Feltételes valószínűség a középiskolában

Előzetes megjegyzések:

Az alábbi írás a feltételes valószínűség bevezető tárgyalásának egy lehetséges középiskolai feldolgozása.

A feltételes valószínűség témaköre (az események függetlenségével, összefüggőségével együtt) jelenleg az emelt szintű érettségi vizsga követelményei között szerepel. Az eddigi vizsgák tapasztalatai alapján a sikeres érettségihez elegendő a fogalom ismerete, megértése, vagy legfeljebb egyszerű alkalmazásának a képessége. Ugyanakkor „józan ésszel”, bizonyos technikai ismeretek megszerzése után a témakör nehezebb feladatai középiskolai szinten, nem tagozatos diákok számára is megoldhatókká válnak. (Ilyen eszközök például a szemléltetés (táblázat vagy halmazdiagram), a kombinatorika összeadási és szorzási szabálya, vagy például a folyamatábrák és döntési fák alkalmazása.) Általános tapasztalatunk, hogy a teljes valószínűség tételének vagy a Bayes-tételnek a formalizálása túlságosan elvont és nehéz a diákok számára; ugyanakkor viszont az összetett feladatokat is gyakran eredményesen oldják meg, bár – tudtukon kívül – az említett tételeket alkalmazzák.

Ezt az anyagot tehát (esetleg) az átlagnál erősebb, emelt szintű csoportban, és természetesen szakkörökön, versenyekre való felkészülés során érdemes kipróbálni; elsősorban akkor, ha a valószínűségszámítás hagyományos témaköreinek feldolgozása után maradt még a témakörre fordítható idő, vagy pedig ha a tanulók megszerették a témát.

A cikk anyagát módszertani szempontok szerint állítottuk össze, tehát elsősorban nem feladatgyűjteményt készítettünk. Kapcsolódó feladatanyag bőségesen található a szakirodalomban. A problémák nagy részét a következő forrásokból gyűjtöttük:

[1] Bárd Á. – Frigyesi M. – Lukács J. – Major É. – Székely P. – Vancsó Ö: Készüljünk az érettségire matematikából emelt szinten, Műszaki Könyvkiadó;
[2] Solt György: Valószínűségszámítás, Műszaki Könyvkiadó;
[3] Bognárné – Nemetz – Tusnádi: Ismerkedés a véletlennel, Tankönyvkiadó;
[4] az interneten talált segédanyagok;
[5] a budapesti Fazekas Mihály Gimnázium matematika munkaközössége.

1. Bevezető feladatok

1.1. Kétváltozós szita-formula valószínűségekkel; $\mathbf{P}(A\cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A\cap B)$

1. Két szabályos kockával dobunk.
a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a dobott számok között van 2-es vagy 3-as?
b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy az összeg 2-vel vagy 3-mal osztható?
c) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a szorzat 2-vel vagy 3-mal osztható?

1.2. Összetett feladatok a szorzási szabályra (döntési fa)

1. Ha van háromfajta vetőmagunk, amelyek rendre 0,85; 0,78; 0,4 eséllyel kelnek ki, s ezekből egyet véletlenszerűen választunk ki, akkor mennyi az esélye annak, hogy nem kel ki a mag?

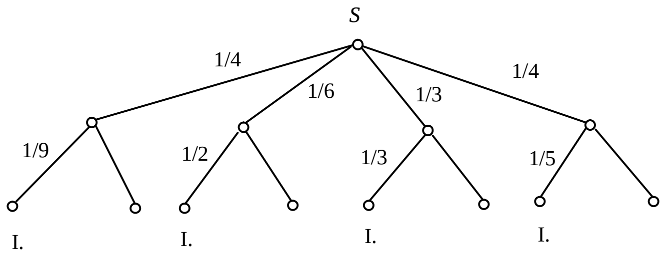
2. András meghívja barátnőjét vacsorára egy budapesti étterembe, este 7 órára. Mivel három úton is megközelítheti autójával az éttermet, egy véletlen kísérlettel dönti el, hogy melyik utat válassza. Feldob egy dobókockát, és ha 1-et kap eredményül, akkor a harmadik utat választja, ha párosat, akkor az elsőt, ha páratlan prímszámot dob, akkor a másodikat.

a) Mekkora az esélye annak, hogy időben odaér a randevúra, ha az egyes utakon rendre 0,2; 0,4; 0,8 eséllyel kerül dugóba?

Az út éppen fél óráig, a dugó (bármelyik) tíz percig tart. Várhatóan mennyit késik András, ha
b) fél 7-kor,
c) 6 óra 25-kor;
d) 6 óra 20-kor indul?

3. Valamely üzletbe négy termelőtől összesen 1800 kg burgonyát vásárolnak fel. A felvásárolt mennyiség negyedrésze az első, hatodrésze a második, harmadrésze a harmadik, a többi a negyediktől származik. Az első termelő burgonyájának kilencedrésze, a másodikénak fele, a harmadikénak a harmada, a negyediknek az ötöde az I. osztályú. A raktárban a burgonyát ömlesztve tárolják.
a) Mennyi az esélye annak, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott burgonya I. osztályú?
b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a véletlenszerűen választott I. osztályú burgonya a harmadik termelőtől származik?
(Megjegyzés: A b) feladat persze később is elővehető, lásd 2.3. 3. feladat.)

Megoldás: Érdemes a döntési fát megrajzolni, majd a konkrét számolás előtt becslést végeztetni a gyerekekkel.



a) **P**(véletlenszerűen kiválasztott burgonya I. osztályú) = $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5} = \frac{49}{180} \approx 0{,}272$.

b) Ebből a $\frac{49}{180}$-ad résznyi I. osztályú burgonyából $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$ rész származik a 3. termelőtől. Ezért

P(a burgonya a 3. termelőtől származik, feltéve, hogy I. osztályú) = $\dfrac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{49}{180}} = \frac{20}{49} \approx 0{,}408$.

1.3. Visszatevés nélküli golyóhúzás-feladatok

1. Egy dobozban 3 kék, 4 sárga és 5 zöld golyó van. Visszatevés nélkül húzunk.
a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy először kék, utána sárga golyót húzunk?
b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a 2. golyó sárga?
c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a 3. golyó sárga?
d) Sejtés és bizonyítás: Mennyi a valószínűsége annak, hogy az *n*. golyó sárga? ($n \le 12$)
e) A 12 golyót kihúzzuk. Melyik húzássorozat a legvalószínűbb?

f) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a 3. golyó sárga, ha korábban húztunk kéket?

Megoldások:
a) $\frac{3}{12}\cdot\frac{4}{11}$.

b) $P(\bar{s}s) + P(ss) = \frac{8}{12} \cdot \frac{4}{11} + \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} = \frac{1}{3}$.

c) $P(\bar{s}\bar{s}s) + P(\bar{s}ss) + P(s\bar{s}s) + P(sss) = \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{4}{10} + \frac{8}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} + \frac{4}{12} \cdot \frac{8}{11} \cdot \frac{3}{10} + \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} \cdot \frac{2}{10} = \frac{1}{3}$.

d) $\frac{4 \cdot 11!}{12!} = \frac{1}{3}$.

f) $P(kzs) + P(kss) + P(zks) + P(sks) + P(kks) =$

$$\frac{3}{12} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} + \frac{3}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} + \frac{5}{12} \cdot \frac{3}{11} \cdot \frac{4}{10} + \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} \cdot \frac{3}{10} + \frac{3}{12} \cdot \frac{2}{11} \cdot \frac{4}{10} = \frac{18}{110} = \frac{9}{55}.$$

Vagy: **P**(3. húzás sárga) – **P**(3. húzás sárga, és nincs korábban kék) =

$$\frac{1}{3} - \left(P(zzs) + P(zss) + P(szs) + P(sss)\right) = \frac{1}{3} - \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{4}{10} + \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} + \frac{4}{12} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{3}{10} + \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} \cdot \frac{2}{10} =$$

$$\frac{1}{3} - \frac{224}{12 \cdot 11 \cdot 10} = \frac{440 - 224}{12 \cdot 11 \cdot 10} = \frac{216}{12 \cdot 11 \cdot 10} = \frac{9}{55}.$$

1.4. Kétváltozós halmazdiagram

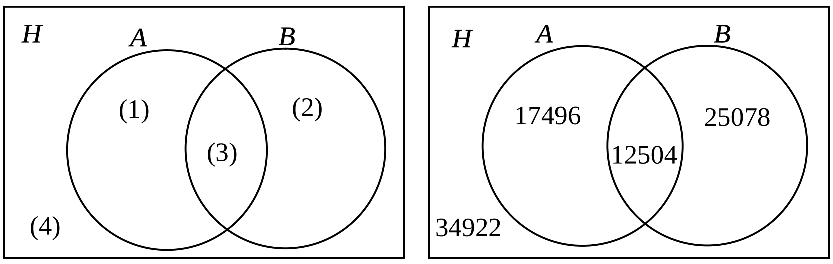
1. Az ötjegyű természetes számok közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Mennyi az esélye annak, hogy a kiválasztott szám

a) osztható 3-mal *vagy* tartalmaz 6-os számjegyet;

b) osztható 3-mal *és* tartalmaz 6-os számjegyet?

