Megoldások, megoldás ötletek (Jensen-egyenlőtlenség)

I. Geometriai egyenlőtlenségek, szélsőérték feladatok

1. Mivel az $f:[0;\pi]\to\mathbb{R};\ x\mapsto \sin x$ folytonos az értelmezési tartományán, ezért elég azt belátni, hogy szigorúan gyengén konkáv ezen az intervallumon. Legyen $0\le x<y\le\pi$! Ekkor $\frac{\sin x+\sin y}{2}=\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}<\sin\frac{x+y}{2}$, hisz $\cos\frac{x-y}{2}<1$, mivel $x\neq y$. Ebből következően egyenlőség akkor és csak akkor állhat fenn, ha *x*=*y*.
2. Mivel $\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, így könnyen jön az állítás. $x\neq y$. Ebből következően egyenlőség akkor és csak akkor állhat fenn, ha *x*=*y*.

3. Mivel az $f:\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\to\mathbb{R};\ x\mapsto tgx$ folytonos az értelmezési tartományán, ezért elég azt belátni, hogy szigorúan gyengén konkáv ezen az intervallumon. Ismert, hogy

$$\frac{tg\,x+tg\,y}{2}=\frac{\sin(x+y)}{2\cdot\cos x\cdot\cos y}=\frac{\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)}{\cos x\cdot\cos y}=$$

$$=\frac{\cos^2\left(\frac{x+y}{2}\right)}{\cos x\cdot\cos y}\cdot tg\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{1+\cos(x+y)}{2\cos x\cdot\cos y}\cdot tg\left(\frac{x+y}{2}\right)=$$

$$=\frac{1-\cos(x-y)+2\cos x\cdot\cos y}{2\cos x\cdot\cos y}\cdot tg\left(\frac{x+y}{2}\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1-\cos(x-y)}{2\cos x\cdot\cos y}\right)\cdot tg\left(\frac{x+y}{2}\right)>tg\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

Mivel $x\neq y$.

Ebből következően egyenlőség akkor és csak akkor állhat fenn, ha *x*=*y*.

Megjegyzés:
Érdemes végiggondolni az egységsugarú kör felhasználásával történő elemi bizonyítást!

4. a)

Használjuk fel, hogy $T=\frac{a+b+c}{2}r=\frac{abc}{4R}$, továbbá
$a=2R\sin\alpha,\ b=2R\sin\beta,\ c=2R\sin\gamma$.

b)

A Héron-képlet szerint $T=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, valamint
$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{s-a}$. Ezen utóbbit felírva a többi szögre is kapjuk az állítást.

c)

Tudjuk, hogy $\operatorname{tg} g = \operatorname{tg}(180° - a - b) = -\operatorname{tg}(a + b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b - 1}$.

d) Használjuk fel a koszinusz-tételt és a trigonometrikus területképletet, valamint a kotangens definícióját!

e)

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} =$$

$$= 1 + \frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{2abc(a+b+c)} = 1 + \frac{16s(s-a)(s-b)(s-c)}{2abc \cdot 2s} =$$

$$= 1 + \frac{4t^2}{abcs} = 1 + \frac{t}{s} \cdot \frac{4t}{abc} = 1 + \frac{r}{R}$$

f)

Használjuk a b) feladat megoldásában látott $\operatorname{tg}\dfrac{a}{2} = \dfrac{r}{s-a}$ összefüggést és írjuk fel ennek megfelelőjét a többi szögre is, valamint alkalmazzuk a Héron-képletet és a *T=rs* a területképletet!

g)

Használjuk fel, hogy $\sin\gamma = \sin(\alpha+\beta)$, az 1. feladatban látott összefüggést, és a koszinuszra felírt hasonló összefüggést!

h)

Az előzőhöz hasonlóan megoldható.

i)

Használjuk az 1. feladatban látott összefüggést és a koszinuszra felírt hasonló összefüggést!

j)

Az előzőhöz hasonló

k)

Mivel

$$\cos(a + b) = -\cos g = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos a \cos b + \cos g = \sin a \sin b$$

így négyzetre emelés után

$$\cos^2 a \cos^2 b + 2\cos a \cos b \cos g + \cos^2 g = (1 - \cos^2 a)(1 - \cos^2 b) =$$

$$= 1 - \cos^2 a - \cos^2 b + \cos^2 a \cos^2 b$$

ebből pedig jön az állítás.

l)

Hasonló az előzőhöz.

m)

Következik az alábbiból.

$$\operatorname{ctg}\frac{g}{2}=\operatorname{ctg}\left(90°-\frac{a+b}{2}\right)=\frac{1}{\operatorname{ctg}\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)}=\frac{\operatorname{ctg}\frac{a}{2}+\operatorname{ctg}\frac{b}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{b}{2}-1}$$

n)

A korábbiakból levezethető.

5. a) Legkisebb felső korlát:

Az 1. feladatból tudjuk, hogy a szinusz függvény a $[0;\pi]$ intervallumon szigorúan konvex, így a Jensen-egyenlőtlenség alapján $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\le\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)=\sin 60^{\circ}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a háromszög szabályos.

Legnagyobb alsó korlát:

A szinuszok összege mindig pozitív, de a 0-t tetszőlegesen megközelítheti. Tekintsük egy olyan egyenlő szárú háromszöget, melynek szögei $\alpha=180^{\circ}-\frac{2}{n},\ \beta=\frac{1}{n},\ \gamma=\frac{1}{n}$!

