ALGEBRA FELADATOK

MEGOLDÁSOK

MÁSODFOKÚ POLINOMOK

1.
Jelölje az egyenlet két megoldását x_1 és x_2. A Viéte-formulák miatt

$$198 = p + q = -\left(x_1 + x_2\right) + x_1 x_2 = \left(x_1 - 1\right)\left(x_2 - 1\right) - 1,$$

ahonnan

$$199 = \left(x_1 - 1\right)\left(x_2 - 1\right).$$

Mivel a 199 prímszám, ezért csakis $1 \cdot 199$ illetve $(-1) \cdot (-199)$ formában állhat elő két egész szám szorzataként, amiből az egyenlet megoldásai: 2 és 200 illetve 0 és –198. Könnyű ellenőrizni, hogy ezek meg is felelnek.

2.
A Viéte-formulák szerint

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = pq, \\ x_1 x_2 = p + q. \end{cases}$$

Ezekből látszik, hogyha a gyökök egészek, akkor pozitív egészek, továbbá

$$\left(x_1 - 1\right)\left(x_2 - 1\right) + \left(p - 1\right)\left(q - 1\right) = 2.$$

Innen következik, hogy csak alábbi esetek lehetségesek:
a) $p = 1$, ekkor

$$\left(x_1 - 1\right)\left(x_2 - 1\right) = 2,$$

ahonnan

$$x_1 = 2,\ x_2 = 3 \text{ vagy } x_1 = 3,\ x_2 = 2 \Rightarrow q = 5,$$

b) $q = 1 \Rightarrow p = 5$,
c) ha $p > 1,\ q > 1$, akkor $p = q = 2$ esetén $x_1 = x_2 = 2$,
d) $p = 2,\ q = 3 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 5$ vagy $x_1 = 5,\ x_2 = 1$,
e) $p = 3, q = 2$, ami az előző pontban látottakat adja.
Könnyű ellenőrizni, hogy a kapott p, q párokra felírt másodfokú egyenleteknek valóban azok az $x_1,\ x_2$ számok a gyökei, amelyek a fentiekben adódtak.

3.

Legyen $f(x)=x^2+px+q$ és tegyük fel indirekt, hogy van olyan valós x szám, amelyre $f(x)\le 0$. Ismeretes, hogy f abszolút minimumhelye $-\frac{p}{2}$, így a fenti egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha $f\left(-\frac{p}{2}\right)\le 0,$ ekkor

$$D=p^2-4q\ge 0 \Leftrightarrow q\le \frac{p^2}{4}.$$

Legyen $\left[-\frac{p}{2}\right]=a,$ így

$$a<-\frac{p}{2}<a+1 \Leftrightarrow -2a>p>-2a-2 \Rightarrow p=-2a-1.$$

($-\frac{p}{2}$ nem lehet egész, hiszen egész helyeken $f(x)>0$!) Ha x_1 és x_2 az f gyökei, akkor, mivel az $[x_1,x_2]$ intervallumon f nem pozitív, ezért az intervallum nem tartalmazhat egész számot, így

$$|x_1-x_2|<1 \Leftrightarrow x_1^2-2x_1x_2+x_2^2<1 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2<1.$$

Felhasználva a Viéte-formulákat adódik, hogy

$$p^2-4q<1 \Leftrightarrow \frac{p^2-1}{4}<q,$$

ezért

$$\frac{p^2-1}{4}<q\le\frac{p^2}{4},$$

$$a^2+a<q\le a^2+a+\frac{1}{4},$$

ami ellentmond annak, hogy q egész számot jelöl. A kapott ellentmondás bizonyítja, hogy $f(x)>0$ minden valós x-re teljesül.

4.

Ha x közös gyöke a két polinomnak, akkor különbségképzés után:

$$(a-c)x+b-d=0.$$

Innen látszik, hogy $a=c$ esetén $b=d$. Tegyük fel, hogy $a\ne c,$ akkor

$$x = \frac{d-b}{a-c},$$

ahol $d - b \neq 0$, hiszen x nem egész. Világos viszont, hogy x racionális. A másodfokú egyenlet megoldóképlete szerint az első egyenlet megoldásai

$$\frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

Ezek pontosan akkor racionálisak, ha $a^2 - 4b$ teljes négyzet, így négyzetgyöke egész szám. Mivel a és $a^2 - 4b$ paritása azonos, így, ha a gyökök racionálisak, akkor egészek is, ami ellentmondásra vezet. Ez azt jelenti, hogy $a = c$, amiből $b = d$ és ez a feladat állítása.

5.

Az egyenlet diszkriminánsa $D = 9 - 4q$, ezért pontosan akkor vannak valós megoldásai, ha $\frac{9}{4} \geq q$. A Viéte-formulákat alkalmazva:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 3, \\ \alpha\beta = q. \end{cases}$$

Innen

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 9 - 2q,$$

valamint

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 27 - 9q.$$

Vegyük észre, hogy

$$\alpha^5 + \beta^5 = (\alpha^3 + \beta^3)(\alpha^2 + \beta^2) - \alpha^2\beta^2(\alpha + \beta) =$$
$$= (27 - 9q)(9 - 2q) - 3q^2 = 15q^2 - 135q + 243.$$

Így akkor

$$15q^2 - 135q - 1350 = 0,$$
$$q^2 - 9q - 90 = 0.$$

A kapott másodfokú egyenlet megoldásai $q = 15$, illetve $q = -6$, melyek közül a diszkriminánsra vonatkozó feltételnek csak $q = -6$ felel meg.