Megoldás:

Legyen a H alaphalmaz az ötjegyű természetes számok halmaza, $A = \{3|n\}$, $B = \{\exists\, 6\ n\text{-ben}\}$ (ábra).



Az összefüggések:

i) $|H| = 9 \cdot 10^4 = (1) + (2) + (3) + (4)$

ii) $|A| = 3 \cdot 10^4 = (1) + (3)$

iii) $\left|\bar{B}\right| =$ nincs 6-os $= 8 \cdot 9^4 = (1) + (4)$

iv) 3-mal osztható és nincs 6-os: $(1) = 8 \cdot 9^3 \cdot 3$.

Innen (1) = 17 496, (4) = 34 922, (3) = 12 504, (2) = 25 078.

Eredmény:

a) **P**(n osztható 3-mal *vagy* tartalmaz 6-os számjegyet) = $\frac{(1)+(2)+(3)}{(1)+(2)+(3)+(4)} = \frac{55078}{90000} \approx 0{,}61$,

b) **P**(n osztható 3-mal *és* tartalmaz 6-os számjegyet) = $\frac{(1)}{(1)+(2)+(3)+(4)} = \frac{17496}{90000} \approx 0{,}19$.

1.5. Markov-láncok

2. A feltételes valószínűség definíciójának kimondása előtt

2.1. Egyperces feladatok

Az *A* esemény valószínűsége nem ugyanaz, mint az *A* esemény valószínűsége akkor, ha a *B* bekövetkezett.

A következő példák Paulos: Számvakság (2004, HVG, ford. Pataki János) könyvéből valók.

1. Annak a valószínűsége, hogy a telefonkönyvből véletlenszerűen kiválasztott személy 120 kilónál többet nyom, meglehetősen alacsony. Ha viszont tudjuk valahonnan, hogy az illető testmagassága meghaladja a 185 centit, akkor ennek az eseménynek a valószínűsége lényegesen nagyobb.

2. Ha két szabályos kockát feldobunk, akkor a dupla hatos valószínűsége 1/36. Ha viszont valaki elárulta, hogy a dobott számok összege nagyobb 10-nél, akkor ez a valószínűség (mennyi is?) 1/3.

3. Annak a valószínűsége, hogy egy kártyacsomagból kihúzott lap király, feltéve, hogy figura, (mennyi is?) 1/4.
Megfordítva, annak a valószínűsége, hogy a húzott lap figura, feltéve, hogy király … (mennyi is?) ez bizony 1.

4. Annak a feltételes valószínűsége, hogy valaki amerikai állampolgár, feltéve, hogy beszél angolul, mondjuk, 1/3. Annak viszont, hogy valaki beszél angolul, ha tudjuk, hogy amerikai állampolgár az illető, nagyjából 19/20, azaz 0,95.

2.2. Fiú vagy lány paradoxon

Egy négytagú családról tudjuk, hogy a gyerekek között legalább egy lány van. Mondjuk, ő Anna. Mennyi annak a valószínűsége, hogy Anna testvére fiú?
Válasz: 2/3. (Az életkor szerint rendezve a LL, LF, FL lehetőségek vannak.)

És ha azt is tudjuk, hogy Anna az idősebb?
Válasz: Meglepő módon más eredményt kapunk: 1/2.

2.3. Nehezebb feladatok (visszafelé okoskodással)

1. Az aulában 3 kávéautomatát állítottak fel. Egy nap átlagosan 25 hallgató használja az első gépet, 45 hallgató a második gépet és 30 hallgató iszik kávét a harmadikból. Az első gép átlagosan 8-szor dob ki üres poharat, a második átlagosan 5-ször nem tölti tele a poharat, a harmadik átlagosan 6-szor túladagolja a cukrot. Minden más esetben jól működnek a gépek.
a) Mennyi az esélye annak, hogy sikerül jó kávét innunk?
b) Találomra veszünk egy kávét, ami nem jó. Mennyi az esélye, hogy túl cukros?

Első megoldás:

a) **P**(jó a kávé) = $0{,}25\cdot\frac{17}{25}+0{,}45\cdot\frac{40}{45}+0{,}3\cdot\frac{24}{30}=0{,}81$

b) **P**(3. automata főzte, feltéve, hogy rossz) = $\dfrac{0{,}3\cdot\frac{6}{30}}{0{,}25\cdot\frac{8}{25}+0{,}45\cdot\frac{5}{45}+0{,}3\cdot\frac{6}{30}}=0{,}316$;

vagy a) alapján $\dfrac{0{,}3\cdot\dfrac{6}{30}}{0{,}19}=0{,}316$.

Második megoldás: Ha a valószínűségek helyett a várható gyakoriságok vannak megadva, akkor ezt közvetlenül is használhatjuk, valószínűség nélkül.
a) Átlagosan 8 + 6 + 5 = 19 rossz kávé van. 100 hallgató használja a gépeket, így átlagosan $\dfrac{100-19}{100}=\dfrac{81}{100}$ a jó kávé gyakorisága.
b) Az átlagosan 19 rossz kávéból 6 cukros, az esély a túl cukros kávéra $\dfrac{6}{19}$.

2. Két szabályos dobókockát feldobunk egyszerre.
a) Mennyi az esélye annak, hogy a dobott számok között lesz az 5?
b) És ha tudjuk, hogy a dobott számok összege 8?
Megoldás: a) 11/36; **b)** 2/5.

3. (Burgonya-feladat 1.2.): Mennyi a valószínűsége annak, hogy a véletlenszerűen választott I. osztályú burgonya a harmadik termelőtől származik?
(Megjegyzés: Ez ugye 1.2. 3. feladatának b) része, ha ott a tárgyaláskor kimaradt.)

2.4. Szűrővizsgálat megbízhatósága (visszafelé okoskodás)

Matematika OKTV 2008-2009. II. kategória 2. forduló:
Egy 1 milliárd lakosú országban egy olcsó AIDS teszt bevezetését tervezik. Tudjuk, hogy kb. minden ezredik ember fertőzött. Kiderült, hogy a betegek 99,9%-ánál pozitív, viszont sajnos az egészségesek 0,1%-ánál is pozitív eredményt ad a teszt. Ilyen paraméterek mellett elvetették a használatát. Egy matematikus azt javasolta, hogy végezzék el kétszer egymás után a vizsgálatot és ha mindkettő pozitív, csak akkor küldjék orvoshoz a pácienst. Így már bevezethető lett a teszt. A következő két kérdéssel arra keressük a választ, mi ennek a magyarázata.
a) Számítsuk ki mennyi a valószínűsége, hogy beteg valaki, ha az első teszt pozitív.
b) Számítsuk ki mennyi a valószínűsége, hogy beteg valaki, ha mind a két teszt pozitív. (A két vizsgálat eredménye egymástól független.)

Típusmegoldások **a)**-ra:

I. Konkrét példa, következtetés:
Végezzenek pl. 10^6 tesztet. Kb. 10^3 személy fertőzött, a teszt 999 esetben (joggal) pozitív. A $10^6 - 10^3$ = 999 000 egészséges emberből 999 esetben ismét pozitív a teszt. A 2·999 pozitív eset éppen felében beteg a vizsgált személy, a keresett valószínűség 0,5.

II. Döntési fa:
P(egészséges, negatív teszt) = 0,999·0,999;
P(egészséges, pozitív teszt) = 0,999·0,001;
P(fertőzött, negatív teszt) = 0,001·0,001;
P(fertőzött, pozitív teszt) = 0,001·0,999.
P(beteg valaki, ha az első teszt pozitív) = $\dfrac{0{,}999\cdot 0{,}001}{2\cdot 0{,}001\cdot 0{,}999}=0{,}5$.

