észreveszik, hogy a játék Márton bármely érmeválasztása esetén igazságos. Határozzuk meg, hogy hány *alig*ot ér egy *csenevész*.

Megoldás:
Jelöljük az egyes pénzérmék értékét a kis kezdőbetűjükkel! Ekkor a feladat feltétele alapján $0 < a < b < c$ és $a + b \neq c$.
Ha Márton az *alig*ot választja, akkor ő csak abban az esetben nyer, ha írást dob, társa pedig két fejet. Ennek $\frac{1}{8}$ a valószínűsége, és ekkor Márton várható nyereménye $b + c$.
A döntetlen csak a csupa fej dobása esetén alakulhat ki, ennek a valószínűsége szintén $\frac{1}{8}$. Így Nándor nyerési esélye $\frac{6}{8}$, várható nyereménye a.
A játék igazságossága miatt: $\frac{1}{8}(b + c) = \frac{6}{8}a$, azaz: $-6a + b + c = 0$ (1).
Ha Márton a *bagó*t választja, akkor ő csak abban az esetben nyer, ha az ő érméje írást mutat, társa pedig az *alig*gal írást vagy fejet, a *csenevész*szel pedig fejet dob. Ennek $\frac{2}{8}$ a valószínűsége, és ekkor Márton várható nyereménye $a + c$.
A döntetlen most is csak a csupa fej dobása esetén alakulhat ki, ennek a valószínűsége $\frac{1}{8}$. Így Nándor nyerési esélye $\frac{5}{8}$, várható nyereménye b.
A játék most is igazságos, ezért : $\frac{2}{8}(a + c) = \frac{5}{8}b$, azaz: $2a - 5b + 2c = 0$ (2).
Az egyenletrendszert megoldva: $c = 4a$, $b = 2a$.
Ezután még ellenőriznünk kell, hogy Márton *csenevész* választása esetén is igazságos-e a játék.
Ekkor Márton abban az esetben nyer, ha írást dob, társa két dobása a másik két érmével tetszőleges lehet. Ennek $\frac{4}{8}$ a valószínűsége, és ekkor Márton várható nyereménye $a + b = 3a$.
A döntetlen most is csak a csupa fej dobása esetén alakulhat ki, ennek a valószínűsége $\frac{1}{8}$. Így Nándor nyerési esélye $\frac{3}{8}$, várható nyereménye $c = 4a$. Mivel $\frac{4}{8} \cdot 3a = \frac{3}{8} \cdot 4a$, ezért a játék most is igazságos.
Tehát egy *csenevész* 4 *alig*ot ér.

8. Egy részeg ember áll egy szakadék szélétől egy lépésre, azaz ha egy lépést tesz előre, akkor lezuhan, és meghal. Véletlenszerűen lépked, p $(0 \leq p \leq 1)$ valószínűséggel távolodik a szakadéktól, $1 - p$ valószínűséggel pedig közeledik felé. Adjuk meg menekülésének esélyét p függvényében!

Megoldás:

Jelöljük lépésben mérve a részeg embernek a szakadék szélétől való távolságát x-szel! Jelölje továbbá P_n annak a valószínűségét, hogy a vizsgált személy $x = n$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ helyzetből indulva beleesik a szakadékba! Ekkor

$$P_1 = (1-p) + p \cdot P_2$$

P_2-t írjuk fel az alábbiak figyelembe vételével:
A halálba, azaz az $x = 2$ -ből az $x = 0$ -ba vezető utak két részre bonthatók:
– $x = 2$ -ből $x = 1$ -be jut,
– majd $x = 1$-ből $x = 0$ -ba.
Ez utóbbi mozgáshoz tartozó valószínűség éppen P_1. Másrészt az ezt megelőző mozgás valószínűsége is P_1, mivel a két lépéssorozat egymásnak egy lépéssel történő eltoltjának tekinthető. Tehát $P_2 = P_1^2$
Ezt felhasználva:

$$P_1 = 1 - p + pP_1^2$$
$$pP_1^2 - P_1 + 1 - p = 0$$

A másodfokú egyenlet megoldásaként $P_1 = 1$ illetve $P_1 = \frac{1-p}{p}$ adódik.
Ezután vizsgáljuk meg, hogy p értékétől függően melyik lehet P_1 reális értéke!
– $p = 0$ esetén: $P_1 = 1$,
– $p = 1$ esetén: $P_1 = 0$,
– $p = \frac{1}{2}$ esetén: a P_1-re kapott két gyök értéke egyenlő és így $P_1 = 1$,
– $0 < p < \frac{1}{2}$ esetén: a P_1-re kapott második megoldás $P_1 > 1$ miatt lehetetlen, így $P_1 = 1$,
– $\frac{1}{2} < p < 1$ esetén: a P_1-re kapott második megoldás egyértelműen kisebb 1-nél, P_1 folytonossága miatt nem veheti fel a teljes intervallumon az egyes értékeket.
Másrészt ekkor a vizsgált intervallumon

$$0 < \frac{1-p}{p} < \frac{1}{p} - 1 < 1,$$

így P_1 reális értékét a második gyök szolgáltatja.
Eredményeinket összefoglalva a menekülés esélye az alábbiak szerint írható fel:

$$1 - P_1 = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 \le p \le \frac{1}{2} \\ 2 - \frac{1}{p}, & \text{ha } \frac{1}{2} < p \le 1 \end{cases}$$

9. Egy vizsgadolgozatot $3n$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ tanuló ír meg. A dákokat 3 sorba ültetik le, minden sorban azonos számú vizsgázót helyeznek el. A tanulók a dolgozat befejezése után egyesével hagyják el a termet. Jelölje t a dolgozat elkezdése után eltelt időt, $N_1(t)$, $N_2(t)$, $N_3(t)$ pedig ekkor az egyes sorokban tartózkodó tanulók számát! Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy bármely időpontban teljesül az

$$|N_i(t) - N_j(t)| < 2$$

$i \neq j$ $i, j = 1, 2, 3$ feltétel.