6.*

Jelölje a polinomot $f(x)$, a gyökei pedig legyenek $0 < x_1 < 1$ és $0 < x_2 < 1$. Az egyenlet gyöktényezős alakja szerint:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2),$$

így

$$f(0)=ax_1x_2,$$
$$f(1)=a(1-x_1)(1-x_2),$$

továbbá

$$f(0)=c,$$
$$f(1)=a+b+c,$$

ahonnan

$$f(0)f(1)=c(a+b+c).$$

Ez a szám egész, továbbá pozitív, hiszen *f* grafikonja felfelé nyíló parabola. Így akkor

$$1\le f(0)f(1)=a^2x_1(1-x_1)x_2(1-x_2).$$

Mivel

$$z(1-z)\le\frac{1}{4}\Leftrightarrow 0\le\left(z-\frac{1}{2}\right)^2,$$

ami triviálisan igaz, ezért

$$1\le a^2x_1(1-x_1)x_2(1-x_2)<\frac{a^2}{16},$$

hiszen $x_1\ne x_2$. Innen

$$16<a^2,$$

vagyis *a* legkisebb értéke legalább 5. Könnyű ellenőrizni, hogy az

$$f(x)=5x^2-5x+1$$

polinom teljesíti a feltételeket, tehát $a=5$ a legkisebb megfelelő érték.

7.

Ha az

$$f(x)=x\Leftrightarrow f(x)-x=0$$

egyenletnek nincs valós megoldása, akkor $f(x)>x$ vagy $f(x)<x$ minden valós *x* esetén, hiszen $f(x)$ folytonos függvény. Így viszont

$$f(f(f(x)))>f(f(x))>f(x)>x \text{ vagy } f(f(f(x)))<f(f(x))<f(x)<x$$

minden valós *x*-re, tehát az

$$f(f(f(x)))=x$$

egyenletnek sincsen valós megoldása.

Megjegyzés:
A valós számok valamely intervallumán értelmezett függvény folytonossága pontbeli tuljdonság. Azt mondjuk, hogy az f függvény folytonos az intervallumba eső x_0 helyen, ha bármely $f(x)$ függvényérték közel van az $f(x_0)$ értékéhez, feltéve, hogy x elegendően közel van az x_0 helyhez. Egy intervallumon akkor mondjuk folytonosnak a függvényt, ha annak minden pontjában folytonos. (Ez a folytonos vonallal való megrajzolhatóság matematikai kifejezése. A pontos definíciót illetően lásd: Laczkovich Miklós-T. Sós Vera: Analízis I. kötet 124. oldalát.)
A zárt intervallumon folytonos függvényekre vonatkozó egyik fontos tétel az ún. közbülső érték tétel vagy Bolzano-Darboux-tétel. Ez azt mondja ki, hogyha f folytonos a zárt $[a,b]$ intervallumban, akkor f az $[a,b]$ intervallumban felvesz minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti értéket. (Bizonyítását illetően lásd: i.m. 159. oldal.) Speciális esetben, ha $f(a)$ és $f(b)$ előjele ellentétes, akkor adódik, hogy $f(x)$ -nek van zérushelye a és b között.

8.*
Legyen $f(x) = ax^2 + bx + c$ és $g(x) = cx^2 + bx + a$. Ekkor

$$|f(0)| = |c| \le 1, \quad f(1) = g(1), \quad f(-1) = g(-1).$$

Ha $g(x)$ szélsőértékeit a $[-1;1]$ intervallum valamely végpontjában veszi fel, akkor a fentiek miatt készen vagyunk. Tegyük most fel, hogy $g(x)$ szélsőértékeinek (legalább) egyikét belső pontban veszi fel és jelöljük ezt a helyet x_0 -lal. Tegyük fel indirekt, hogy van olyan x_0, ahol $|g(x_0)| > 2.$ Mivel

$$g(x) = c(x - x_0)^2 + g(x_0),$$

továbbá x_0 -nak az 1 ill. -1 számoktól vett kisebbik távolsága legfeljebb 1, ezért feltéve, hogy ez a távolság az 1-től számított (ez nem jelent megszorítást):

$$|g(x_0)| = \left|g(1) - c(1 - x_0)^2\right| \le |g(1)| + |c| \cdot |1 - x_0|^2 \le 1 + |c| \le 2,$$

felhasználva az ún. háromszög-egyenlőtlenséget. Ellentmondásra jutottunk, ezzel a feladat állítását beláttuk.

9.*
Az $f(x) = x^2 - ax - b$ függvény grafikonja felfelé nyíló parabola, abszolút minimumhelye $x = \frac{a}{2}.$ Ezért, ha $a \le 0,$ akkor a függvény a $[0;1]$ intervallumon szigorúan monoton növekedő, a növekedés:

$$f(1) - f(0) = 1 - a - b + b = 1 - a \ge 1,$$

ezért a feladatban szereplő egyenlőtlenség nem teljesülhet. Ha $a \geq 2$, akkor a függvény a $[0;1]$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő, a csökkenés:

$$f(0) - f(1) = -b - (1 - a - b) = a - 1 \geq 1,$$

ezért a feladatban szereplő egyenlőtlenség most sem teljesülhet. Tehát $0 < a < 2$.
A következő egyenlőtlenségek rendre az $x = 0$, $x = 1$ és $x = \frac{a}{2}$ helyettesítéseket alkalmazva adódnak:

$$|b| \leq \frac{1}{8},$$
$$|1 - a - b| \leq \frac{1}{8},$$
$$\left|\frac{a^2}{4} + b\right| \leq \frac{1}{8}.$$