Ekkor

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=\sin\left(180^{\circ}-\frac{2}{n}\right)+2\cdot\sin\frac{1}{n}=\sin\frac{2}{n}+2\cdot\sin\frac{1}{n}=$$

$$=2\cdot\sin\frac{1}{n}\left(\cos\frac{1}{n}+1\right)\to 0,\ \ ha\ \ n\to\infty.$$

Felhasználtuk, hogy a szinusz függvény az értelmezési tartománya minden pontjában folytonos. Tehát legnagyobb alsókorlátja a 0.

b)

Legkisebb felső korlát:

Legyen $\alpha\le\beta\le\gamma$, ekkor az $\alpha,\ \beta$ hegyesszög. Így a 2. feladat alapján

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\le\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos\gamma=\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos(\alpha+\beta)=$$

$$=\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}+\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}=1+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}=$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\le\frac{3}{2}$$

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a háromszög szabályos.

Legnagyobb alsó korlát:

Az előző feladatból ismert, hogy $\cos a+\cos b+\cos g=1+\frac{r}{R}$. Mivel $\frac{r}{R}>0$, ezért a koszinuszok összege nagyobb 1-nél. Az 1-et viszont tetszőlegesen megközelítheti. Az előzőhöz hasonlóan legyen $\alpha=180^{\circ}-\frac{2}{n},\ \beta=\frac{1}{n},\ \gamma=\frac{1}{n}$!

Ekkor

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=\cos\left(180^\circ-\frac{2}{n}\right)+2\cdot\cos\frac{1}{n}=-\cos\frac{2}{n}+2\cdot\cos\frac{1}{n}\to -1+2=1,$$

$ha\ \ n\to\infty.$

Felhasználtuk, hogy a koszinusz függvény az értelmezési tartománya minden pontjában folytonos. Tehát legnagyobb alsókorlátja az 1.

c)

Legkisebb felső korlát:

Mivel a tényezők pozitívok, így a háromtagú számtani-mértani közép egyenlőtlensége, és a Jensen-egyenlőtlenség alapján írhatjuk, hogy

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\le\left(\frac{\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}}{3}\right)^3\le\sin^3\frac{\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}}{3}=\sin^3 30^\circ=\frac{1}{8}.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a háromszög szabályos.

Legnagyobb alsó korlát:

Az előzőekhez hasonlóan belátható, hogy 0-nál nagyobb, de azt tetszölegesen megközelítheti, tehát a 0.

Megjegyzés:

Az előző feladat h) összefüggéséből és a b) részből könnyen kapjuk a legkisebb felső korlátot.

d) Legkisebb felső korlát:

Hegyesszögű háromszög esetén a háromtagú számtani-mértani közép és a b) feladat alapján jön kapjuk, hogy a szorzat legfeljebb $\frac{1}{2}$. Derék- ill. tompaszögű háromszög esetén pedig nyilván kisebb $\frac{1}{2}$-nél, mivel a szorzat 0, ill. negatív. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a háromszög szabályos.

Legnagyobb alsó korlát:

Az előzőekhez hasonlóan belátható, hogy -1-nél nagyobb, de azt tetszőlegesen megközelítheti, tehát a -1.

Megjegyzés:

Az a) és b) feladatban elemi megfontolásokkal, a Jensen-egyenlőtlenség alkalmazása nélkül is megkereshetjük a kifejezések maximumát, amiből jön a c) és d) feladat kifejezéseinek a maximuma is. Lásd Reiman István: Geometria és határterületei című könyvében.

6. A bizonyítás jön a 4. feladat e) részéből az 5. feladat b) részének felhasználásával. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a háromszög szabályos.

Megjegyzés:
Az állítás elemi úton is bizonyítható a Feuerbach kör felhasználásával. Lásd Reiman István: Geometria és határterületei című könyvében.

7. Használjuk a háromtagú számtani-mértani közép egyenlőtlenségét, a 4. feladat c) részét, a 3. feladat eredményét, és a Jensen-egyenlőtlenséget ebben a sorrendben!
Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a háromszög szabályos.

8. Teljes négyzetek összegére való visszavezetéssel könnyen igazolható, hogy
$\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2}\ge \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}+\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}+\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$. Ebből pedig a 4. feladat f) része alapján jön az állítás. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a háromszög szabályos.

9. a)
Az állítás jön a 4. feladat l) és az ötödik feladat d) részéből. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a háromszög szabályos.
b)
Az állítás jön a 4. feladat k) és az ötödik feladat d) részéből. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a háromszög szabályos.
c)
A háromszögben a félszögek koszinusza pozitív. Ezért ebben és a következő feladatban is alkalmazhatjuk a háromtagú számtani-mértani közép egyenlőtlenségét. Ezen kívül felhasználjuk a 4. feladat g) részét, valamint az 5. feladat a) részét.

$$\frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{\beta}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{\gamma}{2}}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\frac{1}{\cos^2\frac{\beta}{2}}\frac{1}{\cos^2\frac{\gamma}{2}}}=$$
$$=3\sqrt[3]{\frac{16}{(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)^2}}\ge 3\sqrt[3]{\frac{16}{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2}}=3\sqrt[3]{\frac{64}{27}}=4$$

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a háromszög szabályos.
d)
Ebben a feladatban az előzőhöz hasonlóan járhatunk el.

$$\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{\beta}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{\gamma}{2}}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}\frac{1}{\cos\frac{\beta}{2}}\frac{1}{\cos\frac{\gamma}{2}}}=$$
$$=3\sqrt[3]{\frac{4}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}}\ge 3\sqrt[3]{\frac{4}{\frac{3\sqrt{3}}{2}}}=3\sqrt[3]{\frac{8}{\sqrt{27}}}=2\sqrt{3}$$

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a háromszög szabályos.

e)
Mivel egy háromszög szögeinek szinusza pozitív ezért alkalmazzuk a háromtagú számtani-harmonikus közép egyenlőtlenségét, és az 5. feladat a) részét!

$$\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}\geq 9\frac{1}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}\geq\frac{9}{\frac{3\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{3}$$

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a háromszög szabályos.

f)
A háromtagú számtani-mértani közép egyenlőtlenségéből és az 5. feladat c) részéből jön. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a háromszög szabályos.

