Párosan szép az élet…

Kubatov Antal, Kaposvár

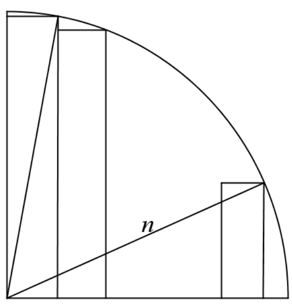
Tetszik ez a cím. Nemcsak azért, mert én találtam ki erre az előadásra (bár már ez is elegendő indok lenne), hanem azért is, mert nem árul el sokat az előadás témáját illetően, s esetleg jobban felcsigázza az érdeklődést.
Nem tetszik ez a cím. Nem árul el sokat az előadás témáját illetően, sőt talán félrevezető is kicsit.
Elbizonytalanodtam.
Párosan szép az élet, de gyakran bejelentkezett egy „harmadik” feladat, itt-ott egy negyedik is, … sőt *n*-edik is. És nem tudtam állandóan ellenállni.
Olyan feladatokat igyekeztem választani, amelyet fontosnak vélek megismertetni a versenyzőnek szánt tanulóval, s mellé egy (vagy több) olyan feladatot, ahol hasznosulhat is az elsővel szerzett ismeret. A feladatok egy része persze csak azért került be, mert szép, mert tetszik, s szeretném, ha másnak is „örömet okozna”. Jó szórakozást! Q

Nem pont erre gondoltam…

1. *Legyen n egynél nagyobb természetes szám. Mutassuk meg, hogy ekkor:*

$$\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2-2^2}+\ldots+\sqrt{n^2-(n-1)^2}<0{,}8n^2$$

Megoldás:



$$\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2-2^2}+\ldots+\sqrt{n^2-(n-1)^2}<0{,}8n^2$$

$$n>1\,;\ n\in N$$

n sugarú negyedkör
A baloldali összeg a „beírt téglalapok” területeinek összege, mely biztosan kisebb a negyedkör területénél.

$$\sqrt{n^2-1^2}+\sqrt{n^2-2^2}+\ldots+\sqrt{n^2-(n-1)^2}<$$

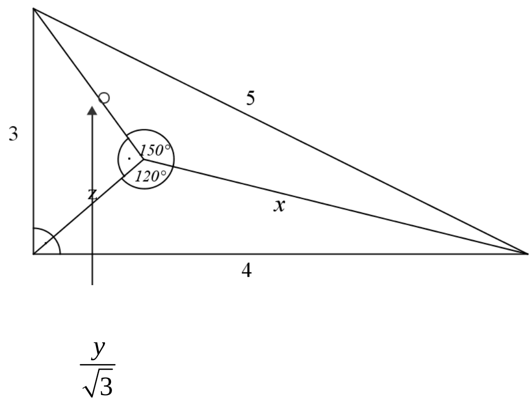
$$<\frac{n^2\pi}{4}<0{,}8n^2$$

2. *A pozitív x, y, z valós számok eleget tesznek az alábbi egyenleteknek:*

$$x^2+xy+\frac{y^2}{3}=25$$
$$\frac{y^2}{3}+z^2=9$$
$$z^2+zx+x^2=16$$

Határozd meg az $xy+2yz+3zx$ *értékét!*

Megoldás:



$$xy+2yz+3zx \qquad / \cdot \frac{1}{4\sqrt{3}}$$

$$\frac{x\cdot\frac{y}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}}{2}+\frac{z\cdot\frac{y}{\sqrt{3}}}{2}+$$
$$+z\cdot x\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\cdot 4}{2}$$

$$xy+2yz+3zx=24\sqrt{3}$$

3. a) *Az ABM, BCN és CDP egyenlő oldalú háromszögek,* $AB=a$, $BC=b$ *és* $CD=c$. *Az A,B,C,D pontok, ebben a sorrendben, egy d egyenesen vannak és az M,N,P a d-nek ugyanazon az oldalán. Igazold, hogy teljesül a következő egyenlőtlenség:*

$$\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}\geq\sqrt{a^2+b^2+c^2+ab-ac+bc}\,.$$

b) *Bizonyítsd be, ha* $a_0,a_1,...,a_n>0$ *valós számok, akkor*

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{a_k^2-a_ka_{k+1}+a_{k+1}^2}\geq\sqrt{a_0^2+a_n^2+\left(\sum_{k=1}^{n-1}a_k\right)^2-a_0a_n+\left(a_0+a_n\right)\sum_{k=1}^{n-1}a_k}\,.$$

Longáver Lajos (Nagybánya)

Megoldás:

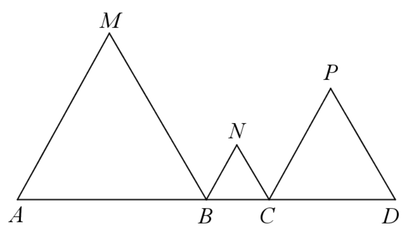
a) A megadott jelöléseket használva a koszinusztétel alapján (*MNB* illetve *NPC* háromszögben) írhatjuk, hogy

$$MN=\sqrt{a^2-ab+b^2}\ ,$$
$$NP=\sqrt{b^2-bc+c^2}$$

és

$$MP=\sqrt{(a+b)^2-(a+b)(b+c)+(b+c)^2}\ .$$

Az utolsó egyenlőséget az *MQP* háromszögből kapjuk, ahol $\{Q\}=BM\cap CP$.