Alkalmazva a háromszög-egyenlőtlenséget a második és harmadik becslésből adódik, hogy

$$\left|1 - a + \frac{a^2}{4}\right| \leq |1 - a - b| + \left|\frac{a^2}{4} + b\right| \leq \frac{1}{4},$$
$$\left|\left(1 - \frac{a}{2}\right)^2\right| \leq \frac{1}{4} \Rightarrow 1 \leq a.$$

A háromszög-egyenlőtlenséget az első és harmadik becslésre alkalmazva:

$$\frac{a^2}{4} \leq |-b| + \left|\frac{a^2}{4} + b\right| \leq \frac{1}{4},$$
$$\frac{a^2}{4} \leq \frac{1}{4},$$
$$a \leq 1.$$

Azt kaptuk, hogy $a = 1$, ezért

$$\left|\frac{1}{4} + b\right| \leq \frac{1}{8} \Leftrightarrow -\frac{3}{8} \leq b \leq -\frac{1}{8},$$

továbbá

$$-\frac{1}{8} \leq b \leq \frac{1}{8},$$

ahonnan $b=-\frac{1}{8}$. Könnyű róla meggyőződni, hogy az $f(x)=x^2-x+\frac{1}{8}$ másodfokú polinom megfelel, a gondolatmenetből pedig kiderült, hogy más nem lehet jó.

10.

Jelölje x_1 és x_2 az $f\left(f(x)\right)$ polinom azon két valós gyökét, melyek összege -1 és legyen

$$f(x_1)=c_1,\ f(x_2)=c_2.$$

Ekkor

$$f(c_1)=0,\ f(c_2)=0.$$

Mivel

$$x_1^2+ax_1+b=c_1,$$
$$x_2^2+ax_2+b=c_2,$$

így

$$x_1^2+x_2^2+a\left(x_1+x_2\right)+2b=c_1+c_2.$$

A c_1 és c_2 megoldásai az $f(x)=0$ egyenletnek, ezért a Viéte-formulák szerint $c_1+c_2=-a$. Behelyettesítve:

$$x_1^2+x_2^2+2b=0\Leftrightarrow b=-\frac{1}{2}\left(x_1^2+x_2^2\right).$$

Tekintettel arra, hogy

$$2\left(x_1^2+x_2^2\right)\geq\left(x_1+x_2\right)^2\Leftrightarrow\left(x_1-x_2\right)^2\geq 0,$$

adódik, hogy

$$b\leq-\frac{1}{4}\left(x_1+x_2\right)^2=-\frac{1}{4},$$

ami éppen a feladat állítása.

HARMADFOKÚ POLINOMOK

11.
a) Jelöljük a feladatban szereplő számot x-szel. Köbre emelés után, alkalmazva az $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$ azonosságot:

$$4 - 3x = x^3,$$
$$0 = x^3 + 3x - 4.$$

Könnyű látni, hogy az utolsó egyenletnek $x = 1$ megoldása, ezért a jobb oldalon álló polinomból $x - 1$ kiemelhető:

$$x^3 + 3x - 4 = (x-1)(x^2 + x + 4).$$

Mivel a második tényező nem lehet 0 (diszkriminánsa negatív), így a feladatban szereplő kifejezés 1-gyel egyenlő, tehát racionális szám.
b) Az előzőekben teljesen hasonló módon eljárva adódik a következő egyenlet:

$$x^3 - 3x - 6 = 0.$$

Tegyük fel, hogy az egyenletnek van racionális megoldása. Ekkor $x = \frac{p}{q}$, ahol $p,\ q \in \mathbb{Z},\ q \geq 1$ és $(p,q) = 1.$ Behelyettesítve:

$$\frac{p^3}{q^3} - 3\frac{p}{q} - 6 = 0 \Leftrightarrow p^3 - 3pq^2 - 6q^3 = 0.$$

Mivel innen adódik, hogy q osztója p^3-nak, továbbá feltettük, hogy p és q relatív prímek, ezért csakis $q = 1$ jöhet szóba. (Ez azt jelenti, hogy az egyenlet minden racionális megoldása egész szám.) Így adódik az egyenletből, hogy x csakis a 6 osztója lehet. Ezeket az osztókat ellenőrizve kiderül, hogy egyik sem felel meg, ezért az egyenletnek nincs racionális megoldása. Ez pedig azt eredményezi, hogy a kifejezés értéke nem racionális szám.

Megjegyzés:
Ha $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n+1} + \ldots + a_1 x + a_0$ egész együtthatós n-ed fokú polinom, akkor racionális gyökeire vonatkozó szükséges feltételt fogalmaz meg Rolle tétele:
amennyiben $x = \frac{p}{q}$, ahol $p, q \in \mathbb{Z},\ q \geq 1,\ (p,q) = 1,$ a polinom gyöke, akkor p osztója a_0-nak és q osztója a_n-nek. A tétel bizonyítását a feladat b) részében látott gondolatmenetet alkalmazva az olvasó maga is könnyen elvégezheti. A tételből könnyen kiolvasható, hogyha a főegyüttható 1, akkor minden racionális gyök egész szám.

12.