3. A feltételes valószínűség definíciójának a kimondása

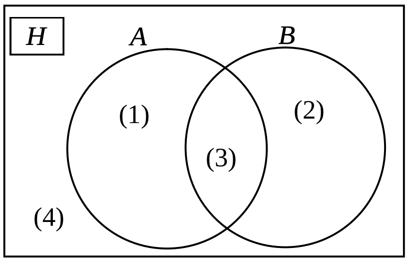
3.1. Megfogalmazások, szemléltetés

1. Az *A* eseménynek a *B* feltétel melletti **P**(*A*|*B*) feltételes valószínűsége szemléletesen az *A* esemény bekövetkezésének a valószínűségét jelenti, feltéve hogy a *B* esemény bekövetkezett.

2. Más megfogalmazások: **P**(*A*|*B*) az *A* esemény *B*-re vonatkozó feltételes valószínűsége; vagy az *A* esemény valószínűsége, ha *B* bekövetkezett

3. Definíció: **P**(*B*) ≠ 0; $P(A\mid B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$. (’*A*, feltéve *B*’)

4. Szemléltetés halmazokkal: $P(A\mid B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{P((3))}{P((2)\cup(3))}=\dfrac{(3)}{(2)+(3)}$.



3.2. Tulajdonságok:

1. Nem szimmetrikus: **P**(*A*|*B*) ≠ **P**(*B*|*A*) általában.

2. $P(A\mid B)+P(\overline{A}\mid B)$ = 1.

3. Korábbi feladatok megoldása definíció alkalmazásával

4. Egy üzemben villanykörtéket gyártanak. Az első gép naponta 200-at, a második 150-et, a harmadik 300-at. A gépek rendre 4%, 2% és 3% selejtet gyártanak. Az égőket a nap végén raktárba viszik. Az éjszakai műszak ellenőrzi az izzókat oly módon, hogy egyet találomra kivesznek. Mennyi az esélye annak, hogy a kiválasztott izzó
a) világít;
b) nem működik, és az első gép gyártotta;
c) nem működik és az első vagy a második gép gyártotta?

3.3. Következmény: események szorzatának (metszetének) a megadása

1. A definícióból két esemény szorzatának a valószínűsége: **P**(*AB*) = **P**(*A*|*B*)·**P**(*B*), (vagy talán szerencsésebb a **P**(*B*)·**P**(*A*|*B*) alak).

Szemléltetés: $P(AB)=\dfrac{(3)}{|H|}$, **P**(*B*)·**P**(*A*|*B*) = $\dfrac{(2)+(3)}{|H|}\cdot\dfrac{(3)}{(2)+(3)}$.

Például: 1.4. (visszatevés nélküli golyóhúzások).

2. Speciálisan: **P**(*A*|*B*)·**P**(*B*) = **P**(*B*|*A*)·**P**(*A*). [*Lásd később Bayes-tétel.*]

3.4. Események szorzata több tényezőre

Több eseményre: $\mathbf{P}(A_1A_2\ldots A_n) = \mathbf{P}(A_n|A_1A_2\ldots A_{n-1})\cdot\mathbf{P}(A_{n-1}|A_1A_2\ldots A_{n-2})\cdot\ldots\cdot\mathbf{P}(A_2|A_1)\cdot\mathbf{P}(A_1)$.
(Megjegyezzük, hogy ennek a tételnek is szorzási szabály a neve.)

Például: 1.4. (visszatevés nélküli golyóhúzások).

4. Speciális feladatok

4.1. Nagyságrend-probléma: Mit állíthatunk $\mathbf{P}(A|B)$ és $\mathbf{P}(A)$ nagyságrendi viszonyáról?

4.2. Megadandók olyan A és B események, amelyekre $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(B|A)$.

4.3. Mit állíthatunk a $\mathbf{P}(B \to A) = \mathbf{P}(A|B)$ egyenlőségről? Azaz igaz-e, hogy **P**(ha B bekövetkezik, akkor A is) = **P**(A, feltéve, hogy B bekövetkezett)?

Megoldás: Nem. Szemléletes például az 1.4. halmazdiagram. $\mathbf{P}(B \to A) = \dfrac{(1)+(3)+(4)}{|H|}$, s ez általában nem egyenlő a $\mathbf{P}(A|B) = \dfrac{(3)}{(2)+(3)}$ hányadossal.
(Megjegyzés: A feltételezett egyenlőségben végrehajtva a műveleteket, $(2)\cdot((1) + (4)) = 0$ adódik, azaz például $B \subseteq A$ elégséges feltétel.)

4.4. Becslés $\mathbf{P}(A|B)$-re
Igazoljuk, hogy ha $P(A) = \frac{4}{5}$ és $P(B) = \frac{9}{10}$, akkor $\frac{7}{9} \le P(A|B) \le \frac{8}{9}$.

4.5. Formális feladatok
Mennyi $\mathbf{P}(A)$ és $\mathbf{P}(B)$, ha $P(A|B) = \frac{7}{10}$, $P(B|A) = \frac{1}{2}$ és $P(A|\overline{B}) = \frac{1}{5}$?

5. Alkalmazás, gyakorlás (feltételes valószínűség)

5.1. Gyakorló feladatok

5.2. Paradoxonok

1. (Bertrand-féle doboz-paradoxon 1889): Három egyforma dobozban 2-2 golyó van. Az egyik dobozban mindkét golyó piros, egy másikban mindkettő kék, míg a harmadikban az egyik piros és a másik kék. Találomra kiválasztunk egy dobozt. Mi annak a valószínűsége, hogy ebben a dobozban két egyforma golyó van?

Az alábbi megoldások közül nyilván legfeljebb csak az egyik megoldás lehet jó. Hol a hiba?
Első okoskodás: Három egyforma valószínűségű lehetőség van: piros - piros, piros - kék, kék - kék. Ebből kettő kedvező, a keresett valószínűség 2/3.
Második okoskodás: Ha kiveszünk egy golyót, a színétől függetlenül két lehetőség van: vagy ugyanolyan golyó maradt a dobozban, vagy ellenkező színű. Az egyik eset a kedvező, a keresett valószínűség 1/2.

2. Az előző feladatot a következő alakban is kitűzhetjük:
Három urnában rendre piros - piros, piros - kék és kék - kék golyó van. Kiválasztunk egy urnát, ebből találomra egy piros golyót húzunk. Mire tippeljünk, milyen színű a másik golyó?

3. Egy másik alkalmazás (*Paulos, 78. oldal*): Három kártyalap van ön előtt. Egyiküknek mindkét oldala fekete, a másiknak mindkét oldala piros, a harmadiknak pedig az egyik oldala fekete, a másik piros. A játékvezető bedobja a kártyákat egy kalapba, majd ön húz. A kihúzott lapnak viszont csak az egyik oldalát nézheti meg; ez mondjuk piros. A játékvezető elmagyarázza, hogy a kihúzott kártya eszerint nem a dupla fekete, tehát vagy a dupla piros, vagy pedig a fekete-piros. Ő maga arra tippel, hogy ön a dupla pirosat húzta és fogadást ajánl. Korrekt-e az ajánlata?
Megoldás: Nem, 2/3 eséllyel a játékvezető nyer. Lehet például a nyereségre 10 dollár, illetve 15 dollár az ajánlata.

4. Kagyló (kártya) paradoxon

6. A teljes valószínűség tétele

6.1. A definíció kimondása előtt

A definíció kimondása előtt érdemes konkrét feladatokkal szemléltetni a tételt. Sőt alkalmanként egyszerűbb a feladatok józan megoldása, mint a formalizált. (Korábban már kimondatlanul mi is többször alkalmaztuk a tételt.)

1. Egy egyetemi vizsgán az *A*-szakos hallgatók 60%-a, a *B*-szakos hallgatók 80%-a szerepel sikeresen. Az *A*-szakos hallgatók az évfolyam 15%-át teszik ki. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy találomra kiválasztott hallgató sikeresen vizsgázik?
Megoldás: 0,15·0,6 + 0,85·0,8 = 0,77.