Megoldás:
Bármely pillanatban az alábbi 3 helyzet valamelyike valósulhat meg:
S_1: $N_1(t) = N_2(t) = N_3(t)$
S_2: $N_i(t) = N_j(t) = h$, $N_k(t) = h + 1$ $(h \in \mathbb{N}^+,\ h \le n - 1)$, ahol (i, j, k) az $(1, 2, 3)$ valamely permutációját jelöli.

Ekkor a következő lépésben a k. sor egyik diákjának kell elhagynia a termet és eztán az S_1 helyzet fog kialakulni.
S_3: $N_i(t) = h,\ N_j(t) = N_k(t) = h + 1\ \ (h \in \mathbb{N}^+,\ h \leq n - 1)$, ahol $(i,\ j,\ k)$ az $(1,\ 2,\ 3)$ számok valamelyik permutációját jelöli.
Ekkor a következő két lépésben a j. majd a k. vagy a k. majd a j. sor egy-egy diákjának kell elhagynia a termet, és ezután az S_1 helyzet fog kialakulni. A feladat feltétele és megállapításaink alapján:
A teremben a kiindulási helyzet S_1 és bármely 3 diák távozása után ismét az S_1 helyzet áll vissza.
Jelölje P_h annak a valószínűségét, hogy $3h\ (h \in \mathbb{N}^+,\ h \leq n)$ tanuló S_1 típusú elhelyezkedése esetén 3 tanuló távozásával ismét S_1 típusú elrendeződéshez jutunk a teremben maradó $3(h - 1)$ diákkal.
Ekkor

$$P_h = \frac{3h \cdot 2h \cdot h}{3h \cdot (3h - 1) \cdot (3h - 2)} = \frac{3!\, h^3}{3h(3h - 1)(3h - 2)}$$

Mivel a terem 3-3 tanuló egymás utáni távozásával kiürül, ezért

$$P = \prod_{h=1}^{n} P_h = \frac{(3!)^n (n!)^3}{(3n)!}$$

10. Az $(r_i,\ s_i,\ t_i)$ $i = 1, 2, \dots, n$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ számhármasok mindegyike az $(1;\ 2;\ 3)$ számok egy-egy permutációja. Számítsuk ki a $\sum_{i=1}^{n} r_i$, $\sum_{i=1}^{n} s_i$, $\sum_{i=1}^{n} t_i$ összegeket, és jelöljük az értékeiket A, B, C-vel úgy, hogy fennálljon a $A \leq B \leq C$ nagyságrend.
Legyen a_n annak a valószínűsége, hogy $A = B = C$, b_n pedig azé, hogy $B = A + 1$ és $C = B + 1$.
Igazoljuk, hogy bármely $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $4a_n \leq b_n$ vagy $4a_{n+1} \leq b_{n+1}$.

Megoldás:
Legyen $B' = B - A$ és $C' = C - B$.
Ekkor $a_n = P\big((B', C') = (0; 0)\big)$ és $b_n = P\big((B', C') = (1; 1)\big)$.
Vezessük még a $c_n = P\big((B', C') = (2; 2)\big)$ és $d_n = P\big((B', C') = (0; 3)\big)$ jelöléseket!
Rekurzív gondolatmenetet alkalmazva az első n permutációhoz vegyünk hozzá még egyet, és vizsgáljuk a (B', C') értékének alakulását.
A (0; 0) állapot csak az (1; 1) helyzetből állhat elő (ekkor az A, B, C összegű oszlopokba rendre a 3, 2, 1 számok kerülnek be).
Az (1; 1) állapot előállhat:

- a (0; 0) helyzetből (ekkor az A, B, C összegű oszlopokba az 1, 2, 3 számok tetszőleges sorrend szerint kerülhetnek be),
- az (1; 1) helyzetből, (ekkor az A, B, C összegű oszlopokba az 1, 2, 3 számok a 2, 3, 1 sorrend szerint kerülhetnek be),
- és a (2;2) helyzetből. (Ekkor az A, B, C összegű oszlopokba az 1, 2, 3 számok a 3, 2, 1 sorrend szerint kerülhetnek be
- és a (0;3) helyzetből. (Ekkor az A, B, C összegű oszlopokba az 1, 2, 3 számok a 2, 3, 1 vagy 3, 2, 1 sorrend szerint kerülhetnek be.)