10. a) Használjuk fel a közismert $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$ egyenlőtlenséget, a két oldalt és közbezárt szög szinuszát tartalmazó területképletet, valamint a 9. feladat e) részét.

$$s^2=\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}{4}\geq\frac{3ab+3bc+3ca}{4}=$$

$$=\frac{3}{2}t\left(\frac{1}{\sin\gamma}+\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}\right)\geq\frac{3}{2}t\cdot 2\sqrt{3}=3\sqrt{3}\cdot t$$

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a háromszög szabályos.
Megjegyzés:
1. Adott kerületű háromszögek közül a szabályos háromszög területe a legnagyobb.
2. Adott területű háromszögek közül a szabályos háromszög kerülete a legkisebb.
3. Az állítás más módon is bizonyítható, lásd Reiman István: Geometria és határterületei című könyvében.

b) Következik az előzőből a *t=rs* képlet felhasználásával. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a háromszög szabályos.
Megjegyzés:
1. Adott kerületű háromszögek közül a szabályos háromszög beírt körének sugara a legnagyobb.
2. Adott sugarú kör köré írt háromszögek közül a szabályos háromszög kerülete a legkisebb.
3. Az állítás más módon is bizonyítható, lásd Reiman István: Geometria és határterületei című könyvében.

c) Tudjuk, hogy $a=2R\sin\alpha,\ b=2R\sin\beta,\ c=2R\sin\gamma$, így 5. feladat a) része alapján

$s=R\sin\alpha+R\sin\beta+R\sin\gamma=R\left(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\right)\leq R\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a háromszög szabályos.
Megjegyzés:
1. Adott kerületű háromszögek közül a szabályos háromszög köré írt körének sugara a legkisebb.
2. Adott sugarú körbe írt háromszögek közül a szabályos háromszög kerülete a legnagyobb.
3. Az állítás más módon is bizonyítható, lásd Reiman István: Geometria és határterületei című könyvében.

d) Használjuk fel az a) és a c) feladatot! Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a háromszög szabályos.
Megjegyzés:

1. Adott területű háromszögek közül a szabályos háromszög köré írt körének sugara a legkisebb.
2. Adott sugarú körbe írt háromszögek közül a szabályos háromszög területe a legnagyobb.
3. Az állítás más módon is bizonyítható, lásd Reiman István: Geometria és határterületei című könyvében.

11. Az egyenlőtlenség bizonyításához használjuk fel, hogy a háromszög hozzáírt köre a szemközti csúcshoz tartozó oldalak egyenesét a szemközti csúcstól félkerület távolságra érinti. Mivel a szemközti csúcshoz tartozó belső szögfelezők átmennek a hozzáírt kör középpontján, ezért felírható, hogy pl. $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{r_a}{s}$, ahol r_a az A csúccsal szemközti hozzáírt kör sugara. A többi szögre is felírva hasonló összefüggéseket és felhasználva, hogy a $f:\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R};\ x \mapsto tgx$ függvény a az értelmezési tartományán szigorúan konvex , a Jensen-egyenlőtlenség alapján kapjuk, hogy $r_a+r_b+r_b=s\left(tg\frac{\alpha}{2}+tg\frac{\beta}{2}+tg\frac{\gamma}{2}\right)\geq 3s\cdot tg\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{6}\right)=3s\frac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}s$.
Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a háromszög szabályos.

12. Bontsuk fel a zárójeleket a baloldalon, majd megfelelő csoportosítás és kiemelés után alkalmazzuk a koszinusz-tételt, valamint az 5. feladat b) részét! Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a háromszög szabályos.
13. A koszinusz-tétel alapján azt kapjuk, hogy

$$\frac{bc}{b^2+c^2-a^2}+\frac{ac}{a^2+c^2-b^2}+\frac{ba}{b^2+a^2-c^2}=\frac{1}{2\cos\alpha}+\frac{1}{2\cos\beta}+\frac{1}{2\cos\gamma}\geq$$

$$\geq\frac{9}{2}\frac{1}{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}\geq\frac{9}{2}\frac{2}{3}=3$$

, ahol alkalmaztuk a háromtagú számtani-harmonikus közép egyenlőtlenségét (hegyesszögek koszinusza pozitív), és az 5. feladat b) részét! Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a háromszög szabályos.

14. Mivel *s* a félkerület, így ezt beírva az eredetivel ekvivalens alábbi egyenlőtlenséghez jutunk.

$$\frac{ab}{a+b-c}+\frac{bc}{b+c-a}+\frac{ca}{c+a-b}\geq a+b+c$$

Ezt leosztva a pozitív $a+b+c$-vel megkapjuk a

$$\frac{ab}{(a+b)^2-c^2}+\frac{bc}{(b+c)^2-a^2}+\frac{ca}{(c+a)^2-b^2}\geq 1$$

egyenlőtlenséget, mely ugyancsak ekvivalens az eredetivel, így elég ezt bizonyítani.

A koszinusz-tételből jön, hogy $(a+b)^2-c^2=2ab(1+\cos\gamma)$. A többi tagra is írjuk fel a megfelelő összefüggést, majd helyettesítsünk be!

$$\frac{ab}{(a+b)^2-c^2}+\frac{bc}{(b+c)^2-a^2}+\frac{ca}{(c+a)^2-b^2}=\frac{1}{2(1+\cos\gamma)}+\frac{1}{2(1+\cos\beta)}+\frac{1}{2(1+\cos\alpha)}\geq$$

$$\geq\frac{9}{2(1+\cos\gamma)+2(1+\cos\beta)+2(1+\cos\alpha)}=\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{3+\cos\gamma+\cos\beta+\cos\alpha}\geq\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{3+\frac{3}{2}}=1$$

Itt alkalmaztuk a háromtagú számtani-harmonikus közép egyenlőtlenségét és az 5. feladat b) részét. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a háromszög szabályos.