Legyen $f(x)=x^3-x-1$. Mivel $f(1)=-1$ és $f(2)=5$, továbbá *f* folytonos függvény, így az ún. közbülső értékre vonatkozó tétel miatt (lásd a **7.** feladat megoldása utáni megjegyzést) van zérushely az $]1;2[$ intervallumban. Ezt α-val jelölve, mivel $\alpha^3=\alpha+1$, így

$$3\alpha^2+4\alpha+2=3\alpha^2+4\alpha^3-2=\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+1=(1+\alpha)^3,$$
$$3\alpha^2-4\alpha=3\alpha^2-4\alpha^3+4=1-3\alpha+3\alpha^2-\alpha^3=(1-\alpha)^3,$$

ezért a feladatban szereplő kifejezés értéke 2.

13.*

a) Szorzás és rendezés után:

$$(x+1)^3=-2x^3 \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{x}\right)^3=-2,$$

ahonnan

$$x=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}+1}.$$

b) Keressük a megoldást $x=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$ alakban! Mivel

$$x^3=a+b+3\sqrt[3]{ab}\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)=a+b+3\sqrt[3]{ab}x,$$

így

$$x^3-3\sqrt[3]{ab}x-(a+b)=0.$$

Összevetve az eredeti egyenlettel:

$$\begin{cases} ab=-1, \\ a+b=2. \end{cases}$$

Ennek az egyenletrendszernek a megoldásai $1+\sqrt{2}$ és $1-\sqrt{2}$, ahonnan

$$x=\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}.$$

Behelyettesítéssel meggyőződhetünk róla, hogy ez valóban megoldása az egyenletnek.
Kérdés még, hogy van-e az egyenletnek más valós megoldása? Ha létezik, akkor az $f(x)=x^3+3x-2$ függvényre igaz, hogy $f(c)=f(d)=0$, így a függvénytanból ismert Rolle-tétel miatt van olyan $c<x_0<d$ hely, amelyre

$$f'(x_0)=0.$$

De

$$f'(x) = 3x^2 + 3 \geq 3,$$

így nincs más valós zérushely. Ezzel a feladatot megoldottuk.

Megjegyzés:
Rolle tétele azt mondja ki, hogyha az f függvény folytonos az $[a,b]$ intervallumon és differenciálható az $]a,b[$-ben, akkor $f(a) = f(b)$ esetén létezik olyan $a < x_0 < b$ hely, ahol $f'(x_0) = 0$. (Bizonyítása megtalálható például: Laczkovich-T. Sós: Analízis I. kötet 259. oldalán.)

14.
A feladatban szereplő közös értéket a-val jelölve, tekinthetjük úgy, hogy x, y és z különböző gyökei a

$$t^3 - 3t - a$$

polinomnak. A Viéte-formulák szerint:

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ xy + yz + zx = -3, \\ xyz = a. \end{cases}$$

Így akkor

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) = 6.$$

Megjegyzés:
Az ún. Viéte-formulák nemcsak másodfokú, hanem magasabb fokú egyváltozós polinomokra is érvényesek. Az algebra alaptétele kimondja, hogy komplex együtthatókkal bíró legalább elsőfokú egyváltozós polinomnak mindig van gyöke a komplex számok körében. Ebből a gyöktényező kiemelhetőségére vonatkozó tétel (Bézout-tétel) könnyen adódik: ha α gyöke a legalább elsőfokú $p(x)$ polinomnak, akkor $p(x) = (x - \alpha) q(x)$, ahol $q(x)$ a $p(x)$-nél alacsonyabb fokszámú polinom. Legyen ugyanis $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, ahol $a_n \neq 0$ és n pozitív egész szám. Mivel $p(\alpha) = 0$, ezért

$$p(x) = p(x) - p(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(x^k - \alpha^k\right).$$

Ismeretes, hogy

$$x^k - \alpha^k = (x - \alpha)\left(x^{k-1} + x^{k-2}\alpha + ... + x\alpha^{k-2} + \alpha^{k-1}\right),$$

amiből a tétel állítása már kiolvasható.
Ha a gyöktényező kiemelése után kapott $q(x)$ polinom fokszáma legalább 2, akkor ismételjük meg rá a fenti gondolatmenetet és így tovább. Világos, hogy az eljárás $n-1$

lépésben ér véget. Adódik, hogy a $p(x)$ polinomnak pontosan *n* darab komplex gyöke van (ezek között lehetnek ún. többszörös gyökök), továbbá, ha a gyökei $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n,$ akkor

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = a_n(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n).$$

Ezt hívjuk a polinom ún. gyöktényezős alakjának. Mivel azonosságról van szó, ezért a jobboldalon a szorzások tagról tagra való elvégzése és *x* fogyó hatványai szerinti rendezés után olyan polinom áll, amelynek együtthatói rendre megegyeznek a baloldalon álló polinom megfelelő tagjainak együtthatóival. A megfelelő együtthatók összehasonlítása alapján adódnak az ún. Viéte-formulák, a gyökök és együtthatók közötti nevezetes összefüggések:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_1x_n + \dots + x_{n-1}x_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n}, \\ \vdots \\ x_1x_2\dots x_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}. \end{cases}$$

15.*

Tekintsük az alábbi két függvényt:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x = (x-1)^3 + 2(x-1) + 3 \text{ és } g(y) = y^3 + 2y.$$

Látható, hogy $g(y)$ páratlan, azaz $g(-y) = -g(y)$ és szigorúan monoton növekedő, hiszen előáll szigorúan monoton növekedő függvények összegeként.