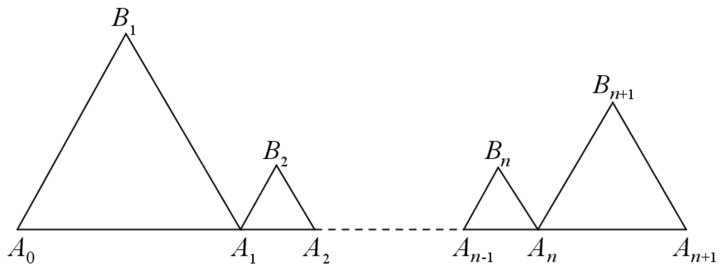
Másrészt

$$(a+b)^2-(a+b)(b+c)+(b+c)^2=a^2+b^2+c^2+ab-bc+ac\ ,$$

tehát az *M*, *N* és *P* pontok segítségével felírt $MN+NP\geq MP$ egyenlőtlenség épp a bizonyítandó egyenlőtlenség.

b) Az előző ábrához hasonlóan elkészítünk egy ábrát, amelyen az $A_iA_{i+1}B_{i+1}$ egyenlő oldalú háromszögek A_iA_{i+1} oldalai egymás meghosszabbításában vannak, a $B_1,...,B_n$ pontok az A_0A_n egyenes egyik oldalán helyezkednek el (lásd a mellékelt ábrát)

$A_iA_{i+1} = a_i$, minden $0 \le i \le n$ esetén.



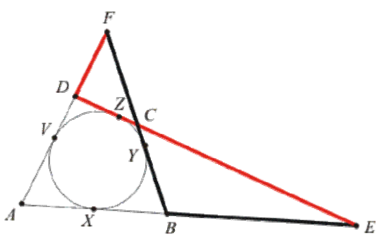
Így a koszinusztétel alapján $B_iB_{i+1} = \sqrt{a_{i-1}^2 - a_{i-1} \cdot a_i + a_i^2}$, ha $1 \le i \le n$ és ha Q-val jelöljük a B_1A_1 és $B_{n+1}A_n$ metszéspontját, akkor a QB_1B_{n+1} háromszögből a koszinusztétel alapján

$$B_1B_{n+1} = \sqrt{a_0^2 + a_n^2 + \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k\right)^2 - a_0a_n + (a_0 + a_n)\sum_{k=1}^{n-1} a_k} \; .$$

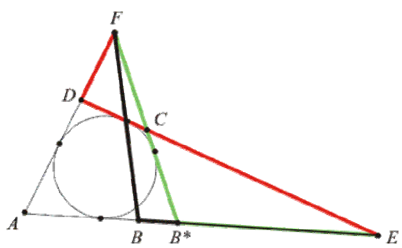
Így mivel $\sum_{i=1}^{n} B_iB_{i+1} \ge B1B_{n+1}$, épp a bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk.

Érintőnégyszögek

1. *Bizonyítsuk be, hogy az ABCD (nem trapéz) négyszög akkor és csak akkor érintőnégyszög, ha* $EB + BF = ED + DF$ *! (E az AB és DC meghosszabbításainak metszéspontja, F pedig a másik két oldal meghosszabbításainak metszéspontja.).*



1. ábra



2. ábra

Megoldás:

1) Ha *ABCD* érintőnégyszög, akkor $EB + BF = ED + DF$ (lásd 1. ábra).

$$EB + BF = EX - XB + BY + YF = EZ + FV =$$
$$= EZ + ZD - ZD + FD + DV = ED + DF.$$

2) Ha $EB + BF = ED + DF$, akkor *ABCD* érintőnégyszög.
Indirekt: Ha *ABCD* nem érintőnégyszög, akkor tekintsük az *AED* háromszög beírt körét és húzzuk meg *F*-ből az érintőt e körhöz (lásd 2. ábra). 1) miatt:

$$EB^* + B^*F = ED + DF ,$$

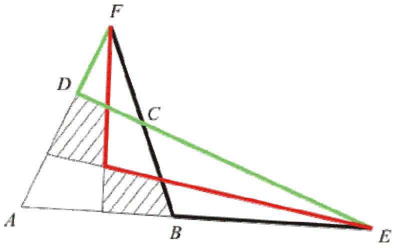
feltétel: $EB + BF = ED + DF$. $EB = EB^* + B^*B$.
Az előző három egyenletből: $B^*F = B^*B + BF$.
Ez viszont ellentmond a háromszög-egyenlőtlenségnek.

Megjegyzés: Az ellipszis két tetszőleges pontjának rádiuszait meghosszabbítva – ha azok négyszöget határoznak meg –, akkor az érintőnégyszög.

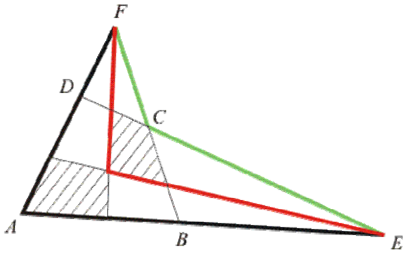
2. *Egy konvex négyszög szemközti oldalai meghosszabbításainak metszéspontjain keresztül húzzunk egy-egy egyenest, melyek az eredeti négyszöget négy kisebb négyszögre vágják. Bizonyítsuk be, hogy ha kör írható valamely két szemközti kis négyszögbe, akkor az eredeti négyszög is érintőnégyszög.*

Megoldás:

1. eset (lásd 3. ábra).: A színezés és az előző feladat állítása értelmében triviális.
2. eset (lásd 4. ábra).: A feladat bizonyításához segédtételt használunk:



3. ábra



4. ábra

Tétel:
$ABCD$ érintőnégyszög $\Leftrightarrow \quad EA-AF=EC-CF$ (lásd 5. ábra).