15. Első egyenlőtlenség.

Mivel $a=2R\sin\alpha,\ b=2R\sin\beta,\ c=2R\sin\gamma$, így

$$\frac{R^2}{a^2}+\frac{R^2}{b^2}+\frac{R^2}{c^2}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\beta}+\frac{1}{\sin^2\gamma}\right)\geq\frac{1}{4}\frac{9}{\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma}\geq$$

$$\geq\frac{1}{4}\frac{9}{\frac{9}{4}}=1$$

, itt felhasználtuk a háromtagú számtani-harmonikus közép egyenlőtlenségét és a 9. feladat a) részét. Ebből már könnyen jön az állítás. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a háromszög szabályos.

Második egyenlőtlenség.

Legyen a beírt kör érintési pontjai által az oldalakból levágott szakaszok hossza az *A* csúcsnál *x*, a *B* csúcsnál *y*, a *C* csúcsnál *z*! Ekkor $a=y+z$, $b=x+z$, $c=x+y$. Másrészt

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{x},\ tg\frac{\beta}{2}=\frac{r}{y},\ tg\frac{\gamma}{2}=\frac{r}{z}.$$

Ezek alapján

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(x+z)^2}+\frac{1}{(x+y)^2}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{xy}\right)=$$

$$=\frac{1}{4r^2}\left(tg\frac{\beta}{2}tg\frac{\gamma}{2}+tg\frac{\alpha}{2}tg\frac{\gamma}{2}+tg\frac{\beta}{2}tg\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{4r^2}$$

, itt felhasználtuk a két tagú számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenséget és a 4. feladat f) részét.

Egyenlőség mindkét esetben akkor és csak akkor áll fenn, ha a háromszög szabályos.

16. Ha tükrözzük a háromszöget az *a* oldal felezőpontjára, akkor egy olyan paralelogrammát kapunk, melynek egyik átlója $2s_a$, szögei α, 180°-α. Írjuk fel a $2s_a$ átlóra a koszinusz-tételt! Ekkor pl. $4s_a{}^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos(180°-\alpha)=b^2+c^2+2bc\cdot\cos\alpha$, így

$s_a{}^2-\frac{a^2}{4}=\frac{b^2+c^2+2bc\cdot\cos\alpha-(b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha)}{4}=bc\cdot\cos\alpha$. Írjuk fel a többi nevezőre is, valamint szorozzunk be $2t$ –vel és használjuk fel a trigonometrikus területképletet. Ekkor az eredetivel ekvivalens egyenlőtlenséghez jutunk, mely az alábbi módon igazolható

$$\frac{2t}{s_a^2-\frac{a^2}{4}}+\frac{2t}{s_b^2-\frac{b^2}{4}}+\frac{2t}{s_c^2-\frac{c^2}{4}}=\frac{bc\cdot\sin\alpha}{bc\cdot\cos\alpha}+\frac{ac\cdot\sin\beta}{ac\cdot\cos\beta}+\frac{ba\cdot\sin\gamma}{ba\cdot\cos\gamma}=$$

$$=tg\alpha+tg\beta+tg\gamma\geq 3\sqrt{3}$$

, ami ekvivalens a kiindulási egyenlőtlenséggel. Itt felhasználtuk a 7. feladatot az n=1 estre. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a háromszög szabályos.

17. Alakítsuk át a baloldali kifejezést az alábbi módon!

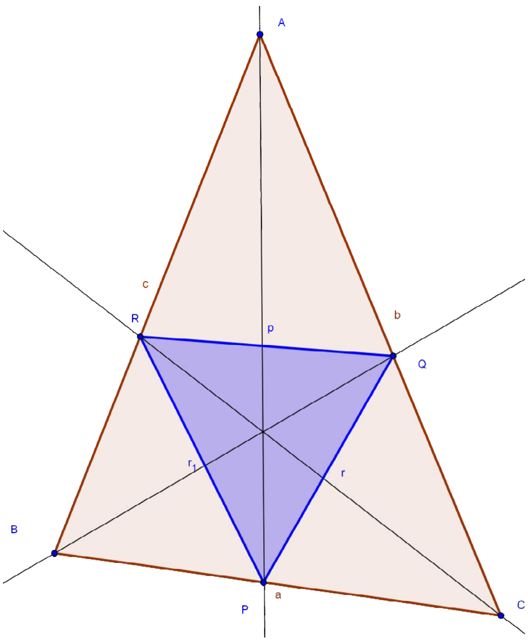
$$\frac{t}{\sqrt{a^2b^2-4t^2}}+\frac{t}{\sqrt{c^2b^2-4t^2}}+\frac{t}{\sqrt{a^2c^2-4t^2}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{a^2b^2}{t^2}-4}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{c^2b^2}{t^2}-4}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{a^2c^2}{t^2}-4}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{4}{\sin^2\gamma}-4}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{4}{\sin^2\alpha}-4}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{4}{\sin^2\beta}-4}}=\frac{tg\alpha+tg\beta+tg\gamma}{2}\geq\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Itt felhasználtuk a trigonometrikus Pitagorasz-tételt és azt is, hogy a háromszög hegyesszögű, valamint a 7. feladatot az n=1 estre. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a háromszög szabályos.

18. Az egyenlőtlenség következik a 10. feladat d) részéből a $t=\frac{abc}{4R}$ képlet felhasználásával. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a háromszög szabályos.