2. Egy céllövöldében három rekeszben vannak puskák. Az első rekeszben három puska van, ezekkel 0,5 a találat valószínűsége. A második rekeszben egy puska található, ezzel 0,7 valószínűségű a találat. A harmadik rekesz két puskájával 0,8 valószínűséggel találunk célba. Mennyi a találat valószínűsége, ha valaki találomra választ ki egy puskát?
Megoldás: $\frac{3}{6}\cdot 0{,}5+\frac{1}{6}\cdot 0{,}7+\frac{2}{6}\cdot 0{,}8 \approx 0{,}63.$

3. Izzólámpákat 100 darabos csomagolásban szállítanak. Az előző megfigyelésekből ismert, hogy a tételek között azonos arányban fordul elő 0, 1, 2, 3, 4 hibás darabot tartalmazó. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy tételből véletlenszerűen 3 égőt kiválasztva, mindhárom hibátlan lesz?

Első megoldás (hivatalos): P = $\frac{1}{5}\cdot 1+\frac{1}{5}\cdot\frac{\binom{99}{3}}{\binom{100}{3}}+\frac{1}{5}\cdot\frac{\binom{98}{3}}{\binom{100}{3}}+\frac{1}{5}\cdot\frac{\binom{97}{3}}{\binom{100}{3}}+\frac{1}{5}\cdot\frac{\binom{96}{3}}{\binom{100}{3}} \approx 0{,}94.$

Ami ugyanaz, mintha figyelembe vennénk a húzások sorrendjét:
Második megoldás: P= $\frac{1}{5}\cdot 1+\frac{1}{5}\cdot\frac{99}{100}\cdot\frac{98}{99}\cdot\frac{97}{98}+\frac{1}{5}\cdot\frac{98}{100}\cdot\frac{97}{99}\cdot\frac{96}{98}+\frac{1}{5}\cdot\frac{97}{100}\cdot\frac{96}{99}\cdot\frac{95}{98}+\frac{1}{5}\cdot\frac{96}{100}\cdot\frac{95}{99}\cdot\frac{94}{98}.$

6.2. A definíció kimondása

1. A gyakorlások után kimondható a formális tétel: Ha a B_1, B_2, … B_n események teljes eseményrendszert alkotnak (azaz mindig pontosan egy következik be közülük), és $\mathbf{P}(B_i) \neq 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), akkor tetszőleges A eseményre
$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B_1)\cdot \mathrm{P}(A|B_1) + \mathbf{P}(B_2)\cdot\mathbf{P}(A|B_2) + \ldots + \mathbf{P}(B_n)\cdot\mathbf{P}(A|B_n)$.

2. A korábbi feladatok formálisan is ellenőrizhetők.
Például 6.1. 1-ben:
Legyen a vizsgált esemény (sikeres vizsga) A; C_1 jelentse, hogy A-szakos, C_2 pedig hogy B-szakos hallgatót választottunk ki. Ekkor $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(C_1)\cdot\mathrm{P}(A|C_1) + \mathbf{P}(C_2)\cdot\mathbf{P}(A|C_2) = 0{,}15\cdot 0{,}6 + 0{,}85\cdot 0{,}8 = 0{,}77$.

7. Bayes-tétel

7.1. A definíció kimondása előtt

Itt is igaz, hogy meglehetősen absztrakt a definíció. Ha a gyakorlati feladatmegoldás jól megy, lehet, hogy nem is érdemes erőltetni a képlet felírását.

1. Két város közötti távíróösszeköttetés olyan, hogy a leadott távírójelek közül a pontok 2/5-e vonallá torzul, a vonalak 1/3-a pedig ponttá. A leadott jelek közül a pontok és a vonalak aránya 5:3. Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy ha a vevőoldalon pontot kapnak, akkor az adó pontot továbbított!

Megoldás:

$\mathbf{P}$(vevőoldalon pontot kapnak) = $\mathbf{P}$(pont → pont) + $\mathbf{P}$(vonal → pont) = $\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{5}+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$.

$\mathbf{P}$(adó pontot továbbított | vevőoldalon pontot kapnak) = $\dfrac{\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}$.

7.2. A tétel kimondása

1. A gyakorlások után kimondható a formális tétel: Ha a B_1, B_2, … B_n események teljes eseményrendszert alkotnak, és $\mathbf{P}(B_i) \neq 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), továbbá A tetszőleges esemény, amelyre $\mathbf{P}(A) \neq 0$, akkor $P(B_i \mid A) = \dfrac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{P(B_1)P(A \mid B_1) + P(B_2)P(A \mid B_2) + \ldots + P(B_n)P(A \mid B_n)}$.

2. A képlet elemzése:
A nevezőben $\mathbf{P}(A)$ szerepel (teljes valószínűség). Átalakítás után $\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B_i|A) = \mathbf{P}(B_i)\mathbf{P}(A|B_i)$, azaz mindkét oldal $\mathbf{P}(AB_i)$. (*Lásd 3.3. megjegyzése.*)

3. A távíró-feladat formalizálása:
A: a vevőoldalon pontot kapnak; B_1: pontot továbbít az adó; B_2: vonalat küld. $P(B_1) = 5/8$ és $P(B_2) = 3/8$; $\mathbf{P}(A|B_1) = 3/5$ és $\mathbf{P}(A|B_2) = 1/3$. A Bayes-tétellel: $P(B_1 \mid A) = \dfrac{P(B_1)P(A \mid B_1)}{P(B_1)P(A \mid B_1) + P(B_2)P(A \mid B_2)}$.

4. A korábbi feladattípusok formalizálása (pl. szűrővizsgálat)

7.3. Gyakorlás

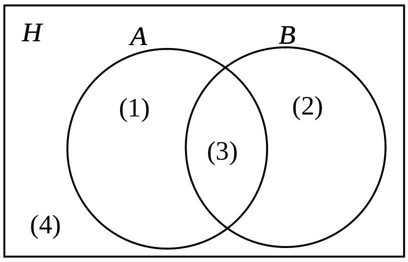
8. Események függetlensége

8.1. A definíció kimondása előtt

1. Mikor érdemes az A és B véletlen eseményeket (valószínűségszámítási szempontból) *függetlennek* tekinteni? Természetes módon, lehetőleg a tanulóktól adódnak a következő válaszok.

i) $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A)$. (Azaz ha a feltételes valószínűség ugyanaz, mint a feltétel nélküli valószínűség.)
ii) $P(A \mid B) = P(A \mid \overline{B})$ [ami = $P(A)$]. (Azaz: akár bekövetkezik B, akár nem, ugyanaz legyen A valószínűsége.)

2. A szemléltetés a hagyományos módon történhet:

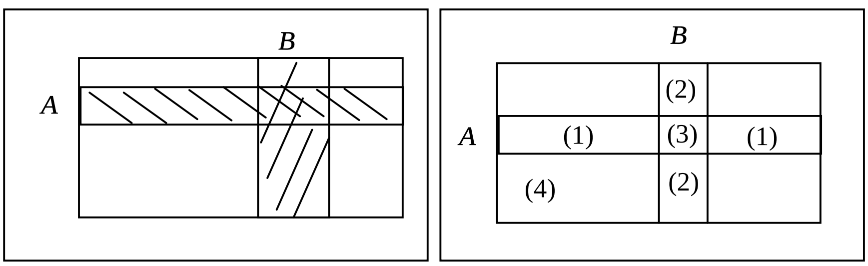


i) szerint $\dfrac{(3)}{(2)+(3)} = \dfrac{(1)+(3)}{(1)+(2)+(3)+(4)}$,

ii) szerint $\dfrac{(3)}{(2)+(3)} = \dfrac{(1)}{(1)+(4)}$.

A két megfogalmazás ugyanaz: ha $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = l$, akkor $\dfrac{a+c}{b+d} = l$ szintén teljesül. (Ez utóbbi észrevételre két példa más területekről:
– a párhuzamos szelők tétele;
– a szinusz-tétel: ha $\dfrac{a}{\sin a} = \dfrac{b}{\sin b} = \dfrac{c}{\sin g} = 2R$, akkor például $\dfrac{a+b}{\sin a + \sin b} = 2R$ szintén.)

3. A függetlenség tehát egyfajta arányos reprezentációt jelent (egyenletes eloszlás esetén).
Egy másik szemléltetés a megfelelő téglalapok területét használja fel.



Itt a $P(A \mid B) = P(A \mid \overline{B}) = P(A)$ teljesül; a téglalapok területei arányosak az oldalaikkal.