Mivel

$$g(x-1) = f(x) - 3 = -2,$$
$$g(y-1) = f(y) - 3 = 2,$$

ezért

$$x - 1 = -(y-1) \Leftrightarrow x + y = 2.$$

16.*

Ha $p(x) = x^3 - 3x + 1$, akkor $p(-2) < 0,\ p(0) > 0,\ p(1) < 0,\ p(2) > 0,$ továbbá $p(x)$ folytonos, ezért van valós gyöke a $]-2;0[$, a $]0;1[$ és az $]1;2[$ intervallumban is, ezeken kívül viszont nem lehet, hiszen $p(x)$-nek legfeljebb három valós gyöke lehet. Így akkor $0 < b < c.$ Megmutatjuk, hogyha *a* gyöke a polinomnak, akkor $a^2 - 2$ is gyöke:

$$(a^2-2)^3 - 3(a^2-2) + 1 = a^6 - 6a^4 + 9a^2 - 1,$$

továbbá

$$a^3 = 3a - 1 \Rightarrow a^6 = 9a^2 - 6a + 1,\ a^4 = 3a^2 - a,$$

ezért

$$9a^2 - 6a + 1 - 18a^2 + 6a + 9a^2 - 1 = 0,$$

ami igazolja állításunkat. Vegyük észre, hogy

$$a^2 - 2 = a,\ \ a^3 - 3a + 1 = 0$$

egyszerre nem teljesülhetnek, hiszen akkor *a*-val való szorzás után

$$a^3 - a^2 - 2a = 0 \Rightarrow a^2 - a + 1 = 0,$$

aminek viszont nincs valós gyöke. Ez azt jelenti, hogy

$$a^2 - 2 = b \text{ vagy } a^2 - 2 = c.$$

Mivel a a legkisebb gyök, a fentiek miatt $a < a^2 - 2$, továbbá $a^2 - 2 = b$ nem lehetséges, mert $c^2 - 2 > b^2 - 2$ miatt $c^2 - 2 = b$, ezért ellentmondásra jutnánk. Kaptuk, hogy

$$a^2 - 2 = c,\ b^2 - 2 = a,\ c^2 - 2 = b,$$

ami éppen a feladat állítása.

Megjegyzés:
Az egyenletet meg is oldhatjuk. Keressük a megoldásokat $x = 2\sin\varphi$ formában, ahol $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, ekkor az egyenletet átírhatjuk

$$8\sin^3\varphi - 6\sin\varphi + 1 = 0$$

alakba. Innen

$$3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 3\varphi = \frac{1}{2},$$

így a megoldások:

$$a = -2\sin\frac{7\pi}{18},\ b = 2\sin\frac{\pi}{18},\ c = 2\sin\frac{5\pi}{18}.$$

Ezekből trigonometriai azonosságok felhasználásával is megkapható a feladatban szereplő állítás.

17.
Világos, hogy az $f(x)$ és az $a^2 f(x)$ polinom gyökei ugyanazok a számok. Legyen ezért $y = ax,$ ekkor

$$a^2 f(x) = g(y) = y^3 + by^2 + acy + a^2 d.$$

Tegyük fel indirekt módon, hogy a $g(y)$ polinom mindhárom gyöke racionális szám. Mivel a főegyüttható 1, ezért Rolle tétele miatt (lásd a **11.** példa utáni megjegyzést) a racionális gyökök egész számok lesznek, amelyek osztói $a^2 d$ -nek. Akkor pedig páratlan számok. A Viéte-formulákat felhasználva, a gyökökre:

$$y_1 + y_2 + y_3 = -b,$$
$$y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_1 = ac.$$

Innen kapjuk, hogy b páratlan, továbbá c is páratlan. A feladat szerint viszont bc páros, ami ellentmondás. Ez azt jelenti, hogy feltevésünk hibás volt, amiből következik a feladat állítása.

18.**
a) Figyeljük meg, hogy

$$p(-1) < 0,\ p(0) > 0,\ p(1) < 0,\ p(2) < 0,\ p(3) > 0,$$

így, mivel $p(x)$ folytonos, ezért van valós gyöke a $]-1;0[$, a $]0;1[$ illetve a $]2;3[$ intervallumban. Tekintettel arra, hogy $p(x)$ harmadfokú, több valós gyöke nem is lehet. Jelölje a gyököket $\alpha > \beta > \gamma,$ így $2 < \alpha < 3,\ 0 < \beta < 1,\ -1 < \gamma < 0.$ Vezessük be az

$$S_k = \alpha^k + \beta^k + \gamma^k$$

jelölést. A Viéte-formulák szerint:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 3, \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0, \\ \alpha\beta\gamma = -1, \end{cases}$$

ezért

$$S_2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 9.$$

Mivel

$$(*) \qquad \alpha^3 = 3\alpha^2 - 1,\ \beta^3 = 3\beta^2 - 1,\ \gamma^3 = 3\gamma^2 - 1,$$

így

$$S_3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - 3 = 24.$$

A (*)-gal jelölt összefüggések miatt

$$S_k = 3S_{k-1} - S_{k-3},$$

ezért, ha S_1, S_2, ... , S_{k-1} egész, akkor S_k is egész. (Teljes indukció.)
Mivel

$$(**) \qquad \alpha^{2000} = S_{2000} - \left(\beta^{2000} + \gamma^{2000}\right),$$

továbbá S_{2000} egész, így a zárójelben álló kifejezés értékét próbáljuk becsülni. Vegyük észre, hogy

$$p\left(\frac{2}{3}\right) < 0,\ p\left(-\frac{3}{5}\right) < 0,$$

Ezért ismételten felhasználva $p(x)$ folytonosságát:

$$0 < \beta < \frac{2}{3},\ |\gamma| < \frac{3}{5} < \frac{2}{3} \ \Rightarrow\ \beta^{2000} + \gamma^{2000} < 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2000}.$$