Ezek figyelembevételével:

$$a_{n+1} = \frac{1}{6} b_n$$

$$b_{n+1} = a_n + \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{6}c_n + \frac{1}{3}d_n$$

Másrészt a (2; 2) állapot előállhat $\frac{1}{6}$ eséllyel az (1; 1) helyzetből és más korábban nem említett helyzetekből (pl a (3; 3)-ból); ezért

$$c_{n+1} \geq \frac{1}{6}b_n$$

és a (0; 3) állapot előállhat $\frac{1}{3}$ eséllyel az (1; 1) helyzetből és más korábban nem említett helyzetből (pl a (1; 4)-ből), ezért

$$d_{n+1} \geq \frac{1}{3}b_n$$

A felírt összefüggések alapján:

$$c_n \geq \frac{1}{6}b_{n-1} = a_n \quad (n \geq 2)$$

és

$$d_n \geq \frac{1}{3}b_{n-1} = 2a_n$$

Ez utóbbi két becslés alkalmazásával:

$$b_{n+1} \geq a_n + \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}2a_n = \frac{11}{6}a_n + \frac{1}{3}b_n$$

Az utolsó feltétel figyelembe vételével, ha $b_n < 4a_n$, akkor $a_n > \frac{1}{4}b_n$, és így

$$b_{n+1} > \frac{11}{6}\cdot\frac{1}{4}b_n + \frac{1}{3}b_n = \frac{19}{24}b_n = \frac{19}{4}a_{n+1} > 4a_{n+1}$$

Ezzel az állítást beláttuk.

11. Van n db zsinórunk ($n \in \mathbb{N}^+$), és a végeiket véletlenszerűen párosítva összekötözzük. Jelöljük L-lel a kapott hurkok számát és határozzuk meg L várható értékét, $E(L)$-t!

Megoldás:

Jelöljük a keresett mennyiséget n zsinór esetén e_n-nel!

Ekkor $e_1 = 1$.

Alkalmazzunk rekurzív gondolkodást!

Tegyük fel, hogy a problémát $n-1$ zsinórra már megoldottuk ($n \geq 2$), és ismert e_{n-1} értéke.

A korábbi zsinórokhoz még egyet hozzávéve az alábbi két eset valósulhat meg.

a) az utolsó zsinór egyik végét a másik végéhez kötjük hozzá. Ennek valószínűsége $\frac{1}{2n-1}$, és ebben az esetben a hurkok száma eggyel növekszik.

b) vagy az utolsó zsinór egyik végét egy másik zsinór valamelyik végéhez kötjük hozzá $\frac{2n-2}{2n-1}$ valószínűséggel, és ezt az esetet úgy is tekinthetjük, mintha a két madzag egy zsinórrá egyesült volna.

Ezek figyelembevételével az alábbi összefüggés írható fel:

$$e_n = \frac{1}{2n-1}(e_{n-1}+1) + \frac{2n-2}{2n-1}e_{n-1} = \frac{1}{2n-1} + e_{n-1}$$

Ez alapján:

$$e_1 = 1$$

$$e_2 = e_1 + \frac{1}{3}$$

$$e_3 = e_2 + \frac{1}{5}$$

$$\dots$$

$$e_n = e_{n-1} + \frac{1}{2n-1}$$

Az egyenleteket összeadva és a mindkét oldalon szereplő mennyiségeket kivonva:

$$e_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$$

12. Egy részecskét a síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben a $\boldsymbol{K(0;0)}$ ponttól a $\boldsymbol{V(n;n)}$ $(\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^+)$ pontig mozgatjuk.
Haladását egy szabályos pénzérme segítségével irányítjuk, az alábbiak szerint:

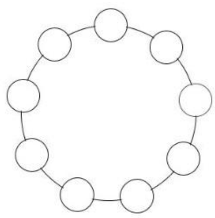
- **A $\boldsymbol{P(x;y)}$, $\boldsymbol{x,y} \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{x,y} < n$ pontból írás dobása esetén a $\boldsymbol{Q(x+1;y)}$, fej dobása esetén pedig az $\boldsymbol{R(x;y+1)}$ pontba lép-**
- **A $\boldsymbol{P(n;y)}$ pontból írás dobása esetén nem mozdul el, fej dobása esetén pedig az $\boldsymbol{R(n;y+1)}$ pontba lép.**
- **A $\boldsymbol{P(x;n)}$ pontból írás dobása esetén a $\boldsymbol{Q(x+1;n)}$ pontba lép, fej dobása esetén pedig nem mozdul el.**

Mi a valószínűsége annak, hogy a részecske pontosan $\boldsymbol{2n+k}$ $(\boldsymbol{k} \in \mathbb{N})$ dobás után érkezik meg a $\boldsymbol{V(n;n)}$ pontba?

Megoldás:
A kedvező esetekben a részecske minden mozgásához rendeljük hozzá azt az útvonalat, amelyet úgy kapnánk meg, ha megengednénk, hogy a részecske akkor is folytassa útját keleti illetve északi irányba, ha első vagy második koordinátája eléri vagy meghaladja *n* értékét.
Ekkor a keresett $P_k$valószínűség egyenlő azon valószínűségekkel, hogy a részecske eljut az $E_1(n+k;n)$, $E_2(n;n+k)$ pontokba anélkül, hogy áthaladna az $(n+k-1;n)$ illetve $(n;n+k-1)$ pontokon. (A kibővített útvonal azért nem érintheti az említett két pontot, mert akkor a megadott algoritmus szerint haladó részecske már a $(2n+k)$. lépés előtt elérné a célmezőt.)
Így $P_k = P_{K,1} + P_{K,2}$, ahol
$P_{K,1}$ annak a valószínűsége, hogy a részecske a $D_1(n+k;n-1)$ ponton áthaladva éri el az $E_1(n+k;n)$ pontot,
$P_{K,2}$ pedig annak az esélye, hogy a részecske a $D_2(n-1;n+k)$ pontot érintve jut el az $E_2(n;n+k)$ pontba.
A $P_{K,1}$ és $P_{K,2}$ valószínűségek mindegyike $\binom{2n+k-1}{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+k}$, így

$$P_k = \binom{2n+k-1}{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+k-1}$$

13. Az alábbi ábra szerinti kilenc kis körbe véletlenszerűen beírjuk az $\boldsymbol{1, 2, \ldots, 9}$ számokat, majd összeadjuk a szomszédos karikákba kerülő számok különbségének abszolút értékét.
Mi a valószínűsége annak, hogy ez az $\boldsymbol{S}$ összeg minimális lesz? (Az egymásba forgatással vagy tükrözéssel átvihető helyzeteket nem tekintjük különbözőnek.)