19. Bizonyítsuk be azt, hogy a *PQR* háromszögön kívüli rész területe nem kisebb az *ABC* háromszög területének a ¾-ed részénél! Ehhez használjuk fel a háromszög trigonometrikus



területképletét és fejezzük ki a háromszög oldalaival a *PC, PB, QA, QC, RA, RB* szakaszok hosszát, ahol *P* az *a* oldal és a szemközti szögfelező metszéspontja, *Q* a *b* oldalé és a szemközti szögfelezőé, míg az a *c* oldalé és a szemközti szögfelezőé. A szögfelező tétel alapján

$BP=\frac{ca}{b+c}$, $PC=\frac{ba}{b+c}$,

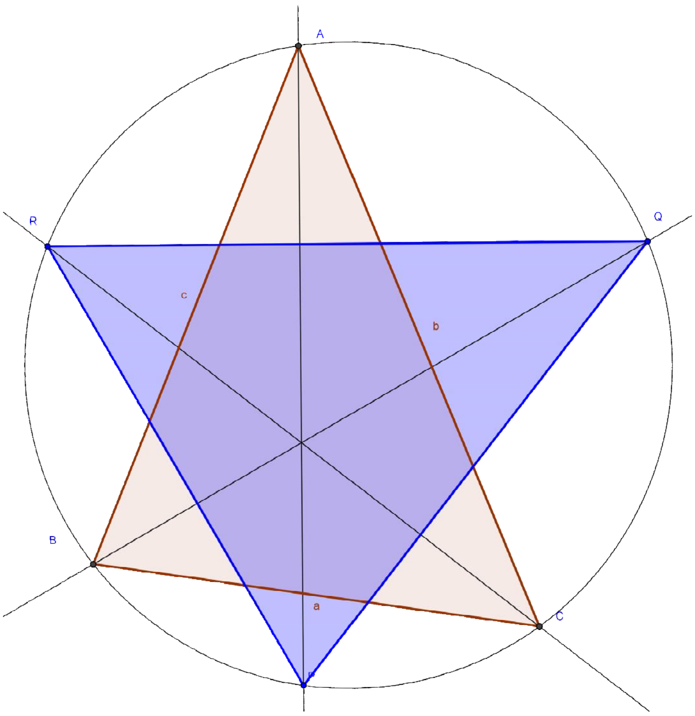
$CQ=\frac{ab}{a+c}$, $QA=\frac{bc}{a+c}$,

$AR=\frac{cb}{a+b}$, $RB=\frac{ac}{a+b}$. Így a kimaradó rész területe a trigonometrikus területképlet alapján.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a+c}\frac{bc}{a+b}\cdot\sin\alpha+\frac{ac}{a+b}\frac{ac}{c+b}\cdot\sin\beta+\frac{ba}{a+c}\frac{ba}{c+b}\cdot\sin\gamma\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a+c}\frac{bc}{a+b}\cdot\frac{2T_{ABC}}{bc}+\frac{ac}{a+b}\frac{ac}{c+b}\cdot\frac{2T_{ABC}}{ac}+\frac{ba}{a+c}\frac{ba}{c+b}\cdot\frac{2T_{ABC}}{ba}\right)\geq\frac{3}{4}T_{ABC}$$

Egyszerűsítés és az (a+b)(b+c)(c+a)-val való beszorzás és rendezés után az előzővel ekvivalens $ab^2+ba^2+cb^2+bc^2+ac^2+ca^2\geq 6abc$ egyenlőtlenséghez jutunk, ami a hattagú számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján igaz. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a háromszög szabályos.



20. A feladat megoldásában felhasználjuk a kerületi szögek tételét. Ez alapján

$$RPQ\sphericalangle=\frac{\beta+\gamma}{2},\ PQR\sphericalangle=\frac{\alpha+\gamma}{2},\ QRP\sphericalangle=\frac{\beta+\alpha}{2}$$

, így a PQR háromszög biztosan hegyesszögű, tehát a köré írt kör *O* középpontja a háromszögön belül van.

Ezek után felírhatjuk, hogy

$$T=T_{PQO}+T_{RQO}+T_{PRO}=\frac{R^2\sin(\beta+\alpha)}{2}+\frac{R^2\sin(\beta+\gamma)}{2}+\frac{R^2\sin(\gamma+\alpha)}{2}=$$

$$=\frac{R^2}{2}(\sin\gamma+\sin\alpha+\sin\beta)$$

Az ABC háromszög területe kifejezhető a $t=2R^2\sin\gamma\sin\alpha\sin\beta$ alakban. Így a bizonyítandó egyenlőtlenség ekvivalens a $(\sin\gamma+\sin\alpha+\sin\beta)^3\geq 27\sin\gamma\sin\alpha\sin\beta$ egyenlőtlenséggel, ami a háromtagú számtani-mértani közép egyenlőtlensége miatt igaz. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a háromszög szabályos.

21. A háromszög területét kifejezhetjük az *x, y, z* szakaszok és az oldalak, ill. a beírt kör sugara és az oldalak segítségével az alábbi módon. $T=\frac{ax+by+cz}{2}=\frac{a+b+c}{2}r$. Ebből

$r=\dfrac{ax+by+cz}{a+b+c}$. Alkalmazzuk a súlyozott számtani-harmonikus közép közötti egyenlőtlenséget az alábbi módon!