8.2. A definíció kimondása

1. A $P(A \mid B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$, $P(B) \neq 0$ definícióból $P(A \mid B) = P(A)$ felhasználásával $\mathbf{P}(A)\cdot\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(AB)$ adódik. A több lehetőség közül ezt az alakot választjuk a függetlenség definíciójának: *A* és *B* véletlen események függetlenek, ha $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\cdot\mathbf{P}(B)$.

2. „A függetlenség fenti matematikai definíciója igen jó összhangban van azzal, amit általában a függetlenségről gondolunk." (A mindennapok során, de a matematika más területein is.) Egyszerű példa a kombinatorika *szorzási szabálya*: ekkor az *A* eseménytől függetlenül következik be *B*. Konkrétan:
– *A*-ból *B*-be, *B*-ből *C*-be, illetve *A*-ból *C*-be vezető utak száma (alapfeladat);
– kétjegyű természetes számok száma (első és második számjegy választása);
– két kockával történt dobás lehetséges eredményei.

8.3. Tulajdonságok (a definíció elemzése):

1.
i) A $\mathbf{P}(B) \neq 0$ megkötésre nincs szükség a függetlenségi definícióban.
ii) A reláció szimmetrikus: ha *A* független *B*-től, akkor *B* is független *A*-tól.
iii) Más-mást jelentenek a kizáró (diszjunkt), illetve független események.

iv) Ha *A* és *B* független, akkor mit állíthatunk *A* és $\overline{B}$, $\overline{A}$ és *B*, valamint $\overline{A}$ és $\overline{B}$ kapcsolatáról?

v) A függetlenségi reláció vajon tranzitív?
Azaz: Ha *A* és *B*, valamint *B* és *C* függetlenek, akkor *A* és *C* is azok?

2. Statisztikai megközelítés:

Feladat: Vajon független tulajdonságnak tekinthető-e az alábbi minta alapján a szem és a hajszín? Válaszát indokolja!

A szem színe / A haj színe	Kék	Nem kék	Összesen
Szőke	32	53	85
Barna	13	41	54
Fekete	9	52	61
Összesen	54	146	200

Feladat: Egészítse ki az alábbi táblázatot úgy, hogy az adatok alapján a tejivás és a veseproblémák függetlenségére következtethessen!

	Rendszeresen tejet iszik	Ritkán vagy egyáltalán nem iszik tejet	Összesen
Semmilyen vese-panasza nincs	46		
Volt vagy van veseproblémája		46	
Összesen			200

Megoldás: A rendszeres tejivók (*T*) és veseproblémások (*V*) számát jelölje *x*, ekkor azok száma, akik nem isznak tejet és vesepanaszuk sincs, $\left|\overline{T \cup V}\right| = 108 - x$. Az így kapott adatokkal kitöltött táblázat az alábbi:

	Rendszeresen tejet iszik	Ritkán vagy egyáltalán nem iszik tejet	Összesen
Semmilyen vese-panasza nincs	46	$108 - x$	$154 - x$
Volt vagy van veseproblémája	x	46	$46 + x$
Összesen	$46 + x$	$154 - x$	200

A függetlenség fennállásához bármelyik 8.1-beli összefüggést, illetve a 8.2-ben kimondott definíciót felhasználhatjuk. Tehát:

– $\mathbf{P}(T|V) = \mathbf{P}(T)$ fennállásához teljesülnie kell, hogy $\frac{x}{46+x} = \frac{46+x}{200}$;

– $P(T\,|\,V) = P(T\,|\,\overline{V})$ fennállásához teljesülnie kell, hogy $\frac{x}{46+x} = \frac{46}{154-x}$;

– $\mathbf{P}(TV) = \mathbf{P}(T)\mathbf{P}(V)$ fennállásához teljesülnie kell, hogy $\frac{x}{200} = \frac{46+x}{200} \cdot \frac{46+x}{200}$.

Bármelyik alakot választjuk, az $x^2 - 108x + 2116 = 0$ egyenlet közelítő egész megoldásai $x_1 \approx 82$ vagy $x_2 \approx 26$. (Mivel statisztikai jellegű feladatról van szó, „kis eltérés” még megengedett.)

Megjegyzés: Mit értünk „kis eltérés” alatt?

3. Ha a valószínűségi változók nem egyenletes eloszlásúak, akkor a függetlenség fogalma kevésbé szemléletes.

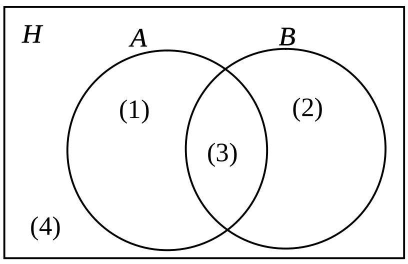
Feladat:

a) Kockadobás során legyen az A esemény az, hogy a dobott szám „kicsi” (1, 2 vagy 3), a B esemény pedig az, hogy a dobott szám páros. Független-e a két esemény, ha a kockák szabályosak?
Megoldás: $\mathbf{P}(A) = 1/2$, $\mathbf{P}(B) = 1/2$, $\mathbf{P}(AB) = 1/6$; $\mathbf{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B) = 1/4$. A két esemény nem független.
b) Most a dobások kimenetelei nem egyformán valószínűek. Az eloszlás:

dobás	1	2	3	4	5	6
súlyozás	1/12	1/2	1/12	1/8	1/12	1/8

Független-e a két esemény, ha a kockák szabályosak?
Megoldás: $\mathbf{P}(A) = 2/3$, $\mathbf{P}(B) = 3/4$, $\mathbf{P}(AB) = 1/2$; $\mathbf{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B) = 1/2$. A két esemény tehát független.

4. A *iv)* tulajdonság (komplementerek függetlensége) természetesnek tűnik, a hagyományos halmazdiagram jól szemléltet:



Ha A és B függetlenek, akkor $\frac{(3)}{(2)+(3)} = \frac{(1)+(3)}{(1)+(2)+(3)+(4)} = \frac{(1)}{(1)+(4)}$, s ez utóbbi éppen A és $\overline{B}$ függetlenségét jelenti (amit 8.1-ben természetesnek vettünk, lehetőleg a tanulók javaslatára).

Formális igazolás a következő lehet (érdemes egy ilyet is megnézni):
Ha A és B független, akkor elegendő a négyből egyetlen reláció, például A és $\overline{B}$ függetlenségének az igazolása.
Tudjuk, hogy $P(A) = P(AB) + P(A\overline{B})$, innen $P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB)$.
Mivel tehát $P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)\big(1 - P(B)\big) = P(A)P(\overline{B})$, készen vagyunk: $P(A\overline{B}) = P(A)P(\overline{B})$ éppen a két esemény függetlenséget jelenti.

8.4. Gyakorlás

Függetlenek-e az események?
Adjuk meg valamely változót úgy, hogy az események (ne) függetlenek legyenek!

8.5. A fogalommal kapcsolatos problémák

1. feladat:
A $H = \{1, 2, \dots, n\}$ ($n \in \mathbf{Z}^+$) alaphalmaz elemei közül véletlenszerűen választunk. Legyen az A esemény, hogy a kiválasztott szám páros, B pedig az, hogy a kiválasztott szám 5-tel osztható.
a) Független-e a két esemény, ha $n = 6$? (kockadobás)
b) Független-e a két esemény, ha $n = 10$?
c) Független-e a két esemény, ha $n = 11$?
d) Általánosítás

Megoldás:
a) $\mathbf{P}(A) = 1/2$, $\mathbf{P}(B) = 1/6$, $\mathbf{P}(AB) = 0$; $\mathbf{P}(A)\cdot\mathbf{P}(B) = 1/12$. A és B nem függetlenek, ugyanakkor kizáró események. (Lásd *iii)* tulajdonság. Kizáró események is lehetnek függetlenek, ha az egyik üres vagy 0 valószínűségű esemény.)
b) $\mathbf{P}(A) = 1/2$, $\mathbf{P}(B) = 2/10$, $\mathbf{P}(AB) = 1/10$; $\mathbf{P}(A)\cdot\mathbf{P}(B) = 1/10$. A és B tehát független események. Hát persze: a páros számok aránya a 10 szám között ugyanannyi, mint az 5-tel oszthatók között.
c) $\mathbf{P}(A) = 5/11$, $\mathbf{P}(B) = 2/11$, $\mathbf{P}(AB) = 1/11$; $\mathbf{P}(A)\cdot\mathbf{P}(B) = 10/121$. A és B nem függetlenek.