Megoldás:
A kilenc különböző szám kör alakú permutációinak száma 8!.
Mivel ugyanaz a számsorrend kétféle forgásirány szerint alakulhat ki, ezért az összes esetek száma $\frac{8!}{2} = 20610$.

Tekintsük a nagy körnek azon két ívét, amelyek az 1-es és a 9-es számokat kötik össze.
Tegyük fel, hogy a hosszabbik ívre az egyestől a kilencesig haladva az $x_1, x_2, \dots, x_k$ ($k \in \mathbb{N}^+$, $4 \le k \le 7$) számok kerülnek.
Ekkor

$$|1-x_1| + |x_1-x_2| + \cdots + |x_{k-1}-x_k| + |x_k-9| \ge$$
$$\ge |1-x_1+x_1-x_2+\cdots+x_{k-1}-x_k+x_k-9| = |1-9| = 8$$

Az egyenlőség pedig pontosan akkor áll fenn, ha

$$1 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k < 9$$

Hasonló megállapítást tehetünk a rövidebb íven elhelyezkedő számokra is, így $S_{min} = 2 \cdot 8 = 16$.
Továbbá korábbi elemzésünk alapján az is világos, hogy amennyiben rögzítjük a hosszabbik íven elhelyezkedő $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ számokat, akkor azok kijelölik a rövidebb ívre kerülő számokat is, és S minimális értéke mellett már a karikákba beírandó számok helyzetét is meghatározzák.
Mivel a $\{2,3,4,5,6,7,8\}$ 7 elemű halmaz legalább 4-elemű részhalmazainak száma

$$\binom{7}{4} + \binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7} = \frac{2^7}{2} = 2^6 = 64,$$

ezért annak valószínűsége, hogy a vizsgált összeg minimális:

$$P = \frac{64}{20160} = \frac{1}{315}$$

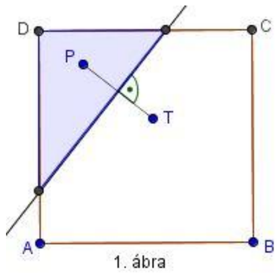
14. Egy kör kerületén véletlenszerűen kijelölünk n pontot. ($n \in \mathbb{N}^+$, $n \ge 3$)Jelölje P_n annak a valószínűségét, hogy a kör központja az n pont konvex burkának belső pontja. Adjuk meg n függvényében P_n-t és számoljuk ki a P_3 és P_4 valószínűségeket!

Megoldás:
Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a kör kerülete egységnyi.
Jelöljük ki a körön véletlenszerűen kijelölt pontokat $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$-nel! Alkalmazzunk ívhossz szerinti paraméterezést!
Jelöljük ki a kör tetszőleges K pontját és pozitív forgásirány szerint minden Q_i ponthoz rendeljük hozzá a $KQ_i = \tau_i$ ív hosszát! ($i = 1, 2, \dots, n$)
Jelölje A_n azt az eseményt, amikor a kör középpontja nincs a $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ pontok konvex burkának belsejében!
Továbbá jelöljük B_i-vel ($i = 1, 2, \dots, n$) azt az eseményt, ha
$0 \le \tau_i < \frac{1}{2}$ esetén a $\left(\tau_i; \tau_i + \frac{1}{2}\right)$,
$\frac{1}{2} \le \tau_i < 1$ esetén a $(\tau_i; 1) U \left[0;\ \tau_i - \frac{1}{2}\right)$-ben nem található véletlenszerűen kijelölt pont.
Ekkor $A_n = B_1 + B_2 + \cdots + B_n$, $P(B_i B_j) = 0$ $(1 \le i < j \le n)$ és bármely $i = 1, \dots, n$ esetén $P(B_i) = \frac{1}{2^{n-1}}$.
Így $P(A_n) = \frac{n}{2^{n-1}}$, $P_n = 1 - P(A_n) = 1 - \frac{n}{2^{n-1}}$
$n = 3, 4$ -re kiszámítva a keresett valószínűségeket $P_3 = \frac{1}{4}, P_4 = \frac{1}{2}$

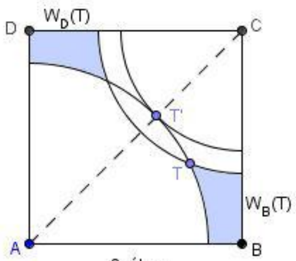
15. Timi és Pali egy játékot játszik az S négyzetben. Először Timi választ egy T pontot S-en, majd Pali jelöl ki egy T-től különböző P pontot. Timi nyitott, Pali pedig becsukott szemmel választja ki a pontját. Ezután kiszínezik S azon részeit, amely Q pontjaira $PQ \le TQ$. Timi akkor nyer, ha a kék tartomány egy háromszög Hol válassza meg Timi a