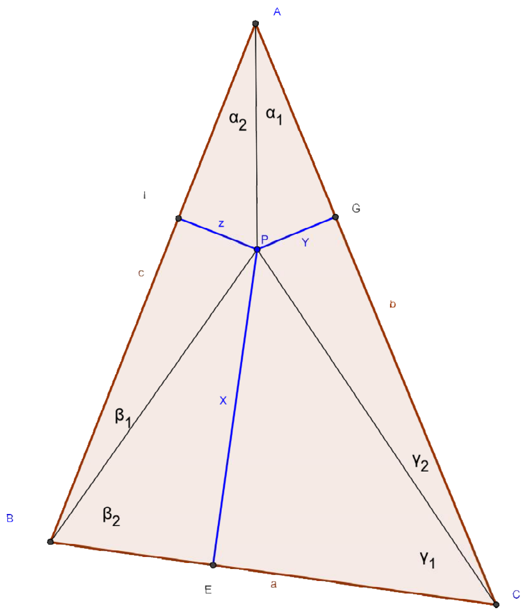
$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=(a+b+c)\left(\frac{a}{a+b+c}\frac{1}{x}+\frac{b}{a+b+c}\frac{1}{y}+\frac{c}{a+b+c}\frac{1}{z}\right)\geq$$

$$\geq(a+b+c)\frac{a+b+c}{ax+by+cz}=(a+b+c)\frac{1}{r}$$

Tehát $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}\geq\dfrac{a+b+c}{r}$. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha *x*=*y*=*z*, azaz *P* a beírt kör középpontja.

22. Első egyenlőtlenség.

Készítsünk ábrát! Osszuk végig az egyenlőtlenséget PA · PB · PC-vel, ekkor az eredetivel



ekvivalens $\dfrac{x+y}{CP}\dfrac{z+y}{AP}\dfrac{x+z}{BP}\leq 1$ egyenlőtlenséget kapjuk. Az ábrán létrejövő derékszögű háromszögekben felírhatjuk hegyesszög szinuszának definícióját. Ez alapján

$$\frac{x+y}{CP}\frac{z+y}{AP}\frac{x+z}{BP}=$$

$$=(\sin\gamma_1+\sin\gamma_2)(\sin\alpha_1+\sin\alpha_2)(\sin\beta_1+\sin\beta_2)\leq$$

$$\leq 2\sin\frac{\gamma}{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{\beta}{2}\leq 1$$

Itt felhasználtuk az 1. feladat, illetve a 5/c eredményét. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha *P* egy szabályos háromszög középpontja.

Megjegyzés:

Érdemes meggondolni, hogy a bizonyítás tompaszögű háromszög esetén is helyes.

Második egyenlőtlenség.

Ez triviális.

23. Emeljük négyzetre az egyenlőtlenség mindkét oldalát ekkor az eredetivel ekvivalens $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2\leq 9\dfrac{R}{2}$ egyenlőtlenséghez jutunk.

A Cauchy-egyenlőtlenség alapján

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2=\left(\sqrt{xa}\frac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{yb}\frac{1}{\sqrt{b}}+\sqrt{zc}\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2\leq(ax+by+cz)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Így azt elég bizonyítani, hogy $(ax+by+cz)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\leq\dfrac{9R}{2}$.

Az első zárójelben a háromszög területének a kétszerese szerepel.

Így

$$\left(ax+by+cz\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=2T\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{abc}{2R}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=$$
$$=\frac{1}{2R}\left(bc+ac+ab\right)=\frac{1}{2R}\left(4R^2\sin\beta\cdot\sin\gamma+4R^2\sin\alpha\cdot\sin\gamma+4R^2\sin\alpha\cdot\sin\beta\right)=$$
$$=R\left(2\sin\beta\cdot\sin\gamma+2\sin\alpha\cdot\sin\gamma+2\sin\alpha\cdot\sin\beta\right)=$$
$$=R\left(\cos(\beta-\gamma)+\cos(\alpha-\gamma)+\cos(\alpha-\beta)+\cos\beta+\cos\alpha+\cos\gamma\right)\le$$
$$\le R\left(3+\cos\beta+\cos\alpha+\cos\gamma\right)\le R\left(3+\frac{3}{2}\right)=\frac{9R}{2}$$

Itt felhasználtuk, hogy a koszinusz függvény maximuma 1, és az 5/b feladat eredményét.

II. Egyenletek, egyenlőtlenségek

1. Az első egyenletből kapjuk, hogy $xyz=1$.
   A második egyenlet baloldalának becsléséhez használjuk fel azt, hogy a valós számok halmazán értelmezett $f(x)=10^x$ függvény szigorúan monoton növekvő és szigorúan konvex, valamint alkalmazzuk a Jensen-egyenlőtlenséget.
   $10^{3^x}+10^{3^y}+10^{3^z}\geq 3\cdot 10^{\frac{3^x+3^y+3^z}{3}}\geq 3\cdot 10^{\sqrt[3]{3^{x+y+z}}}\geq 3\cdot 10^{3^{\frac{x+y+z}{3}}}\geq 3\cdot 10^{3^{\sqrt[3]{xyz}}}=3000$.
   Innen jön, hogy $x=y=z$.

2. Használjuk fel, hogy ha az $f:[a;b]\to \mathbb{R};\, x \mapsto f(x)$ függvényre minden $x,y\in[a;b]$ esetén teljesül, hogy $f(x)+f(y)\geq 2f\left(\sqrt{xy}\right)$, akkor bármely $x_1,x_2,\ldots,x_n\in[a;b]$ esetén fennáll az $f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)\geq nf\left(\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}\right)$!
   Ez alapján elég azt bizonyítani, hogy bármely $x,y\geq 1$ esetén $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}\geq\frac{2}{1+\sqrt{xy}}$. Ez viszont ekvivalens a $0\geq\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\left(1-\sqrt{xy}\right)$ egyenlőtlenséggel, ami triviálisan igaz.