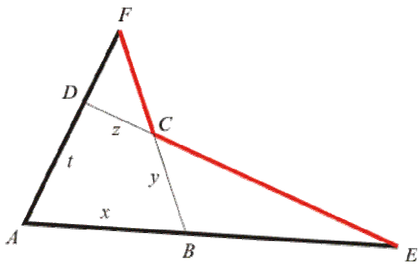
Bizonyítás:
Visszavezetjük az előző feladatra:

$$EA-AF\stackrel{?}{=}EC-CF\Rightarrow$$
$$\Rightarrow EB+x-\left(DF+t\right)\stackrel{?}{=}ED-z-\left(BF-y\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow EB+BF+x+z\stackrel{?}{=}ED+DF+y+t.$$

Ebből $x+z=y+t\Leftrightarrow$ ha $ABCD$ érintőnégyszög, tehát

$$EB+BF=ED+DF\Leftrightarrow ABCD$$

érintőnégyszög.



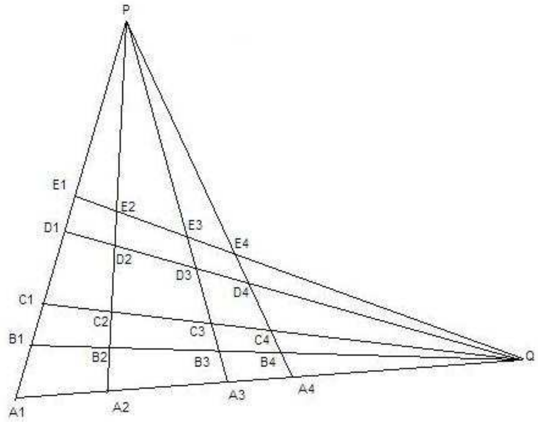
5. ábra

Megoldás folytatása:
Az előző segédtételből és a színezésből már következik az állítás.

Nyilvánvalóan az is igaz, hogy ha a két szemközti „kis” négyszög és a „nagy” négyszög közül valamelyik kettő érintőnégyszög, akkor a harmadik is az. (*)

Most tekintsünk egy négyszöget, ennek szemközti oldal egyeneseinek metszéspontját jelölje P *illetve* Q (ábra). A P ponton átmenő $n-1$ egyenes, illetve a Q ponton átmenő $n-1$ egyenes a négyszöget n^2 „kis” négyszögre osztja. ***Az előző tételek alapján triviális, hogy ha valamely főátlóban lévő „kis” négyszögekről tudjuk, hogy érintőnégyszögek, akkor a „nagy” négyszög is az. Felmerül a kérdés, hogy ha csak azt tudjuk, hogy van olyan n darabos kiválasztás, mely minden sorból és oszlopból pontosan egy „kis” négyszöget tartalmaz, s ezekről tudjuk, hogy érintőnégyszögek, vajon ekkor is következik-e, hogy a „nagy” négyszög is érintőnégyszög?***
Erre az igenlő választ ***Tóth Bence –egykori 12.C osztályos fazekasos diák***- adta meg.
A bizonyítás lényege, hogy „kicserélhetünk” két szomszédos sorban/oszlopban levő „kis” érintőnégyszöget anélkül, hogy az ábra többi részén változtatnánk.

Következzék:
Tekintsük az A_1A_4P háromszöget.

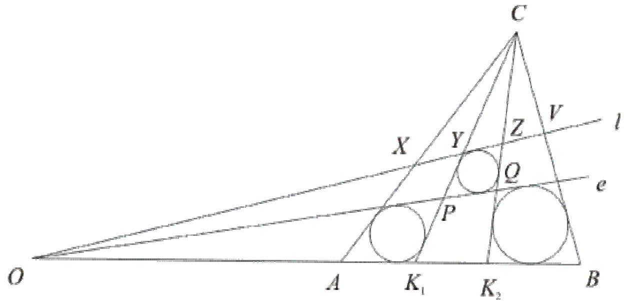


Ebben tudjuk, hogy $A_1A_2B_2B_1$ és $B_3B_4D_4D_3$ érintőnégyszögek, és C_1 et úgy választjuk meg, hogy $C_1C_2D_2D_1$ érintőnégyszög legyen. Ekkor állítjuk $A_3A_4C_4C_3$ is az lesz!

Válasszuk meg E_1 et úgy, hogy $A_1A_4E_1E_4$ érintőnégyszög legyen!
Ekkor, mivel $A_1A_2B_2B_1$ és $A_1A_4E_4E_1$ érintőnégyszögek, így $B_2B_4E_4E_2$ is az.
$B_2B_4E_4E_2$ és $B_3B_4D_4D_3$ érintőnégyszögek, ezért $D_2D_3E_3E_2$ is az lesz.(a fenti (*) megjegyzés alapján)
Analóg módon: mivel $C_1C_2D_2D_1$ és $D_2D_3E_3E_2$ érintőnégyszögek, ebből következően $C_1C_3E_3E_1$ is érintőnégyszög. Továbbá $C_1C_3E_3E_1$ és $A_1A_4E_4E_1$ érintőnégyszögségéből következik, hogy $A_3A_4C_4C_3$ is az.
Azaz „sort cseréltek” az egymással szomszédos sorokban lévő $A_1A_2B_2B_1$ és a $B_3B_4D_4D_3$ érintőnégyszögek, miközben a nem használt sorok és oszlopok érintetlenek maradtak.
Ilyen „lépések” alkalmazásával elérhető, hogy két „kis” érintőnégyszög „csúcsszomszédos” helyzetbe kerüljön, s ezáltal „összeolvasztva” csökkenthető a „kis” érintőnégyszögek száma, mígnem egyetlen érintőnégyszöget nem kapunk.