2. feladat:
Egy családban egyforma valószínűséggel születik fiú (F) vagy lány (L). Két eseményt vizsgálunk.
A: A családban van fiú és lány is.
B: A családban legfeljebb egy lány van.
Független-e az A és a B esemény, ha a családban
a) 3 gyerek van;
b) 4 gyerek van?

Megoldás:
a) $\mathbf{P}(A) = 1 - \mathbf{P}$(három lány van) $- \mathbf{P}$(három fiú van) $= 1 - 2/8 = 3/4$. $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}$(három fiú van) + $\mathbf{P}$(két fiú, egy lány van) $= 1/8 + 3\cdot 1/8 = 1/2$. $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}$(két fiú, egy lány van) $= 3\cdot 1/8 = 3/8$. Mivel $\mathbf{P}(A)\cdot\mathbf{P}(B) = 3/8 = \mathbf{P}(AB)$, a két esemény független.

b) $\mathbf{P}(A) = 1 - \mathbf{P}$(négy lány van) $- \mathbf{P}$(négy fiú van) $= 1 - 2/16 = 7/8$. $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}$(négy fiú van) + $\mathbf{P}$(három fiú, egy lány van) $= 1/16 + 4\cdot 1/16 = 5/16$. $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}$(három fiú, egy lány van) $= 4\cdot 1/16 = 1/4$. Mivel $\mathbf{P}(A)\cdot\mathbf{P}(B) = 35/128 \neq \mathbf{P}(AB)$, a két esemény nem független.

Tehát az *A* és *B* esemény függetlensége csak a gyerekek számának ismeretében dönthető el.

8.6. 2-nél több esemény függetlensége

1. feladat:
A $H = \{1, 2, \dots, n\}$ ($n \in \mathbf{Z}^+$) alaphalmaz elemei közül véletlenszerűen választunk. Legyen az *A* esemény, hogy a kiválasztott szám páros, a *B* esemény, hogy a kiválasztott szám 5-tel osztható, a *C* esemény pedig az, hogy a kiválasztott szám 3-mal osztható.
a) Mutassuk meg, hogy ha $n = 12$, akkor az *A* és *B*, valamint az *A* és *C* események függetlenek!
b) Teljesül ekkor *B* és *C* függetlensége is?
c) Keressünk további hasonló *n* értékeket!

Megoldás:
a) $\mathbf{P}(A) = 1/2$, $\mathbf{P}(B) = 1/6$, $\mathbf{P}(AB) = 1/12$; $\mathbf{P}(A)\cdot\mathbf{P}(B) = 1/12$. Azaz *A* és *B* független események.
$\mathbf{P}(C) = 1/3$, $\mathbf{P}(AC) = 1/6$; $\mathbf{P}(A)\cdot\mathbf{P}(C) = 1/6$. Vagyis *A* és *C* is független események.
b) $\mathbf{P}(BC) = 0$, $\mathbf{P}(BC) \neq \mathbf{P}(B)\cdot\mathbf{P}(C)$, így *B* és *C* nem függetlenek.

A függetlenség tehát nem tranzitív reláció.

c) Például $n = 24$ választással $\mathbf{P}(A) = 12/24$, $\mathbf{P}(B) = 4/24$, $\mathbf{P}(C) = 8/24$; $\mathbf{P}(AB) = 2/24$, $\mathbf{P}(AC) = 4/24$, $\mathbf{P}(BC) = 1/24$. Ekkor $\mathbf{P}(A)\cdot\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(AB)$ és $\mathbf{P}(A)\cdot\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}(AC)$, de $\mathbf{P}(B)\cdot\mathbf{P}(C) = 1/18 \neq \mathbf{P}(BC) = 1/24$.

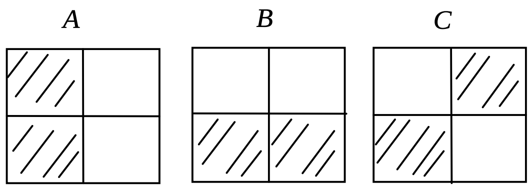
2. feladat: Dobjunk fel két érmét. Legyen *A* az az esemény, hogy az első dobás fej; legyen *B* az az esemény, hogy a második dobás fej; míg *C* jelentse azt az eseményt, amikor a két dobás közül az egyik (de csak az egyik) fej. Mutassuk meg, hogy *A* és *B*, *B* és *C*, valamint *A* és *C* függetlenek!

Megoldás:
A és *B* függetlensége nyilvánvaló. $\mathbf{P}(A) = 1/2$, $\mathbf{P}(B) = 1/2$, $\mathbf{P}(C) = 2\cdot 1/4 = 1/2$. $\mathbf{P}(AB) = 1/4 = \mathbf{P}(A)\cdot\mathbf{P}(B)$; $\mathbf{P}(AC) = 1/4 = \mathbf{P}(A)\cdot\mathbf{P}(C)$ és $\mathbf{P}(BC) = 1/4 = \mathbf{P}(B)\cdot\mathbf{P}(C)$.
Az *A*, *B* és *C* események tehát páronként függetlenek.

3. A függetlenség paradoxona (S. N. Bernstein)
Az előző példával kapcsolatban észrevehetjük, hogy bármelyik esemény (első dobás fej; második fej; pontosan az egyik fej) éppen akkor következik be, ha a másik két esemény közül pontosan az egyik valósul meg. Azaz bármely két esemény meghatározza a harmadikat – vagyis az események páronkénti függetlensége nem jelenti azt, hogy az események összességükben is függetlenek. Ehhez az ún. *teljes függetlenséghez* többet kell feltételezni.

4. Természetes gondolat (elvárható tulajdonság) három változó esetén a függetlenség fogalmának alábbi kiterjesztése:
Az *A*, *B*, *C* események teljesen függetlenek, ha $\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}(ABC)$.
Ez így önmagában még nem elég (lásd 6. és 7. feladat)

5. A páronkénti függetlenség és a teljes függetlenség különbözőségét jól szemlélteti a következő ábra.



Ezen azt láthatjuk, hogy három 1/2 valószínű esemény (A, B, C) páronként független:
$\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(C) = 1/4$, és $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(BC) = \mathbf{P}(AC) = 1/4$ szintén.
Ugyanakkor a teljes függetlenség nem teljesül: $\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C) = 1/8$, míg $\mathbf{P}(ABC) = 1/4$. (A bal alsó sarok.)

És persze általánosan is megfogalmazhatjuk a definíciót.
6. Definíció: Események valamilyen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ halmazát akkor nevezzük *teljesen függetlennek*, ha akárhogyan választunk is ki közülük $k \le n$ eseményt, például $A_1, A_2, \ldots, A_k$-t, ezekre mindig teljesül a $\mathbf{P}(A_1A_2\ldots A_k) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2)\ldots\mathbf{P}(A_k)$ egyenlőség. (Azaz az együttes bekövetkezésük valószínűsége egyenlő a külön-külön vett valószínűségeik szorzatával.)

A következő feladat Kovács Ármin 11.B osztályos tanulótól származik.

7. feladat: Dobjunk fel három érmét. Legyen A az az esemény, hogy az első dobás fej; legyen B az az esemény, hogy a harmadik dobás írás; míg C jelentse azt az eseményt, amikor a két dobás közül legalább 2 fej. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}(ABC)$! Vajon a három esemény teljesen független?

Megoldás:
$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = 1/2$ és $\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}(2 \text{ fej}) + \mathbf{P}(3 \text{ fej}) = 3/8 + 1/8 = 1/2$. $\mathbf{P}(ABC) = \mathbf{P}(\text{FFI}) = 1/8$, tehát $\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}(ABC)$. Ugyanakkor $\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(AB) = 1/4$, de $\mathbf{P}(BC) = \mathbf{P}(\text{FFI}) = 1/8$, tehát $\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C) \ne \mathbf{P}(BC)$. A három esemény nem teljesen független.

Válogatott témák (vázlat – kiegészítő anyagként mellékelve)

V1. Markov-láncok

A témakörről részletes anyag található a Fazekas honlapján, a *Tanítási anyagok* között.