3. A feltételt tekintsük c-re nézve másodfokú egyenletnek. Így a $c^2+abc+b^2+a^2-4=0$ egyenletet kapjuk, melynek diszkriminánsa
   $$D=(ab)^2-4\left(a^2+b^2-4\right)=16\left(1-\left(\frac{a}{2}\right)^2\right)\left(1-\left(\frac{b}{2}\right)^2\right).$$
   Könnyen meggondolhatjuk, hogy a kifejezésben szereplő második és harmadik tényező nem lehet negatív a feltétel miatt, így $1-\left(\frac{a}{2}\right)^2\geq 0,\ 1-\left(\frac{b}{2}\right)^2\geq 0$. Legyen
   $\frac{a}{2}=\cos\alpha,\quad \frac{b}{2}=\cos\beta$, ahol $\alpha,\beta\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, hisz $0<\frac{a}{2};\frac{b}{2}\leq 1$.
   Írjuk fel a megoldó képletet!
   $$c_{1;2}=\frac{-ab\pm\sqrt{\left(1-\left(\frac{a}{2}\right)^2\right)\left(1-\left(\frac{b}{2}\right)^2\right)}}{2}$$
   Ebből csak a $c_1=\frac{-ab+\sqrt{\left(1-\left(\frac{a}{2}\right)^2\right)\left(1-\left(\frac{b}{2}\right)^2\right)}}{2}$ felel meg a feltételnek.
   Így
   $$c_1=\frac{-4\cos\alpha\cos\beta+\sqrt{\left(1-\cos^2\alpha\right)\left(1-\cos^2\beta\right)}}{2}=-2\left(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\right)=-2\cos(\alpha+\beta)$$

tehát $c=-\cos(\alpha+\beta)$. Legyen $c=\cos\gamma$, ahol $\gamma\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, hisz $0<\frac{c}{2}\leq 1$. Így

$\cos\gamma=-\cos(\alpha+\beta)$. Tudjuk, hogy $\cos\gamma=-\cos(\pi-\gamma)$, ezért $\cos(\alpha+\beta)=\cos(\pi-\gamma)$.

Mivel $0<\pi-\gamma;\ \alpha+\beta<\pi$, ezért az eddigiekből következik, hogy $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

Tehát $a+b+c=2\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}\right)=2\left(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\right)\leq 2\frac{3}{2}=3$ az I. 5/b alapján.

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha *a*=*b*=*c*.

4. Fejezzük ki a feltételből *z*-t $z=\frac{x+y}{xy-1}$!

Mivel x, y>0, ezért legyen $x=tg\alpha,\ \ y=tg\beta$, ahol $\alpha,\beta\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$! Ekkor

$z=\frac{tg\alpha+tg\beta}{tg\alpha\cdot tg\beta-1}=-tg\left(\alpha+\beta\right)$. Másrészt legyen $z=tg\gamma,\ \gamma\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$! Ekkor

$tg\gamma=-tg\left(\alpha+\beta\right)=tg\left[-\left(\alpha+\beta\right)\right]$, ami az eddigiek alapján azt jelenti, hogy

$\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

Így

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2a}}+\frac{1}{\sqrt{1+tg^2b}}+\frac{1}{\sqrt{1+tg^2g}}=$$

$$=\cos a+\cos b+\cos g\leq\frac{3}{2}$$

Itt felhasználtuk az I. 5/b feladatot. Egyenlő akkor és csak akkor, ha x=y=z.

5.

Mivel *x, y, z* 1-nél kisebb pozitív valós számok, ezért legyen $x=tg\frac{\alpha}{2},\ y=tg\frac{\beta}{2},\ z=tg\frac{\gamma}{2}$,

ahol $\alpha,\beta,\gamma\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

Ekkor a feltétel alapján $z=\frac{1-yx}{y+x}=\frac{1}{\frac{y+x}{1-yx}}=\frac{1}{\frac{tg\frac{\alpha}{2}+tg\frac{\beta}{2}}{1-tg\frac{\alpha}{2}tg\frac{\beta}{2}}}=\frac{1}{tg\frac{\alpha+\beta}{2}}=ctg\frac{\alpha+\beta}{2}$.

Így $tg\frac{\gamma}{2}=ctg\frac{\alpha+\beta}{2}$, ami az értelmezési tartomány miatt azt jelent, hogy $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}$,

azaz $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, ahol a szögek hegyesszögek.

Így

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}=\frac{tg\,\frac{a}{2}}{1-tg^2\,\frac{a}{2}}+\frac{tg\,\frac{b}{2}}{1-tg^2\,\frac{b}{2}}+\frac{tg\,\frac{g}{2}}{1-tg^2\,\frac{l}{2}}=$$

$$=\frac{tg a+tg b+tg g}{2}\geq\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

, itt felhasználtuk a kétszeres szög tangensére vonatkozó összefüggést és a 7. feladatot n=1-re. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $x=y=z$.

6. Legyen $a+b+c=d$! Ekkor $\frac{a}{d}+\frac{b}{d}+\frac{c}{d}=1$, így legyen $x=\frac{a}{d},\ y=\frac{b}{d},\ z=\frac{c}{d}$, tehát $x+y+z=1$.
Így a bizonyítandó egyenlőtlenség a következő alakot ölti

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ba}}=\frac{\frac{a}{d}}{\sqrt{\left(\frac{a}{d}\right)^2+8\frac{b}{d}\frac{c}{d}}}+\frac{\frac{b}{d}}{\sqrt{\left(\frac{b}{d}\right)^2+8\frac{a}{d}\frac{c}{d}}}+\frac{\frac{c}{d}}{\sqrt{\left(\frac{c}{d}\right)^2+8\frac{b}{d}\frac{a}{d}}}=$$

$$=\frac{x}{\sqrt{x^2+8yz}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+8xz}}+\frac{z}{\sqrt{z^2+8yx}}\geq 1$$

, ahol $x+y+z=1$. Ezt az eljárást nevezik normalizálásnak.
Ebből kiderül, hogy az általánosság megszorítása nélkül már az elején feltehetjük, hogy $a+b+c=1$, azaz normalizálhatjuk az ismeretleneket. Éljünk ezzel a lehetőséggel!