3. *Adott az ABC_Δ, s annak AB oldalán két belső pont, K_1 és K_2 (A, K_1, K_2, B). Tekintsük az AK_1C és K_2BC háromszögekbe írt körök közös külső érintőit; ezek metszéspontját jelölje O. Mutassuk meg, hogy az AK_2C és a BK_1C háromszögekbe írt körök – AB oldaltól különböző – külső érintője illeszkedik az O pontra.*

Megoldás:



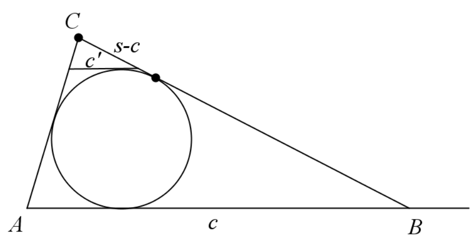
27. ábra

Messe a CK_1 illetve CK_2 szakaszokat a másik külső érintő a *P* ill. *Q* pontban (lásd 27. ábra). Tekintsük a CPQ_Δ-be írt kört, s húzzuk meg *O*-ból e körhöz a másik érintőt is (l). A létrejövő metszéspontok legyenek *X*, *Y*, *Z*, *V*. Ekkor a 13-as számú feladat állításának értelmében AK_2ZX és K_1BVY négyszögek érintőnégyszögek, s ez, az állítás teljesülését jelenti.

Geometria 1

1. *Az* ABC_Δ*-be írt körhöz húzzunk a háromszög a,b,c oldalaival párhuzamos érintőket. Ezeknek a háromszögbe eső szakaszai legyenek rendre* a_1, b_1, c_1. *Bizonyítsuk be, hogy* $\frac{a_1}{a}+\frac{b_1}{b}+\frac{c_1}{c}=1$.

Megoldás:



Vegyük észre, hogy a beírt kör a „kis háromszögeknek” a hozzáírt köre, valamint, hogy a hozzáírt kör érintési pontja félkerületnyire van a távolabbi csúcstól.

Így $\frac{c'}{c}=\frac{s-c}{s}$.

Analóg

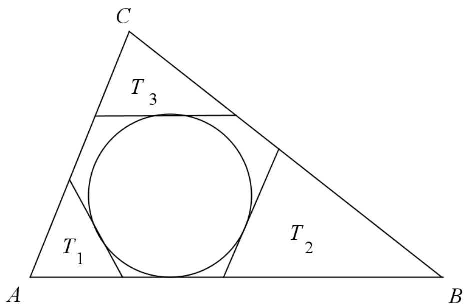
$$\frac{a'}{a}=\frac{s-a}{s},$$

$$\frac{b'}{b}=\frac{s-b}{s}.$$

$$\sum:\frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}+\frac{c'}{c}=\frac{s-a+s-b+s-c}{s}=1.$$

2. *Az ABC_{Δ} beírt köréhez húzzunk a háromszög oldalaival párhuzamos érintőket. Ezen érintők és a háromszög oldalainak metszéspontjai egy hatszög csúcsai. Mutassuk meg, hogy ennek a hatszögnek a kerülete nem lehet nagyobb, mint a háromszög kerületének ⅔-a!*

Megoldás:



$$K\overset{?}{\le}\frac{2}{3}\cdot 2s\quad /\cdot\frac{r}{2}$$

$$T\le\frac{2}{3}T_{ABC\Delta}$$

$$T_1=\left(\frac{s-a}{s}\right)T.$$

A „kis” háromszögek és az eredeti háromszög hasonlóságából:

$$T_{ABC}-\left(T_1+T_2+T_3\right)\overset{?}{\le}\frac{2}{3}T_{ABC}$$

$$T_{ABC}\le 3\left(T_1+T_2+T_3\right)$$

$$T_{ABC}\overset{?}{\le}3\frac{(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2}{s^2}\cdot T_{ABC}$$

Írjuk fel az $(s-a);(s-b);(s-c)$ mennyiségek számtani és négyzetes közepe közti összefüggést:

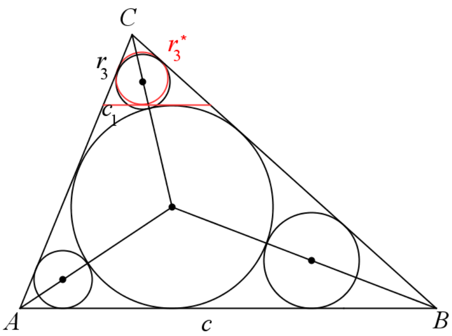
$$\frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3} \le \sqrt{\frac{(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2}{3}}$$

$$\frac{s^2}{9} \le \frac{(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2}{3}.$$

Ez pedig ekvivalens a bizonyítandó állítás utolsó alakjával.

3. *Egy háromszög belsejében helyezzünk el három olyan kört, amelyek érintik a háromszög két-két oldalát, továbbá kívülről érintik a háromszög beírt körét. Bizonyítsuk be, hogy e három kör sugarának összege nem kisebb a beírt kör sugaránál!*

Megoldás:



Jelölje pl. r_3^* a beírt kör c-vel párhuzamos érintője által lemetszett háromszög beírható körének sugarát. (analóg r_1^* és r_2^*...). Nyilvánvaló, hogy $r_3 \ge r_3^*$. Ugyanis az r_3^* sugarú kör nem feltétlen érinti a beírt kört, azt nagyítani kellhet az érintéshez.
Másrészt ismert (könnyen belátható), hogy

$$\frac{r_1^*}{r}+\frac{r_2^*}{r}+\frac{r_3^*}{r}=\frac{a_1}{a}+\frac{b_1}{b}+\frac{c_1}{c}=1.$$

Így $\frac{r_1+r_2+r_3}{r} \ge \frac{r_1^*+r_2^*+r_3^*}{r}=1$. Átrendezve: $r_1+r_2+r_3 \ge r$.