V2. Szűrővizsgálatok megbízhatósága (általánosítás a T tulajdonság szűrővizsgálatára)

(*Paulos, 80. oldal*) Tegyük fel, hogy egy teszt 98%-os biztonsággal mutatja ki a rákos megbetegedést, tehát a rákos betegek 98%-nál pozitív eredményt ad, azoknál pedig, akiknek nincs ilyen betegségük, a teszt az esetek 98%-ban negatív. (Mj: a két értéknek nem kell megegyeznie.) Tegyük még fel, hogy a lakosság 0,5 százaléka szenved valamilyen daganatos betegségben. Ha ön részt vett egy ilyen szűrésen, és a háziorvosa komoran közli, hogy az eredmény pozitív, akkor mennyi oka van a kétségbeesésre? […]

Megoldás (következtetéssel): Tegyük fel, hogy 10 000 esetet szűrtek. Nagyjából 50 valódi betegre számíthatunk, és a teszt 49 esetet ki is mutat. A 9950 egészséges vizsgálati alany 2%-nak, tehát további 199 embernek szintén pozitív a lelete. A 199 + 49 = 248 pozitív tesztből 199 eset vaklárma. Annak a feltételes valószínűsége, hogy ön valóban beteg, feltéve, hogy a tesztje pozitív, 49/248, nagyjából 20%.

Megjegyzés 1: A gyakorlatban számos teszt jóval kevésbé megbízható.

Megjegyzés 2: A hazugságvizsgálatok közismerten megbízhatatlanok és a fentihez hasonló számolásból kiderül, miért akad fenn a hazugságvizsgáló gépen jóval több igazmondó, mint ahány hazugot a berendezéssel sikerül leleplezni. (*Lásd később*.)

Általában:

Legyen a T tulajdonság egy p valószínű esemény;

a pozitív megerősítés valószínűsége q; a negatív megerősítés valószínűsége pedig r.

(Tehát annak valószínűsége, hogy egy teszt a T tulajdonságot – helyesen – kimutatja, q; annak a valószínűsége pedig, hogy ha valaki nem T tulajdonságú, s a teszt ezt – szintén helyesen – kimutatja, legyen r.)

Az alapkérdés: mi annak a valószínűsége, hogy ha a teszt pozitív eredményt mutatott, akkor a vizsgált személy valóban T tulajdonságú?

Következtetéssel:

Ha N esetet vizsgálnak:

– pN személy T tulajdonságú; a teszt qpN esetet kimutat, $(1 - q)pN$ esetet – hibásan – nem.

– $(1 - p)N$ személy $\overline{T}$ tulajdonságú; $r(1 - p)N$ számú teszt kimutatja $\overline{T}$ -t, $(1 - r)(1 - p)N$ hibásan T-t jelez.

$$\mathbf{P}(\text{A páciens } T \text{ tulajdonságú, feltéve, hogy a teszt pozitív}) = \frac{qpN}{qpN+(1-r)(1-p)N} = \frac{qp}{qp+(1-r)(1-p)}.$$

Egy másik konkrét példa:

p = 1% beteg; q = 95% pozitív megerősítés; r = 98% negatív megerősítés.

10 000 eset:

– 100 beteg;

– teszt 95 beteget kimutat, 5 beteget nem.

– 9900 egészséges;

– a teszt 9702 egészségest kimutat, 198-at tévesen betegnek jelez.

Összes pozitív teszt: 95 + 198 = 293.

$$\mathbf{P}(\text{A páciens } T \text{ tulajdonságú, feltéve, hogy a teszt pozitív}) = \frac{95}{293} \approx 32\%.$$

V3. Speciális szűrés: bűnügyi hazugságvizsgálat

A klasszikus időkben a poligráfok (J.A. Larson, 1921) megbízhatatlanok voltak, jelenleg (állítólag) nagyon jó hatásfokkal alkalmazzák őket. A szakirodalmi adatok: *„A valós életben folyó vizsgálatok pontosságának elemzésekor a tetteseknél 95 százalékos, az ártatlan gyanúsítottak esetében 96 százalékos találati pontosságot regisztráltak.*" Megjegyzendő, hogy a gépet ellenzők – a másik véglet – mindössze 61 százalékos eredményességről számolnak be.

A 95% igen jó arány, ennek az az oka, hogy a hazugságvizsgáló készülék felépítését és a kérdezés technikáját egyre finomítják. Például:

a) A részvétel önkéntes a vizsgálaton.

b) A kérdéssort előre megbeszélik. Vizsgálat közben már nincs lehetőség értelmezni a kérdéseket, és így persze mindkét fél ugyanazt érti is mindegyik kérdésen.

c) Előre megbeszélik a semleges kérdések után következő éles kérdéseket is. („*Ilyen például a „hazudott-e valaha?", illetve a „lopott-e életében valaha pénzt?". A legtöbb emberrel már* *előfordult, hogy hazudott, illetve elcsent – akár gyerekkorában – valamennyi pénzt, így a mért paraméterek itt várhatóan változni fognak.*”)

d) A vizsgálat hosszú (így nehezebb manipulálni a gépet).

e) Megváltozott a poligráf felhasználási célja, másra alkalmazzák a gépet, mint a kezdeti időkben. Manapság elsősorban arra használják, hogy valakit a gyanú alól felmentsenek, azaz a lehetséges gyanúsítottak körét szűkítsék.

(Korábban súlyosbító körülmény volt, ha a gyanúsított megbukott a teszten, de ennek a „megbuktatásnak” megvolt a technikája – ami miatt a gép gyakorlatilag használhatatlanná vált. Például egy szexuális bűnügyben gyanúsítottól megkérdezték, hogy szereti-e a strandon nézegetni a csinos hölgyeket. Ha „igen”-nel válaszolt (mint egyébként manapság a megkérdezett férfiak 80%-a), akkor máris terhelő vallomást tett saját maga ellen; ha „nem”-et mondott, akkor a gép hazugságot jelzett, s így a vizsgálaton nem ment át a személy.)

Feladat: Becsüljük meg a maximálisnak tartott valószínűségekkel, hogy mekkora annak a P esélye, hogy valaki bűnös, ha a poligráf-vizsgálaton megbukott.

A korábbi jelöléseket alkalmazzuk. A T tulajdonság legyen a gyanúsított bűnössége, ekkor a pozitív és negatív megerősítés valószínűségei $q = 0{,}95$ és $r = 0{,}96$. A bűnügyi nyomozások során „komolyabb” gyanúsítottként (indíték, lehetőség, alibi stb.) csak kb. 5-10 ember jöhet szóba, a nyomozás elején viszont akár 10-20 ember is a rendőrség látókörébe kerülhet. Ha a felmerülő személyek kizárása céljából, a nyomozás korai szakaszában alkalmazzák a hazugságvizsgálatot, akkor tehát $p = 0{,}05 – 0{,}1$ körüli értékkel számolhatunk. (Feltételezve, hogy a kihallgatott személyek egyformán valószínű elkövetők, és az igazi bűnös közöttük van.)

Az alábbi Excel-táblázat részletek a megbukott személy bűnösségének a valószínűségét tartalmazzák. A $p = 0{,}05$ és $p = 0{,}1$ valószínűségekhez tartozó, 1-től 0,9-ig csökkenő q és r esetén számítottuk ki a megfelelő P értékeket.

p = 0,05	*q* =									
r =	0,99	0,98	0,97	0,96	0,95	0,94	0,93	0,92	0,91	0,9
0,99	0,84	0,84	0,84	0,83	0,83	0,83	0,83	0,83	0,83	0,83
0,98	0,72	0,72	0,72	0,72	0,71	0,71	0,71	0,71	0,71	0,70
0,97	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63	0,62	0,62	0,62	0,61	0,61
0,96	0,57	0,56	0,56	0,56	0,56	0,55	0,55	0,55	0,54	0,54
0,95	0,51	0,51	0,51	0,50	0,50	0,50	0,49	0,49	0,49	0,49
0,94	0,46	0,46	0,46	0,46	0,45	0,45	0,45	0,45	0,44	0,44
0,93	0,43	0,42	0,42	0,42	0,42	0,41	0,41	0,41	0,41	0,40
0,92	0,39	0,39	0,39	0,39	0,38	0,38	0,38	0,38	0,37	0,37
0,91	0,37	0,36	0,36	0,36	0,36	0,35	0,35	0,35	0,35	0,34
0,9	0,34	0,34	0,34	0,34	0,33	0,33	0,33	0,33	0,32	0,32

p = 0,1	*q* =									
r =	0,99	0,98	0,97	0,96	0,95	0,94	0,93	0,92	0,91	0,9
0,99	0,92	0,92	0,92	0,91	0,91	0,91	0,91	0,91	0,91	0,91
0,98	0,85	0,84	0,84	0,84	0,84	0,84	0,84	0,84	0,83	0,83
0,97	0,79	0,78	0,78	0,78	0,78	0,78	0,78	0,77	0,77	0,77
0,96	0,73	0,73	0,73	0,73	0,73	0,72	0,72	0,72	0,72	0,71
0,95	0,69	0,69	0,68	0,68	0,68	0,68	0,67	0,67	0,67	0,67
0,94	0,65	0,64	0,64	0,64	0,64	0,64	0,63	0,63	0,63	0,63
0,93	0,61	0,61	0,61	0,60	0,60	0,60	0,60	0,59	0,59	0,59
0,92	0,58	0,58	0,57	0,57	0,57	0,57	0,56	0,56	0,56	0,56
0,91	0,55	0,55	0,54	0,54	0,54	0,54	0,53	0,53	0,53	0,53
0,9	0,52	0,52	0,52	0,52	0,51	0,51	0,51	0,51	0,50	0,50