Most tekintsük az $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R};\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ függvényt! Bizonyítsuk be, hogy szigorúan konvex. Mivel folytonos az értelmezési tartományán, ezért elég azt belátni, hogy szigorúan gyengén konvex. Legyen x, y két tetszőleges pozitív valós szám, ekkor az

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{\frac{x+y}{2}}}\leq\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}}{2}=\frac{f(x)+f(y)}{2}$$

egyenlőtlenséget kell belátni, ami kéttagú számtani és -2-ed rendű hatványközép közötti egyenlőtlenség miatt igaz. Emiatt alkalmazhatjuk a Jensen egyenlőtlenséget, így

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ba}}=af\left(a^2+8bc\right)+bf\left(b^2+8ac\right)+cf\left(c^2+8ba\right)\geq$$

$$\geq f\left(a\left(a^2+8bc\right)+b\left(b^2+8ac\right)+c\left(c^2+8ba\right)\right)$$

tehát azt kell belátni, hogy $f\left(a\left(a^2+8bc\right)+b\left(b^2+8ac\right)+c\left(c^2+8ba\right)\right)\geq 1$. Mivel f szigorúan csökkenő és f(1)=1, ezért elég azt belátni, hogy

$a\left(a^2+8bc\right)+b\left(b^2+8ac\right)+c\left(c^2+8ba\right)\leq 1$, azaz

$$a\left(a^2+8bc\right)+b\left(b^2+8ac\right)+c\left(c^2+8ba\right)=a^3+b^3+c^3+24abc\leq 1=\left(a+b+c\right)^3.$$

Ismert az $a^3+b^3+c^3=\left(a+b+c\right)^3-3(a+b)(c+b)(c+a)$ összefüggés. Ezt beírva és az egyenlőtlenséget rendezve az eredetivel ekvivalens

$$ab^2+ba^2+cb^2+bc^2+ac^2+ca^2\ge 6abc$$

egyenlőtlenséghez jutunk, amit már igazoltunk.

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha *a*=*b*=*c*.

7.

Az előző feladatban látottakhoz hasonlóan igazolható, hogy a folytonos

$f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R};\ f(x)=\dfrac{1}{x(x+1)}$ szigorúan konvex.

Így

$$\frac{a}{b^2+b}+\frac{b}{c^2+c}+\frac{c}{d^2+d}+\frac{d}{a^2+a}=4\left(\frac{a}{4}f(b)+\frac{b}{4}f(c)+\frac{c}{4}f(d)+\frac{d}{4}f(a)\right)\ge$$

$$\ge 4f\left(\frac{ab+bc+cd+da}{4}\right)$$

, tehát $\dfrac{a}{b^2+b}+\dfrac{b}{c^2+c}+\dfrac{c}{d^2+d}+\dfrac{d}{a^2+a}\ge\dfrac{64}{\left(ab+bc+cd+da\right)^2+4(ab+bc+cd+da)}$.

Így elég belátni, hogy

$$\frac{64}{\left(ab+bc+cd+da\right)^2+4(ab+bc+cd+da)}\ge\frac{8}{(a+c)(b+d)}$$

$$\mathbf{c}$$

$$ab+bc+cd+da\le 4$$

$$\mathbf{c}$$

$$4\left(ab+bc+cd+da\right)\le 16=(a+b+c+d)^2$$

$$\mathbf{c}$$

$$\left(a-b+c-d\right)^2\ge 0$$

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a=b=c=d=1.

8. A négyzetgyök függvény szigorúan konkáv az értelmezési tartományán. Használjuk fel ezt a tényt!

$$\sqrt{\frac{a}{a+b}}+\sqrt{\frac{b}{b+c}}+\sqrt{\frac{c}{c+a}}=\frac{a+c}{2(a+b+c)}\sqrt{\frac{4a(a+b+c)^2}{(a+b)(a+c)^2}}+\frac{a+b}{2(a+b+c)}\sqrt{\frac{4b(a+b+c)^2}{(c+b)(a+b)^2}}+\frac{b+c}{2(a+b+c)}\sqrt{\frac{4c(a+b+c)^2}{(a+c)(b+c)^2}}\le$$

$$\le\sqrt{\frac{a+c}{2(a+b+c)}\frac{4a(a+b+c)^2}{(a+b)(a+c)^2}+\frac{a+b}{2(a+b+c)}\frac{4b(a+b+c)^2}{(c+b)(a+b)^2}+\frac{b+c}{2(a+b+c)}\frac{4c(a+b+c)^2}{(a+c)(b+c)^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{2a(a+b+c)}{(a+b)(a+c)}+\frac{2b(a+b+c)}{(c+b)(a+b)}+\frac{2c(a+b+c)}{(a+c)(b+c)}}$$

Ezután azt kell belátni, hogy

$$\frac{a(a+b+c)}{(a+b)(a+c)}+\frac{b(a+b+c)}{(c+b)(a+b)}+\frac{c(a+b+c)}{(a+c)(b+c)}\leq\frac{9}{4}$$

c

$$\frac{(ab+bc+ca)(a+b+c)}{(a+b)(a+c)(b+c)}\leq\frac{9}{4}$$

, ezen utóbbi pedig ekvivalens a $ab^2+ba^2+cb^2+bc^2+ac^2+ca^2\geq 6abc$ egyenlőtlenséggel, amit már korábban beláttunk. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha *a*=*b*=*c*.