Invariancia

1. *Egy iskolában a gyerekek minden* $\frac{2012}{n}$, $n \in \{1,2,3,...,4023\}$ *alakú számot felírtak a táblára. Ezután két x és y számot letörölve, a* $2xy - x - y + 1$ *számot írják fel helyettük. A 4022. lépés után csak egy szám maradt a táblán. Melyik ez a szám?*

Megoldás:

$x; y \to 2xy - x - y + 1$

Vegyük észre, hogy $(2x-1)(2y-1) = 2(2xy - x - y + 1) - 1$. Azaz, ha a táblán szereplő *p* számok helyett a $2p-1$ számokat tekintjük, akkor ezek szorzata a lépés során nem változik meg.
Kezdetben a szorzat:

$$\left(2 \cdot \frac{2012}{1} - 1\right)\left(2 \cdot \frac{2012}{2} - 1\right) \cdot ... \cdot \left(2 \cdot \frac{2012}{4023} - 1\right) = \frac{4023}{1} \cdot \frac{4022}{2} \cdot ... \cdot \frac{1}{4023} = 1$$

Így, ha utoljára az A szám marad a táblán, akkor erre is teljesülnie kell a következő feltételnek: $2A - 1 = 1$. $A = 1$. Tehát utoljára a táblán az 1 szám marad.

2. *Adottak az 1,2,3,…2012 számok. Kiválasztunk közülük két y és x számot, és a* $z = \dfrac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}}$ *számmal helyettesítjük. Igazoljuk, hogy akármilyen (x;y) párt választunk, a 2011. lépés után mindig ugyanazt a számot kapjuk. Melyik ez a szám?*

Megoldás:

$$x; y \to Z = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}}$$

Vegyük észre, hogy

$$\frac{1}{Z}+1=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}+1=\left(\frac{1}{x}+1\right)\left(\frac{1}{y}+1\right),$$

azaz ha tekintjük a táblán szereplő számok helyett a reciprokaik 1-gyel növelt értékét, akkor ezek szorzata a lépés során nem változik meg.
Kezdetben:

$$\left(\frac{1}{1}+1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdot\left(\frac{1}{3}+1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{2012}+1\right)=\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{2013}{2012}=2013.$$

Így az utoljára maradt A számra: $\frac{1}{A}+1=2013$, melyből $A=\frac{1}{2012}$.

3. *Az $A_1A_2...A_n$ $(n\geq 3)$ konvex sokszög A_1 csúcsába 1-et, a többi csúcsba 0-t írtunk. A csúcsokba írt számok a következő szabály szerint változtathatók: ha az A_i csúcsban 1 áll, és az A_{i-1}, A_i, A_{i+1} csúcsokban álló számokat rendre a, b, c jelöli, akkor ezek a számok egyidejűleg rendre az $1-a, 1-b, 1-c$ számokra cserélhetők. Elérhető-e véges sok ilyen lépéssel, hogy mindegyik csúcsban 0 álljon, ha a, $n=2004$; b, $n=2005$?*

Megoldás:

A feladat szövegében ugyanis nincs benne, de természetesen $A_0=A_n$ és $A_{n+1}=A_1$.

a) Belátjuk, hogy ha $n=3k$, akkor a kívánt elrendezés nem érhető el véges sok lépésben.
Állításunkkal ellentétben tegyük fel, hogy véges sok lépébben elérhető a „csupa 0” állapot. Jelölje a_i az A_i csúccsal mint középponttal végrehajtott változtatások számát $(i=1,2,...,n)$. Mivel minden egyes változtatás az 1-esek számát páratlan számmal (1-gyel vagy 3-mal) változtatja meg, és kezdetben egy darab 1-es volt, a végén pedig nincs 1-es volt, a végén pedig nincs 1-es, azért az
$$S=a_1+a_2+...+a_n$$
összeg páratlan.

Csoportosítsuk S tagjait a következőképpen:

$$S=\left(a_1+a_2+a_3\right)+\left(a_4+a_5+a_6\right)+...+\left(a_{3k-2}+a_{3k-1}+a_{3k}\right).$$

$a_1+a_2+a_3$ az A_2-beli 0-1 cserék száma, és mivel A_2-ben kezdetben is és a végén is 0 áll, ezért ez az összeg páros. Ugyanez igaz az S minden egyes három tagból álló egységére is, ami ellentmond annak, hogy S páratlan. Ez az ellentmondás bizonyítja állításunkat.

b) Belátjuk, hogy ha $n=3k+1$, akkor véges sok lépésben elérhető a „csupa 0” állapot. Hajtsuk végre rendre az $A_1,A_2,A_3,...,A_{n-2}$ pontokkal mint középpontokkal a transzformációt. A következő állapotot kapjuk:

$$\begin{array}{cccccccc} A_1 & A_2 & A_3 & \dots & A_{n-3} & A_{n-2} & A_{n-1} & A_n \\ 1 & 1 & 1 & & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \qquad (1)$$

Ezután k darab, 1-esekből álló hármas csoportra egymás után végrehajtva a transzformációt, kapjuk, hogy

$$\begin{array}{cccccccc} A_1 & A_2 & A_3 & \dots & A_{n-3} & A_{n-2} & A_{n-1} & A_n \\ 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \qquad (2)$$

(2)-ből egymást követő, csak 1-eseket tartalmazó hármas csoportokat változtatva elérhető, hogy nem marad 1-es, azaz $n=3k+2$ esetén is megvalósítható a kívánt állapot.

FÜGGETLENÜL

1. *Mutassuk meg, hogy az*

$$(x-a)(x-b)+(x-a)(x-c)+(x-b)(x-c)=0$$

egyenlet gyökei mindig valósak.

I. Megoldás:

A zárójelek felbontása és az összevonások után a következő alakot nyerjük:

$$3x^2-2(a+b+c)x+ab+bc+ca=0$$

Akkor és csak akkor van valós gyöke, ha $D\ge 0$.

$$D=4(a+b+c)^2-12(ab+bc+ca)\overset{?}{\ge}0$$

$$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca\overset{?}{\ge}0$$

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0$$

ez pedig triviálisan igaz.