***T* pont helyét, hogy legnagyobb valószínűséggel nyerjen? Határozzuk meg ekkor nyerésének esélyét!**

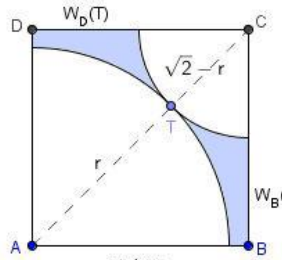
Megoldás:



1. ábra



2. ábra



3. ábra

Jelöljük a négyzet csúcsait *A, B, C, D*-vel, és oldalának hosszát válasszuk 1 egységnek! A *PT* szakasz felezőmerőlegese legyen *l*! Ekkor a kék tartomány az *l* által meghatározott *P*-t tartalmazó félsík *S*-hez tartozó része. (1. ábra)
A kék rész pontosan akkor egy háromszög, ha az *A, B, C, D* pontok közül csak egy van *l*-nek *P*-vel azonos partján. Ez pedig akkor teljesül, ha az *S* négyzet valamelyik átlós csúcspárjának mindkét tagja legalább akkora távolságra van *P*-től, mint *T*-től.
Tekintsük az *A* középpontú *AT* és *C* középpontú *CT* sugarú köröket, amelyeket a továbbiakban $k_A(T)$ és $k_C(T)$-vel jelölünk.
P pontosan akkor van legalább olyan távol *A*-tól és *C*-től mint *T*, ha *P* a körökön vagy azokon kívül helyezkedik el. A négyzethez tartozó, de a $k_A(T)$, $k_B(T)$ körökön kívüli részeket nevezzük nyerő régióknak, hiszen amennyiben *P* itt kerül elhelyezésre, akkor Timi nyer.
A nyerő régiókat aszerint, hogy *B*-hez, vagy *D*-hez vannak közelebb $W_B(T)$, illetve $W_D(T)$-vel jelöljük. (2. ábra)
Mivel a két tartomány az *AC* átlóra szimmetrikus, ezért területük azonos.
Hasonlóképpen definiálhatjuk a *BD* átlóra tükör $W_A(T)$ és $W_C(T)$ nyerő régiókat.
A továbbiakban azt fogjuk igazolni, hogy Timi azzal tudja maximalizálni a nyerő régiók területét, ha *T*-t a négyzet középpontjában helyezi el.
A bizonyítás az átellenes nyerő tartományokra külön fogjuk elvégezni.
Bármilyen olyan *T*-re, ami nem esik az *AC* átlóra, legyen $T' = AC \cap k_A(T)$.
Ekkor $W_B(T) \subset W_B(T')$ és $W_D(T) \subset W_D(T')$. Ez nyilvánvaló, hiszen $k_C(T')$ a $k_C(T)$-n belül helyezkedik el, és így a *T'*-höz tartozó két nyerő régió területösszege nagyobb, mint a *T*-hez tartozóké, hiszen olyan részeteket is tartalmaznak, amelyek a $k_C(T)$ és $k_C(T')$ körök között helyezkednek el.
Tehát ha *T* nincs az *AC* átlón, akkor $W_B(T')$ és $W_D(T')$ összterülete nagyobb, mint $W_B(T)$ és $W_D(T)$-nek. Vagyis ha a *T* ponttal maximalizálni szeretnénk a *B* és *D* csúcsokhoz tartozó nyerő régiók területét, akkor azt az *AC* átlón kell kijelölnünk.
A továbbiakban azt fogjuk belátni, hogy *T* legjobb helye az *AC* átló felezőpontja.
Tegyük fel, hogy *AT*=r $(0 < r < \sqrt{2})$. Ekkor $CT = \sqrt{2} - r$ (3. ábra) és célunk minimalizálni a fehér részek területét.
$\sqrt{2} - 1 \le r \le 1$ esetén a fehér rész két negyedkörből áll. Területe

$$\frac{\pi}{4}\left(r^2 + \left(\sqrt{2} - r\right)^2\right) = \frac{\pi}{2}\left(r^2 - \sqrt{2}r + 1\right) = \frac{\pi}{2}\left(r - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{4}$$

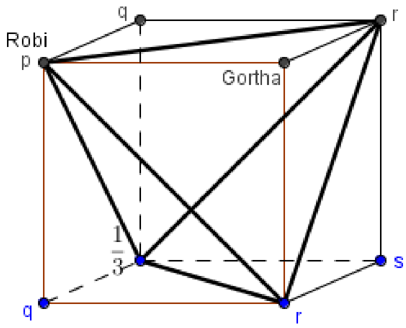
A kapott kifejezés $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$ esetén minimális, és legkisebb értéke $\frac{\pi}{4}$.
Ha *AT* vagy *CT* nagyobb, mint 1 egység, akkor a fehér rész nem két negyed körből áll, de ilyenkor már az egyik rész területe is több $\frac{\pi}{4}$-nél, így ez az eset nem érdekes számunkra.