A 20 személyhez tartozó, p = 0,05 valószínűséggel számított P = 56%-os eredmény, őszintén szólva, elég kiábrándító. A p = 0,1-hez tartozó P = 73% már jobb; de ha egy kicsit lazítunk a poligráf 95-96%-os megbízhatóságán, és pl. a józanabbnak tűnő 90-90%-os értéket vizsgáljuk, az így kapott P = 50% sokat mond. (Ez ugyanis azt jelenti, hogy a hazugságvizsgálaton megbukott személy ***egyenlő valószínűséggel*** bűnös vagy nem bűnös.)

A p = 0,04 (25 személy esetén) az az arány, amelynél már értelmetlen a fenti kérdésfeltevés, ekkor ugyanis a maximális q = 0,95 és r = 0,96 értékekkel is P = 50%.

p = 0,04	q =				
r =	0,99	0,98	0,97	0,96	0,95
0,99	0,80	0,80	0,80	0,80	0,80
0,98	0,67	0,67	0,67	0,67	0,66
0,97	0,58	0,58	0,57	0,57	0,57
0,96	0,51	0,51	0,50	0,50	0,50

Nos, a hazugságvizsgálat a bűnösség megállapítására nem nagyon használható. Miért alkalmaznak mégis évente egymillió vizsgálatot a bűnügyek során? (A magán- és a közszférában (pl. FBI) évente elvégzett vizsgálatok száma ennél nagyságrenddel nagyobb.)

Határozzuk meg annak a Q valószínűségét, hogy a vizsgált személy ártatlan, ha átment a hazugságvizsgálaton!

Ekkor $Q = \dfrac{r(1-p)}{r(1-p)+(1-q)p}$, az alábbi táblázatban néhány Q értéket sorolunk fel.

p =	0,05	0,1	0,2	0,5		0,05	0,1	0,2	0,5		0,05	0,1	0,2	0,5
q =	0,95	0,95	0,95	0,95		0,90	0,90	0,90	0,90		0,6	0,6	0,6	0,6
r =	0,96	0,96	0,96	0,96		0,90	0,90	0,90	0,90		0,6	0,6	0,6	0,6
Q =	0,997	0,994	0,987	0,95		0,994	0,988	0,973	0,900		0,966	0,931	0,857	0,600

A táblázatban megkapóan nagyok az „ártatlanság” valószínűségei. Valóban; úgy tűnik, hogy a poligráf jól használható – ha arra használják, amire való.

Végezetül két szépirodalmi megjegyzés:

Richard Matheson: Legenda vagyok c. művében – illetve a regényből készült filmben – kétszer végeztetnek el egy szűrővizsgálatot, másodszor már helyes eredménnyel.

Spiró György: Fogság c. regényében pedig egy érdekes részlet olvasható az istenítélet lélektanáról.

V4. Vércsoport-problémák

Az alábbi táblázatot régebben a bíróságokon használták, az apasági keresetek tárgyalásakor.

Ha az anya vércsoportja	A gyermek vércsoportja	Akkor az apa lehet	Az apa nem lehet
0	0	0, A vagy B	AB (Európában a népesség 3%-a)
0	A	A vagy AB	0 vagy B (55%)
0	B	B vagy AB	0 vagy A (88%)
A	0	0, A vagy B	AB (3%)
A	A	bármelyik	
A	B	B vagy AB	0 vagy A (88%)
A	AB	B vagy AB	0 vagy A (88%)
B	0	0, A vagy B	AB (3%)
B	B	bármelyik	

B	A	A vagy AB	0 vagy B (55%)
B	AB	A vagy AB	0 vagy B (55%)
AB	AB	A, B vagy AB	0 (46%)

A vércsoport-témakörben több érdekes – és nehéz – kérdés tehetők fel. Például: milyen valószínűséggel lesz egy A és egy B vércsoportú szülőnek A-s gyereke? Vagy: határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy az apa A vércsoportú, feltéve, hogy az anya 0-s és a gyermek A-s.

V5. Visszatevés nélküli golyóhúzások

V6. Árveréses játékok

Ezekben a játékokban már a várható érték fogalma is megjelenik. [3]-ban több ilyen játék is található, egy változat lehet például az alábbi.

Egy dobozba 3 piros és 2 kék golyót helyezünk. Egyet kihúzunk úgy, hogy nem nézzük meg és nem tesszük vissza. Az Első játékos akkor nyer, ha a másodikra kihúzott golyó piros lesz; míg második akkor, ha kék.

a) Hogyan osztozzon Első és Második a közösen beadott téten?
b) Függ-e a valószínűbb esemény kiválasztása az első húzás eredményétől?
c) Ha előre adott a tétek elosztási aránya, akkor érdemes-e megnéznie Elsőnek az elsőre kihúzott golyót?
d) Milyen osztozkodási arány esetén érdemes Elsőnek megnéznie az elsőre kihúzott golyót, ha ezért előre fizet összeget?

V7. Szociológiai táblák

Két típusfeladat található 8.3-ban.

V8. Egy érdekes jogi probléma

(Paulos, 51. oldal)

„Los Angelesben történt 1964-ben. Egy lófarkas szőke nő kizsebelt egy járókelőt. A tolvaj gyalog menekült és látták, amint beszáll egy sárga kocsiba, amelyet egy fekete férfi vezetett, akinek bajusza és szakálla volt. Nyomozás közben a rendőrség látóterébe került egy szőke lófarkas nő, aki kapcsolatban állt egy bajuszt és szakállt viselő fekete férfival, ennek pedig sárga autója volt. A páros bűnösségére nem volt közvetlen bizonyíték.

Az ügyész a következőképpen érvelt: egy ilyen páros létezésének, mint mondta, olyan alacsony a valószínűsége, hogy a nyomozásnak mindenképpen a valódi elkövetőket kellett fölfednie. Az egyes tulajdonságokhoz a következő valószínűségeket rendelte: sárga autó – 1/10, bajuszos férfi – 1/4, lófarkas nő – 1/10, fekete férfi szakállal – 1/10, eltérő bőrszínű páros – 1/1000. Az ügyész a továbbiakban azt állította, hogy ezek a jellegzetességek függetlenek, így pedig annak a valószínűsége, hogy valamennyi ráillik egy véletlenszerűen kiválasztott párra, $\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{1000}=\frac{1}{4000000}$, ez az esély pedig oly elenyésző, hogy a páros feltétlenül bűnös. A bíróság el is ítélte őket.

Az eset továbbkerült a Kaliforniai Legfelsőbb Bírósághoz, amelyik megváltoztatta a döntést, mégpedig a következő valószínűségi érvelés alapján. Egy Los Angeles méretű városban, ahol legalább 2 000 000 pár él, mondta a védelem képviselője, egyáltalán nem olyan kicsiny annak az esélye, hogy több olyan pár is van, amely a megadott tulajdonságok mindegyikével rendelkezik, feltéve – így az érvelés –, hogy egyáltalán létezik ilyen páros. A binomiális eloszlást és a már kiszámolt 1/4 000 000 értéket felhasználva körülbelül 8 százalékosnak adódik ez a valószínűség – alacsony ugyan, de lehetővé teszi az ésszerű kétséget.”

V9. Hibakeresés

A hibakeresésre különösen alkalmasak a paradoxonok. Egy típusfeladat 5.2.