II. Megoldás:

Olyan esetben, amikor a feladat csak a valós gyök létezésének bizonyítását igényli, célszerű a 0-ra redukált alak nem nulla oldalát függvénynek tekinteni, s megmutatni, hogy van pozitív és negatív helyettesítési érték is, s ez (folytonos függvény esetén) biztosítja a zérushely, azaz az egyenlet valós gyökének létezését. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $a\le b\le c$.

$$f(x):=(x-a)(x-b)+(x-b)(c-x)+(c-x)(x-a)$$

Így

$$f(a)=(a-b)(a-c)\ge 0\,,$$

$$f(b)=(b-c)(b-a)\le 0\,,$$

$$f(c)=(c-a)(c-b)\ge 0\,.$$

Ha valamelyiknél az egyenlőség áll fenn, akkor máris van zérushely, azaz gyök. Amennyiben mindhárom esetben szigorú egyenlőtlenség áll fenn, úgy a és b között is, és b és c között is van valós gyök.

2. *Bizonyítsd be, hogy ha a, b és c egy háromszög oldalai, akkor a*

$$b^2x^2+\left(b^2+c^2-a^2\right)x+c^2=0$$

egyenletnek nem lehet valós gyöke.

Megoldás:

Egy másodfokú egyenletnek pontosan akkor nincs valós gyöke, ha diszkriminánsa negatív.

$$D=\left(b^2+c^2-a^2\right)^2-4b^2c^2$$

$$D=\left(b^2+c^2-a^2\right)^2-(2bc)^2=\left(b^2+c^2-a^2+2bc\right)\left(b^2+c^2-a^2-2bc\right)=$$

$$=\left[(b+c)^2-a^2\right]\left[(b-c)^2-a^2\right]=(b+c-a)(b+c+a)(b-c+a)(b-c-a)<0\,,$$

mert a háromszög-egyenlőtlenség szerint az első három tényező pozitív, míg az utolsó negatív.

3. *Bizonyítsd be, hogy ha $a<b<c<d$, akkor az*

$$(x-a)(x-c)+k(x-b)(x-d)=0$$

egyenlet gyökei tetszőleges $k\in R$ esetén valósak.

A legtöbb esetben az alábbi megoldást kapjuk a tanulóktól, holott a feladatbeli kitűzője segít a megadott alakkal.

I. Megoldás:

Végezzük el a zárójelek felbontását és hozzuk az alábbi alakra:

$$(k+1)x^2-(a+c+kb+kd)x+ac+kbd=0\,.$$

$k=-1$ esetén: $(b-a+d-c)x=bd-ac$.

A feltétel szerint x együtthatója pozitív, így pontosan egy valós gyök van.
Ha $k\neq -1$, akkor az egyenlet másodfokú, s így a valós gyök létezésének szükséges és elégséges feltétele a diszkrimináns nem negatív volta.

$$D=(a+c+kb+kd)^2-4(k+1)(ac+kbd)=$$
$$=(b-d)^2k^2+2(ab+ad+bc+cd-2ac-2bd)k+(a-c)^2$$

azaz a diszkrimináns k-nak másodfokú minimumos függvénye. Ez akkor lesz tetszőleges valós k-ra nem negatív, ha az „ő diszkriminánsa” nem pozitív.

$$D^*=4(ab+ad+bc+cd-2ac-2bd)^2-4(b-d)^2(a-c)^2=$$
$$=4\left[(ab+ad+bc+cd-2ac-2bd)^2-(ab-ad-bc+cd)^2\right]=$$
$$=4(ab+ad+bc+cd-2ac-2bd+ab-ad-bc+cd)\cdot$$
$$\cdot(ab+ad+bc+cd-2ac-2bd-ab+ad+bc-cd)=$$
$$=16(ab+cd-ac-bd)(ad+bc-ac-bd)=16(b-c)(a-d)(d-c)(a-b)$$

ez pedig – a feltételek szerint negatív. Ezzel az állítást beláttuk.

II. Megoldás:

Az egyenlet baloldala bármely valós k esetén x-nek folytonos függvénye. Tekintsük a következő helyettesítési értékeket:

$$f(a)=k(a-b)(a-d)$$
$$f(b)=(b-a)(b-c)$$
$$f(c)=k(c-b)(c-d)$$
$$f(a)=(d-a)(d-c)$$

A feltételek szerint $f(b)<0$; $f(d)>0$, így van valós zérushely, azaz az egyenletnek van valós gyöke.
(k előjele szerinti vizsgálódással azt is megállapíthatjuk, hogy mely értékek közé esnek a zérushelyek.)

4. *Tekintsük a következő másodfokú függvénycsaládot:*

$$f_m(x) = mx^2 - (4m-3)x + 4m + 5 \text{ , } \textit{ahol } m \in R \setminus \{0\} \text{ .}$$

a) Mi a parabolák csúcspontjainak mértani helye?
b) Igazold, hogy a parabolák átmennek egy rögzített ponton.

Megoldás:

a) Hozzuk ábrázolható alakra:

$$f_m(x) = m\left(x - \frac{4m-3}{2m}\right)^2 + \frac{44m-9}{4m}$$
$$u = \frac{4m-3}{2m}$$
$$v = \frac{44m-9}{4m}$$

Kiküszöbölve a paramétert adódik: $v = \frac{3}{2}u + 8$, azaz a csúcspontok illeszkednek az $y = \frac{3}{2}x + 8$ egyenesre.