Tehát a $W_B(T)$, $W_D(T)$ területek összege pontosan akkor lesz maximális, ha T-t a négyzet középpontjában választja ki Timi.
Hasonló gondolatmenetet alkalmazva ugyanez mondható el a $W_A(T)$ és $W_C(T)$ területösszegre is. Mivel a 4 nyerő régió a T pont kivételével diszjunkt egymáshoz (az egyes tartományok az AT, BT, CT, DT átlójú téglalapok részei), ezért arra a következtetésre juthatunk, hogy Timi számára az optimális választás a négyet középpontja. Ekkor nyerésének esélye:

$$P=\frac{t[W_A(T)]+t[W_B(T)]+t[W_C(T)]+t[W_D(T)]}{t_{ABCD}}=\frac{2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)}{1}=2-\frac{\pi}{2}$$

16. Robi, hat barátja és Gortha a szörny egy kocka alakú bolygó csúcsaiban állnak. Robi és Gortha a kocka szomszédos csúcsaiban vannak, és Robi kezében van egy krumpli. A krumpli ezután vándorútra indul,és minden lépésben tulajdonosa továbbdobja azt valamelyik szomszédjának mindaddig, amíg az Gorthához el nem jut. Ő megeszi a krumplit. Mi a valószínűsége annak, hogy Robi az, aki megeteti a szörnyet?

Megoldás:



Vezessük be az alábbi jelöléseket:
– p: annak a valószínűsége, hogy Robi eteti meg a szörnyet,
– q: annak a valószínűsége, hogy Robi eteti meg a szörnyet, ha a krumpli valamelyik Gorthával nem szomszédos barátjától indul,
– r: annak a valószínűsége, hogy Robi eteti meg a szörnyet, ha a krumpli Gortha egyik Robitól különböző szomszédjától indul,
– s: annak a valószínűsége, hogy Robi eteti meg a szörnyet, ha a krumpli Robival átellenes helyzetű barátjától indul.

A Gorthával átellenes helyzetű baráttól indulva $\frac{1}{3}$ valószínűsége, hogy Robi eteti meg a szörnyet, mivel az a 3 pozíció ahonnan a krumplit oda lehet dobni Gorthának az a start helyzettől és a végcéltól is szimmetrikusan helyezkedik el, és ezen pozíciók egyike Robié. (lásd ábra)
Az egyes pozíciók elhelyezkedését figyelembe véve
- ha Robinál van a krumpli, akkor ő $\frac{1}{3}$ valószínűséggel azonnal megeteti Gorthát, és $\frac{2}{3}$ valószínűséggel továbbítja szomszédjának, ezért

$$p=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}q$$

- ha a krumpli Robi egyik olyan szomszédjánál van, aki nem a szörny mellett helyezkedik el, akkor a krumpli $\frac{1}{3}$ valószínűséggel visszakerül Robihoz, $\frac{1}{3}$ eséllyel jut Gortha egy másik szomszédjához, és $\frac{1}{3}$ valószínűséggel kerül a szörnnyel átellenes helyzetben lévő személyhez, ezért

$$q = \frac{1}{3}p + \frac{1}{3}r + \frac{1}{9} \qquad (2)$$

- ha a krumpli Gortha Robitól különböző szomszédjánál van, akkor ő $\frac{1}{3}$ valószínűséggel megeteti a szörnyet (de ez nem tartozik a kedvező esetek közé), $\frac{1}{3}$ eséllyel dobja át egy Robival szomszédos személynek, és $\frac{1}{3}$ valószínűséggel juttatja el a krumplit a Robival átellenes személyhez, ezért

$$r = \frac{1}{3}q + \frac{1}{3}s \qquad (3)$$

- végül, ha a Robival átellenesen elhelyezkedő személynél van a krumpli, akkor ő $\frac{2}{3}$ valószínűséggel dobja azt át Gortha egyik olyan szomszédjának, aki nem Robi mellett helyezkedik el, és $\frac{1}{3}$ eséllyel ahhoz a baráthoz, aki a szörnnyel átellenesen található, ezért

$$s = \frac{2}{3}r + \frac{1}{9} \qquad (4)$$

Az egyenletrendszer megoldása során:
- s értékét a (3)-as egyenletbe helyettesítve

$$r = \frac{3}{7}q + \frac{1}{21} \qquad (5)$$

- r értékét a (2)-es egyenletbe helyettesítve:

$$q = \frac{7}{18}p + \frac{4}{27} \qquad (6)$$

- végül q értékét az (1)-es egyenletbe helyettesítve $p = \frac{7}{12}$ adódik.

Tehát Robi $\frac{7}{12}$ valószínűséggel eteti meg a szörnyet.

17. 27 fehér egységkockából egy nagyobb kockát építünk, majd a teljes külső felületét feketére festjük. Ezután a testet szétszedjük alkotórészeire, majd egy bekötött szemű embert megkérünk arra, hogy állítsa újra össze a nagyobb kockát. Mi a valószínűsége, hogy a felkért személynek sikerül egy teljesen fekete felületű testet felépíteni?

Megoldás:

A szétszedés után a kapott kiskockák négy típusba sorolhatók:
(1) az eredeti 8 csúcskocka 3-3 fekete lappal,
(2) az eredetileg él középpontra illeszkedő 12 kocka 2-2 fekete lappal,
(3) az eredetileg lap középpontra illeszkedő 6 kocka 1-1 fekete lappal, és végül
(4) 1 eredetileg belső kocka, 0 fekete lappal.

Teljesen fekete felületű kocka csak abban az esetben építhető fel, ha minden alkotóelem olyan típusú helyzetbe kerül vissza, mint amilyenben eredetileg is szerepelt.