Mivel

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81} < \frac{1}{5},\ \left(\frac{1}{5}\right)^3 < \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2},$$

ezért

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{12} < \frac{1}{10^2} \ \Rightarrow\ \beta^{2000} + \gamma^{2000} < 2 \cdot \left(\frac{1}{10^2}\right)^{\frac{500}{3}} < 2 \cdot \left(\frac{1}{10^2}\right)^{163} < \frac{1}{10^{325}},$$

amiből a (**) összefüggés felhasználásával következik a feladat állítása.
b) Az a) részben látottakhoz teljesen hasonlóan járhatunk el. Először kimutatjuk, hogy a polinomnak van valós gyöke -1 és 0, 0 és 1 ill. 3 és 4 között, amelyek: $\gamma < \beta < \alpha$. Most is bevezetjük az S_k mennyiséget, amely a gyökök nagyságviszonyai miatt biztosan pozitív. Az ott látott gondolatmenetet alkalmazva:

$$S_{k+3} = 3S_{k+2} + 2S_{k+1} - S_k,$$

ahonnan teljes indukcióval adódik, hogy S_k egész szám minden *k*-ra. Vegyük észre, hogy

$$0 \le \left|S_k - \alpha^k\right| = \left|\beta^k + \gamma^k\right| \le \left|\beta^k\right| + \left|\gamma^k\right| = |\beta|^k + |\gamma|^k.$$

Mivel $0 < |\beta|,\ |\gamma| < 1$, ezért $|\beta|^k \to 0,\ |\gamma|^k \to 0,$ következésképpen $|\beta|^k + |\gamma|^k \to 0,$ így az ún. rendőr-elv miatt

$$\left|S_k - \alpha^k\right| \to 0,$$

ahonnan adódik a feladat állítása, melynél egyébként többet is igazoltunk.

19.
a) Vegyük észre, hogy

$$x^4-4x-1=\left(x^2+1\right)^2-2\left(x+1\right)^2=\left(x^2+1\right)^2-\left[\sqrt{2}\left(x+1\right)\right]^2=\left(x^2+\sqrt{2}x+1+\sqrt{2}\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1-\sqrt{2}\right),$$

ezért másodfokú egyenletek megoldására vezet a feladat. A valós megoldások:

$$\frac{1\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}}.$$

b) Vegyük észre, hogy

$$x^4+8x-7=\left(x^2+1\right)^2-2\left(x-2\right)^2=\left(x^2+1\right)^2-\left[\sqrt{2}\left(x-2\right)\right]^2=\left(x^2+\sqrt{2}x+1-2\sqrt{2}\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+2\sqrt{2}+1\right),$$

ezért másodfokú egyenletek megoldására vezet a feladat. A valós megoldások:

$$\frac{-1\pm\sqrt{4\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}}.$$

20.
a) Kíséreljük meg a negyedfokú polinom szorzattá bontását az x^2+a másodfokú polinom segítségével, ahol a egyelőre meg nem határozott értékű konstans:

$$x^4-10x^2-8x+5=\left(x^2+a\right)^2-\left[\left(2a+10\right)x^2+8x+a^2-5\right].$$

Próbáljuk meg a értékét úgy megválasztani, hogy a szögletes zárójelben álló másodfokú kifejezés teljes négyzet legyen, ehhez az x-ben másodfokú kifejezés diszkriminánsa 0 kell, hogy legyen:

$$64-4\left(2a+10\right)\left(a^2-5\right)=0\Leftrightarrow a^3+5a^2-5a-33=0.$$

Ennek a harmadfokú egyenletnek $a=-3$ megoldása, ezért ezzel az a értékkel:

$$\left(x^2-3\right)^2-4\left(x+1\right)^2=0\Leftrightarrow\left(x^2+2x-1\right)\left(x^2-2x-5\right)=0,$$

melynek megoldásai

$$x_{1,2}=1\pm\sqrt{6}\ \text{ és }\ x_{3,4}=-1\pm\sqrt{2}\,.$$

b) Az előzőekben ismertetett módszer szerint járhatunk el:

$$x^4-4x^3+5x^2-2x-6=\left(x^2-2x+a\right)^2-\left[(2a-1)x^2-(4a-2)x+a^2+6\right].$$

A szögletes zárójelben álló, az x-ben másodfokú kifejezés pontosan akkor lesz teljes négyzet, ha

$$(4a-2)^2-4(2a-1)\left(a^2+6\right)=0 \Leftrightarrow 2a^3-5a^2+16a-7=0.$$

Ennek a harmadfokú egyenletnek $a=\frac{1}{2}$ megoldása, ezért ezzel az a értékkel:

$$\left(x^2-2x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2=0 \Leftrightarrow \left(x^2-2x+3\right)\left(x^2-2x-2\right)=0,$$

melynek valós megoldásai

$$x_{1,2}=1\pm\sqrt{3}.$$

Megjegyzés:

A negyedfokú egyenletek megoldása általános esetben mindig visszavezethető harmadfokú egyenlet megoldására a megoldásban leírt eljárással. Megmutatható az is, hogy a negyedfokú valós együtthatós polinomok mindig előállíthatók két valós együtthatós másodfokú polinom szorzataként. A feladatban látott módszer Ferrari (1522-1565) olasz matematikustól származik. Mivel ismeretes, hogy minden valós együtthatós harmadfokú polinomnak van valós gyöke, ezért a módszer lényegében igazolja a szorzattá bontásra vonatkozó állítást.