Megmutatjuk, hogy a $(2;11)$ pont kivételével ki is töltik azt. Legyen $P\left(x_0; \frac{3}{2}x_0 + 8\right)$ tetszőleges – a $(2;11)$ ponttól különböző – pontja az egyenesnek. Könnyen látható, hogy ez az $m = \frac{3}{4-2x_0}$ paraméter értékhez tartozó parabolának a csúcspontja.

b) <u>I. Megoldás:</u>

Tekintsük pl. az $m = 1$ illetve $m = 2$ paraméter értékekhez tartozó parabolákat, határozzuk meg ezek metszéspontját

$$y = x^2 - x + 9$$
$$y = 2x^2 - 5x + 13$$

Ezekből: $x^2 - 4x + 4 = 0$, $x = 2 \Rightarrow y = 11$, azaz ha van ilyen pont, akkor az csak a $(2;11)$ pont lehet. Meg kell még mutatnunk, hogy erre az összes parabola illeszkedik:

$$f_m(2) = m \cdot 4 - (4m - 3) \cdot 2 + 4m + 5 = 11,$$

azaz az *m* valós paraméter értékétől függetlenül a grafikonok illeszkednek a $(2;11)$ pontra.

II. Megoldás:

Az alapgondolat a következő: megnézzük, hogy hogyan függ *m*-től, s mi annak a feltétele, hogy ne függjön tőle.

$$f_m(x) = m\left(x^2 - 4x + 4\right) + 3x + 5$$

$x^2 - 4x + 4 = 0$ esetén, azaz $x = 2$ esetén a függvény helyettesítési értéke nem függ *m*-től.
Ez utóbbi feladat rámutat a feladat készítésének hátterére.

5. *Tekintsük a következő másodfokú függvénycsaládot:*

$$f_m(x) = mx^2 - (m+2)x - 12m - 1, \text{ ahol } m \in R \setminus \{0\}.$$

Igazold, hogy van két rögzített pont, amelyre a család összes parabolája illeszkedik!

Megoldás:

Lásd a 4. feladat megoldását.

6. *Egy n x n-es táblázatba beírjuk sorban az* $1, 2, \ldots n^2$ *számokat:*

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & \ldots & n \\ n+1 & n+2 & \ldots & 2n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n^2-n+1 & n^2-n+2 & \ldots & n^2 \end{array}$$

Minden sorból kiválasztunk egy-egy számot úgy, hogy semelyik kettő ne legyen ugyanabban az oszlopban.
Mik a kiválasztott számok összegének lehetséges értékei?

Megoldás:

A számtáblázat *a*-adik sorának *b*-edik eleme $(a-1)\cdot n+b$-vel egyenlő $(1\le a\le n, 1\le b\le n)$.
Ha minden sorból kiválasztunk egy számot, akkor összesen *n* darabot veszünk ki, és mivel ezek közül semelyik kettő nem lehet ugyanabban az oszlopban, így minden sorból és oszlopból pontosan egy elemet választottunk. Ha az *i*-edik sorban a b_i-edik elemet választjuk ki, akkor a kiválasztott elemek összege

$$0\cdot n+b_1+1\cdot n+b_2+2\cdot n+b_3+\ldots+(n-1)\cdot n+b_n =$$
$$(*)\quad =\frac{(n-1)\cdot n}{2}\cdot n+b_1+b_2+\ldots+b_n .$$

Tudjuk, hogy $1\le b_i\le n$, és minden érték szerepel, ezért az összegük $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$.
Eszerint (*) értéke:

$$\frac{(n-1)\cdot n}{2}\cdot n+\frac{n\cdot(n+1)}{2}=\frac{n^2(n-1)+n\cdot(n+1)}{2}=\frac{n^3+n}{2},$$

és ez az összeg független a megváltozott számoktól.

7. *Legyen az n pozitív páros szám. Írjuk fel az* $1, 2, ...n^2$ *számokat egy nxn-e táblázat mezőibe úgy, hogy a táblázat k-adik sorában az elemek ballról jobbra olvasva rendre:* $(k-1)n+1; (k-1)n+2; ...; (k-1)n+n$ *legyenek* $(k=1, 2, ..., n)$. *Színezzük ki az így kitöltött táblázat mezőit bordó és sárga színnel úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban a mezők fele bordó, a másik fele pedig sárga legyen. (pl. sakktábla). Bizonyítsuk be, hogy minden ilyen színezésre a bordó és a sárga mezőkön levő számok összege egyenlő.*

Megoldás:

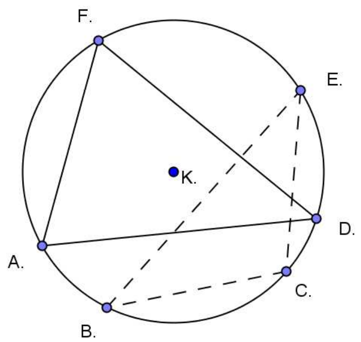
Az n^2 darabszám mindegyike $qn+m$ alakban szerepel ahol $m \in \{1; 2; ...; n\}$ és $q \in \{0; 1; ...; n-1\}$. Nevezzük az első tagot az *n*-es résznek, a másikat pedig maradéknak. A feladat állítását úgy igazoljuk, hogy megmutatjuk, a sárga színű *n*-es részek összege egyenlő a bordó színű *n*-es részek összegével. A kétféle tag megkülönböztetését az indokolja, hogy bármelyik sorban az *n*-es tagok egyenlőek. Így, a sárga színű *n*-es tagokat soronként összegezve láthatjuk, hogy minden sorban az összegük az ugyanazon sorban lévő bordó színű *n*-es tagok összegével egyenlő, hiszen a tagok mind egyenlőek és a feladat feltételei szerint ugyanannyian vannak. Ugyanezt mondhatjuk el a maradékokról is, amelyeket viszont oszloponként összegzünk: egy oszlopban *n* db egyenlő maradék van, ezek fele sárga, fele pedig bordó színű, ezért összegük az oszlopon belül – tehát az egész táblázatban is – egyenlő.