Az (1)-es típusú kockák:
$3^8 \cdot 8!$ -féleképpen kerülhetnek beépítésre, mivel sorrendjük 8!-féleképpen jelölhető ki, és a 3 fekete lapjuk 3-3 féle helyzet szerint kerülhet kívülre.

A (2)-es típusú kockák:
$2^{12} \cdot 12!$ -féleképpen kerülhetnek beépítésre, mivel sorrendjük 12!-féleképpen jelölhető ki, és a 2 fekete lapjuk 2-2-féle helyzet szerint kerülhet kívülre.

A (3)-as típusú kockák:
$4^6 \cdot 6!$ -féleképpen kerülhetnek beépítésre, mivel sorrendjük 6! -féleképpen jelölhető ki, és a felületre kerülő fekete lapjukkal szomszédos fehér oldalak 4-4-féle helyzet szerint rendeződhetnek.

A (4)-es típusú kocka:
$6 \cdot 4$ -féleképpen kerülhet beépítésre, mivel bármely lapja kerülhet felülre és az így kialakuló oldallapok 4-4-féle helyzet szerint rendezhetők.

Így a kedvező esetek száma:

$$3^8 \cdot 8! \cdot 2^{12} \cdot 12! \cdot 4^6 \cdot 6! \cdot 24$$

Az összes esetek száma pedig $24^{27} \cdot 27!$, mivel a kockák sorrendje 27!-féleképpen jelölhető ki, és a korábban tárgyalt belső kockára alkalmazott gondolat szerint minden kocka 24-féle helyzet szerint rendezhető egy adott helyen.

Így a keresett valószínség:

$$P = \frac{3^8 \cdot 8! \cdot 2^{12} \cdot 12! \cdot 4^6 \cdot 6! \cdot 24}{24^{27} \cdot 27!} \approx 1{,}8 \cdot 10^{-37}$$

Ez pedig azt jelenti, hogy szinte lehetetlen bekötött szemmel újra felépíteni a teljesen fekete kockát.

18. Egy szabályos oktaéder lapjaira felírjuk az $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ számokat úgy, hogy mindegyikre különböző szám kerüljön. Mi a valószínűsége annak, hogy a szomszédos számok és az 1, 8 számpár sem kerülnek egymás melletti lapokra?

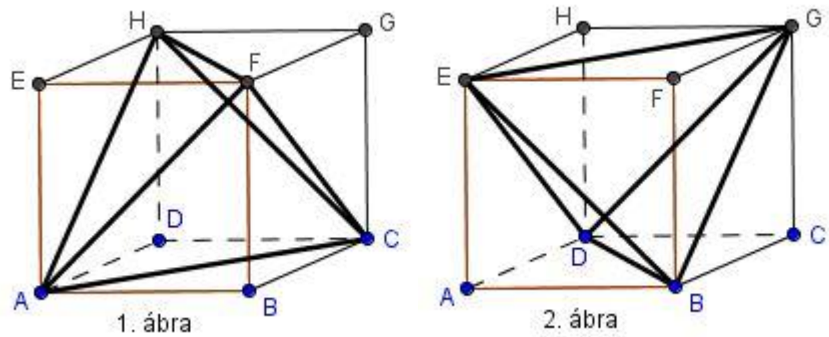
Megoldás:

Tekintsük az oktaéder lapközéppontjai által meghatározott kockát és jelöljük csúcsait az ábra szerint az *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H* pontokkal!

Ekkor az oktaéder lapjaihoz tartozó számokat hozzárendelhetjük a duális kocka csúcsaihoz, és így annak valószínűségét vizsgálhatjuk, hogy mi annak az esélye, hogy a kocka egymás melletti csúcsaiba nem kerülnek szomszédos számok.

Ezen probléma megoldásához meg fogjuk határozni azon körök számát, amelyek a kocka 8 csúcsából állnak, és amelyekben csak lapátlók illetve testátlók kötik össze a kör szomszédos csúcsait. Ezeken a körökön ciklikusan elhelyezve az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 számokat, megkapjuk a kedvező eseteket.

A kockának 12 lapátlója és 4 testátlója van. A lapátlók közül 6-6 két páronként idegen testet határoz meg, ezek az *ACFH* és *BCEG* tetraéderek. (1. és 2. ábra)



1. ábra 2. ábra

A 8 csúcsból álló körnek páros számú testátlót kell tartalmaznia, így az alábbi esetek valósulhatnak meg:

a) a kör az *ACFH* és *BDGE* tetraéderek 3-3 élét, és az azokat összekacsoló két testátlót tartalmazza,

b) vagy a kör váltakozva az *ACFH* és *BDGE* tetraéderek egy-egy kitérő él párjának egy-egy tagját, és az azokat összekapcsoló négy testátlót tartalmazza.

Az a) eset szerint az *ACFH* tetraéder a körhöz tartozó 3 egymáshoz csatlakozó nem kört alkotó éle $\frac{4!}{2} = 12$-féleképpen jelölhető ki. (A csúcsok sorba rendezése meghatározza a 3 egymáshoz csatlakozó élt, és minden lánc kétféle sorrend szerint jelenik meg.)