21.

Vegyük észre, hogy

$$4p(x)=4x^4-4x+2=\left(2x^2-1\right)^2+(2x-1)^2,$$

ami csakis akkor lehet 0, ha

$$x^2=\frac{1}{2} \text{ és } x=\frac{1}{2},$$

ami ellentmondás, ezért a polinomnak nincs valós gyöke.

22.

Tekintsük az

$$x^4+ax^3+(b-2)x^2-ax+1=0$$

negyedfokú egyenletet. Mivel $x=0$ nem megoldás, ezért x^2 -tel való osztás után:

$$x^2+\frac{1}{x^2}+a\left(x-\frac{1}{x}\right)+b-2=0,$$
$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+a\left(x-\frac{1}{x}\right)+b=0.$$

Legyen $y=x-\frac{1}{x}$, akkor

$$y^2+ay+b=0.$$

Tudjuk, hogy ennek az egyenletnek két különböző valós megoldása van, legyenek ezek y_1 és y_2. Mivel az

$$x^2-yx-1=0$$

másodfokú egyenlet diszkriminánsa $D=y^2+4>0$, ezért az y_1 és y_2 beírásával kapott két másodfokú egyenletnek összesen 4 valós megoldása lesz. Mivel $y_1\neq y_2$, ezért a 4 megoldás páronként különböző.

23.*
Legyen az

$$ax^2+(c-b)x+(c-d)=0$$

egyenlet megoldása t^2, ahol $t>1$, ekkor

$$at^4+ct^2+e=bt^2+d.$$

Ha

$$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e,$$

akkor

$$f(t)=(at^4+ct^2+e)+t\left(bt^2+d\right)=(bt^2+d)(t+1),$$
$$f(-t)=(at^4+ct^2+e)-t(bt^2+d)=(bt^2+d)(1-t),$$

ahonnan világos, hogy $f(t)$ és $f(-t)$ előjele ellentétes. Mivel *f* folytonos polinomfüggvény, így *f*-nek van gyöke a $[-t,t]$ intervallumban.

24.
A hatványozás elvégzése után megjelenő $a_k x^k$ tagokban lévő k temészetes szám kitevőkre $k=5l+7m$ kell, hogy teljesüljön, ahol l és m természetes számok. Mivel a 18 nem áll elő ilyen módon, ezért x^{18} együtthatója 0 lesz. A 17 egyetlen lehetséges előállítása: $17=5+5+7.$ Mivel

$$\left(1+x^5+x^7\right)^{20}=\underbrace{\left(1+x^5+x^7\right)\left(1+x^5+x^7\right)\ldots\left(1+x^5+x^7\right)}_{\text{20 darab}},$$

ezért egyetlen zárójelből kell x^7, két zárójelből x^5, 17 zárójelből pedig 1 az összeszorzásnál. Az ilyen választások száma adja meg x^{17} együtthatóját, ami

$$20\cdot\binom{19}{2}=3420.$$

25.
Nyilvánvaló, hogy $n\geq k.$ Írjuk fel az n-et $n=kq+r$ alakban, ahol q pozitív egész és $0\leq r<k$ természetes szám. Ekkor

$$x^n-a^n=x^{kq+r}-a^{kq+r}=x^{kq}\cdot x^r-a^{kq}\cdot a^r=x^r\left(x^{kq}-a^{kq}\right)+a^{kq}\left(x^r-a^r\right).$$

A végül kapott összegben az első tag nyilván osztható $\left(x^k-a^k\right)$-nal, a második tag pedig pontosan akkor lesz osztható vele, ha $r=0,$ hiszen $r<k.$

26.
Keressük az előállítást

$$ax^{17}+bx^{16}+1=\left(x^2-x-1\right)\left(c_{15}x^{15}-c_{14}x^{14}+\ldots+c_1x-c_0\right)$$

alakban. Mivel ez azonosság, ezért az együtthatókra teljesülnie kell a következőknek:

$$c_0=1,$$
$$c_0-c_1=0\Rightarrow c_1=1,$$
$$-c_0-c_1+c_2=0\Rightarrow c_2=2,$$

továbbá

$$-c_{k-2}-c_{k-1}+c_k=0\Rightarrow c_k=c_{k-1}+c_{k-2},$$

ahol $3 \le k \le 15$. Innen adódik, hogy $k \le 15$ esetén $c_k = F_{k+1}$, ahol F_n az *n*-edik Fibonacci-szám. Így aztán $a = c_{15} = F_{16} = 987$ és $b = -c_{14} - c_{15} = -F_{17} = -1597$.

27.
Tegyük fel, hogy

$$x^3 + y^3 + z^3 + kxyz = (x+y+z)\, f(x,y,z),$$

$f(x,y,z)$ az *x*, *y*, *z* változók valamely polinomja. Legyen $z = -(x+y)$, ekkor

$$0 = x^3 + y^3 - (x+y)^3 - kxy(x+y) = -3x^2y - 3xy^2 - kxy(x+y) = -xy(x+y)(3+k),$$

minden *x*, *y* esetén. Világos, hogy ez csak $k = -3$ mellett lehetséges. Ez meg is felel, hiszen

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx).$$

28.
A válasz: igen. Tekintsük a

$$p(x) = \frac{1}{13} x(x-1)(x-2)...(x-12)$$

kifejezést! A műveletek elvégzése után olyan polinomhoz juthatunk, melynek főegyütthatója $\frac{1}{13}$. Minden *x* egész szám felírható $13k + r$ alakban, ahol *k* egész és $0 \le r < 13$, *r* egész (maradékos osztás). Ekkor $\frac{x-r}{13} = k$, ezért $p(x)$ értéke egész szám lesz.