8. *Adott egy körön hat különböző pont. Kiválasztunk a pontok közül hármat, és az ezek által meghatározott háromszög magasságpontját összekötjük a másik három pont által meghatározott háromszög súlypontjával. Mutassuk meg, hogy az „ilyen típusú” egyenesek egy pontban metszik egymást!*

Megoldás:

Legyen a kör középpontja a vonatkoztatási pont, s a megfelelő helyvektorokat jelöljük a megfelelő *k* kis betűkkel. Ekkor pl. az ADF_Δ magasságpontjába mutató helyvektor $\underline{m} = \underline{a} + \underline{d} + \underline{f}$. A BCE_Δ súlypontjába mutató helyvektor $\underline{s} = \frac{\underline{b}+\underline{c}+\underline{e}}{3}$.

Tekintsük az $\overline{MS}$ *S*-hez közelebb eső negyedelő-pontját, legyen ez *P*.



$$\underline{P}=\frac{3\underline{s}+\underline{m}}{4}=\frac{\underline{b}+\underline{c}+\underline{e}+\underline{a}+\underline{d}+\underline{f}}{4},$$

ez pedig csak a hat adott ponttól függ, azaz ez bármely választás esetén az $\overline{MS}$ negyedelő pontja, vagyis az „ilyen típusú” egyenesek ezen pontra illeszkednek.

9. *Egy konvex négyszög minden oldalát osszuk fel n egyenlő részre, majd a megfelelő osztópontjait kössük össze. Az így keletkező n^2 db négyszög közül kiválasztunk n darabot úgy, hogy minden „oszlopból” és minden „sorból” pontosan egyet veszünk. Mutassuk meg, hogy a kiválasztott négyszögek területeinek összege az eredeti négyszög területének az n-ed része.*

Megoldás:

a) Megmutatjuk, hogy a közbülső osztópontok *n*-edelő pontok.

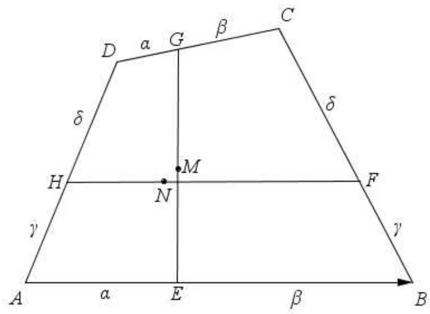
b) Megmutatjuk, hogy miden sorban, illetve minden oszlopban a területek ugyanakkora differenciájú számtani sorozatot alkotnak. Válasszuk vonatkoztatási pontnak *A*-t.
Ekkor:

$$\underline{e}=\frac{\alpha\underline{b}}{\alpha+\beta}$$

$$\underline{f}:\frac{\gamma\underline{c}+\delta\underline{b}}{\gamma+\delta}$$

$$\underline{g}:\frac{\alpha\underline{c}+\beta\underline{d}}{\alpha+\beta}$$

$$\underline{h}:\frac{\gamma\underline{d}}{\gamma+\delta}$$



Azt mutatjuk meg, hogy ekkor az *EG* és *HF* szakaszok is $\gamma:\delta$ illetve $\alpha:\beta$ arányban osztják egymást. Ezt pedig oly módon látjuk be, hogy megmutatjuk a két – megfelelő osztásarányú pont – ugyanaz.

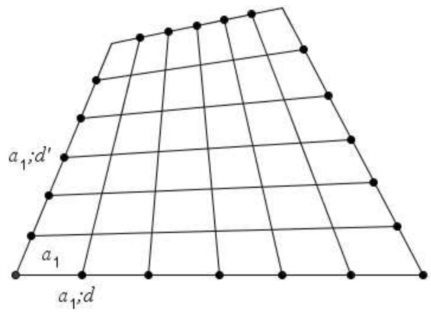
$$\underline{m}=\frac{\frac{\delta\alpha\underline{b}}{\alpha+\beta}+\gamma\cdot\frac{\alpha\underline{c}+\beta\underline{d}}{\alpha+\beta}}{\gamma+\delta}=\frac{\alpha\delta\underline{b}+\gamma\alpha\cdot\underline{c}+\beta\gamma\underline{d}}{(\alpha+\beta)(\alpha+\delta)}$$

$$\underline{n}=\frac{\alpha\frac{\gamma\underline{c}+\delta\underline{b}}{\gamma+\delta}+\beta\cdot\frac{\gamma\underline{d}}{\gamma+\delta}}{\alpha+\beta}=\frac{\alpha\gamma\underline{c}+\alpha\delta\underline{b}+\beta\gamma\underline{d}}{(\alpha+\beta)(\alpha+\delta)}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{m}=\underline{n}$$

$$M\equiv N$$



Az – szinte – triviális, hogy ekkor a területek mérőszámai soronként is, s oszloponként is számtani sorozatot alkotnak.
Az összeadást – mindkét esetben – úgy végezzük, hogy külön adjuk össze az a_1-eket, külön a d-ket, s külön a d'-ket.

Az összterület:

$$n^2a_1+\left[1+2+...+(n-1)\right]nd+\left[1+2+...+(n-1)\right]n\cdot d'=$$

$$=n^2a_1+\frac{(n-1)n^2}{2}(d+d').$$

A kiválasztott négyszögek területösszege:

$$na_1+\left[1+2+...+(n-1)\right]d+\left[1+2+...+(n-1)\right]d',$$

s ez valóban a négyzet területének az n-ed része.

Felhasznált irodalom:

- Erdélyi Magyar Matematikaverseny 2012.
- A matematika tanítása
- KÖMAL
- Internet