Ha az *ACFH* tetraéderben kijelöltük a 3 egymáshoz csatlakozó élt, akkor az él rendszer két végpontjából induló testátlók vezetnek át a *BDEG* tetraéderhez és egyben meghatározzák azt

is, hogy ennél a testnél melyik 2 csúcs lesz a 3 egymáshoz illeszkedő élpár két végpontja. A két végpontot összekötő 3 él kétféleképpen adható meg, így az a) eset szerint a körök száma $\frac{4!}{2} \cdot 2 = 24$.
A b) eset szerint az *ACFH* tetraéder körbe kerülő két átellenes él párja 3-féleképpen, míg a *BDEG* tetraédernél már ugyanez csak kétféleképpen jelölhető ki.
(*AC-FH* él párhoz nem választható a *GE-BD* él pár, az *AH-CF* él párhoz nem választható a *GB-ED* él pár, az *AF-CH* él párhoz nem választható a *GD-EB* él pár, mivel ekkor a csúcsokból két 4 pontból álló kör alakulna ki a 8 pontos kör helyett.)
A két tetraéder közötti átvezető testátlók egyértelműek, így a b) eset szerinti körök száma $3 \cdot 2 = 6$.
Így az összes megfelelő körök száma $24 + 6 = 30$.
A csúcsok által alkotott megfelelő körökön az 1-es szám helyzete 8-féleképpen választható ki, a számok pedig 2 forgásirány szerint kerülhetnek növekvő sorrendben a körökbe. Így a kedvező esetek száma $8 \cdot 2 \cdot 30 = 480$.
Mivel a számok $8! = 40320$ -féleképpen rendelhetők a kocka csúcsaihoz, ezért a keresett valószínűség

$$P = \frac{480}{40320} = \frac{1}{84}$$

19. Igazoljuk, hogy az n és m pozitív egész számokra teljesül az alábbi egyenlőség:

$$\mathbf{1} + \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}-\mathbf{1}} + \cdots + \frac{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})\ldots\mathbf{1}}{(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}-\mathbf{1})(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}-\mathbf{2})\ldots\boldsymbol{m}} = \frac{\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{m}}$$

Megoldás:
Helyezzünk el egy dobozban n fehér és m fekete golyót! $(n, m \in \mathbb{N}^+)$
Véletlenszerűen, egyesével vegyük ki a golyókat a dobozból.
Jelölje A_i $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n+1)$ azt az eseményt, amikor az $i.$ húzásra kerül először a kezünkbe fekete golyó.
Ekkor

$$P(A_1) = \frac{m}{m+n}$$
$$P(A_2) = \frac{n}{m+n} \cdot \frac{m}{n+m-1}$$
$$P(A_3) = \frac{n}{m+n} \cdot \frac{n-1}{m+n-1} \cdot \frac{m}{m+n-2}$$
$$P(A_{n+1}) = \frac{n}{m+n} \cdot \frac{n-1}{m+n-1} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{m+1} \cdot \frac{m}{m}$$

Mivel $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_{n+1}$ teljes eseményrendszert alkotnak, ezért

$$1 = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + (A_{n+1}) =$$
$$= \frac{m}{m+n}\left(1 + \frac{n}{n+m-1} + \frac{n(n-1)}{(m+n-1)(m+n-2)} + \cdots \right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)\ldots 1}{(m+n-1)(m+n-2)\ldots m}\right)$$

$\frac{m+n}{m}$-mel beszorozva az egyenlőséget:

$$\frac{m+n}{m} = 1 + \frac{n}{m+n-1} + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots 1}{(m+n-1)(m+n-2)\ldots m}$$

20. Bizonyítsuk be, hogy a $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^+$, $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^+$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{x} \leq \mathbf{1}$ számokra teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$\mathbf{[1-(1-x)^n]^k \geq 1-\left(1-x^k\right)^n}$$

Megoldás:
Azt fogjuk belátni, hogy

$$[1-(1-x)^n]^k + (1-x^k)^n \geq 1$$

Valószínűség-számítási modellt alkalmazunk.

- keressünk két olyan eseményt, amelyek valószínűsége az átalakított egyenlőtlenség első és második tagjának megfelelően írható fel,
- és összegük a biztos eseményt adja.

Tekintsünk egy k sorból és n oszlopból álló táblázatot!
Tegyük fel, hogy minden mezőjébe x valószínűséggel írunk egyest és $(1-x)$ valószínűséggel nullát!
Ekkor annak valószínűsége, hogy

- egy oszlop csupa egyest tartalmaz: x^k
- egy oszlop nem csupa egyest tartalmaz: $1-x^k$
- bármely oszlop nem csupa egyest tartalmaz: $(1-x^k)^n$

Hasonlóképpen annak valószínűsége, hogy

- egy sor csupa nullát tartalmaz: $(1-x)^n$
- egy sor nem csupa nullát tartalmaz: $1-(1-x)^n$
- bármely sor nem csupa nullát tartalmaz: $[1-(1-x)^n]^k$

Legyen A az az esemény, hogy a táblázatban nincs csupa nullát tartalmazó sor, B esemény pedig az, hogy nincs csupa egyesből álló oszlop.
Ekkor az egyenlőtlenség baloldalán szereplő kifejezés $P(A)+P(B)$.
Másrészt a táblázatban nem lehet egyszerre csupa nullából álló sor, és csupa egyesből álló oszlop, mivel a kereszteződésükben álló szám nem lehet egyszerre nulla és egyes is.
Tehát $P\left(\overline{A}\cdot\overline{B}\right)=0$, vagys az A és B események közül az egyik biztosan bekövetkezik, $P(A+B)=1$. Így $P(A)+P(B)=P(A+B)+P(A\cdot B)\geq 1$
Ezzel az állítást igazoltuk.