29.
Tegyük fel, hogy x_0 egész gyöke $p(x)$-nek. Ekkor a gyöktényezőt kiemelve:

$$p(x) = (x - x_0)\, q(x),$$

ahol $q(x)$ egész együtthatós. Ekkor

$$4 = (1 - x_0)\, q(1),$$
$$7 = (2 - x_0)\, q(2).$$

Innen $1 - x_0 \mid 4$ és $2 - x_0 \mid 7$. Ennek a feltételnek egyszerre csak $x_0 = 3$ felel meg, tehát csak ez lehet $p(x)$ egész gyöke. Mivel így $p(x) = (x-3)\, q(x)$, ezért

$$q(1) = -2,$$
$$q(2) = -7.$$

Könnyű látni, hogy $q(x) = -5x + 3$ megfelel. Így $p(x) = (x-3)(-5x+3) = -5x^2 + 18x - 9$, ami teljesíti a feltételeket. (Természetesen nem ez az egyetlen megfelelő *p* polinom.)

30.
Mivel *a*, *b*, *c* és *d* különböző gyökei a $p(x) - 5$ polinomnak, így a gyöktényező kiemelhetőségére vonatkozó tétel miatt:

$$p(x) - 5 = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)q(x),$$

ahol $q(x)$ egész együtthatós polinom. Ha *x* olyan egész szám, hogy $p(x) = 8$, akkor

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)q(x) = 3.$$

Tekintettel arra, hogy $x-a$, $x-b$, $x-c$, $x-d$ négy különböző egész szám és mind osztója a 3-nak, szerepelnie kell közöttük a 3-nak és a –3-nak is, ami ellentmond annak, hogy a jobb oldalon lévő szám nem osztható 9-cel, így a feladat kérdésére a válasz: nem.

31.
Ismert, hogyha $P(x)$ egész együtthatós polinom, akkor tetszőleges *u*, *v* egész számokra:

$$u - v \mid P(u) - P(v).$$

Ezt alkalmazva adódik, hogy amennyiben a feladat kérdédére igen a válasz, akkor

$$a - b \mid b - c,$$
$$b - c \mid c - a,$$
$$c - a \mid a - b.$$

Feltehetjük, hogy $a < b < c$. Ekkor $c - a > b - a > 0$, ezért $c - a > |a - b| > 0$, ami ellentmond annak, hogy $c - a \mid a - b$. Ellentmondásra jutottunk, így a feladat kérdésére nem a helyes válasz.

32.
Az alábbiakban többször is felhasználjuk, hogyha $d \mid a$ és $d \mid b$, akkor $d \mid ax + by$, ahol *x* és *y* egész számok. Mivel $p(0) = e$, ezért *e* osztható 7-tel. Ha $x = \pm 1$, akkor adódik, hogy $a \pm b + c \pm d$ osztható 7-tel. Így akkor $7 \mid 2(a+c) \Rightarrow 7 \mid a + c$, és $7 \mid 2(b+d) \Rightarrow 7 \mid b + d$. Ha

$x = \pm 2$, akkor $7 \mid 2(8a \pm 4b + 2c \pm d)$. Innen az eddigi eredmények felhasználásával, összeadással ill. kivonással kaphatjuk, hogy $7 \mid 4a + c$ és $7 \mid 4b + d$. Mivel

$$3a = (4a + c) - (a + c),$$

ezért adódik, hogy *a* osztható 7-tel, amiből következik, hogy *c* is osztható 7-tel. Teljesen hasonló módon kapjuk, hogy *b* ill. *d* is 7-tel osztható.

33.
Tegyük fel, hogy van ilyen polinom. Keressük a polinomot

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

alakban, ahol az a_i együtthatók egészek és $a_n \neq 0$.
Ha $|a_0| > 1$, akkor minden olyan *k* pozitív egészre amely az $|a_0|$ többszöröse, $p(k)$ osztható lesz $|a_0|$-lal, ezért csak úgy lehet prímszám, ha $|a_0|$ prím és minden pozitív egész *k*-ra $p(k)$ egyenlő vele. Ismert, hogy egy legalább elsőfokú polinom nem veheti fel ugyanazt az értéket végtelen sok helyen, így ellentmondásra jutunk.
Ha $|a_0| = 1$ és $p(1)$ prímszám, akkor vegyük figyelembe, hogy

$$p(x+1) = xq(x) + p(1),$$

ahol $q(x)$ egész együtthatós polinom. Ha *k* a $p(1)$ többszöröse, akkor a fenti összefüggés miatt $p(k+1)$ osztható lesz $p(1)$-gyel, ezért csak úgy lehet prímszám, ha minden pozitív egész *k*-ra $p(k+1) = p(1)$. Ez a már idézett tétel miatt ellentmondásra vezet. Végül nyilvánvaló, hogy $a_0 = 0$ nem lehetséges. Ezzel a feladatot megoldottuk.

34.*
Egy egész számokat tartalmazó számtani sorozat tagjai írhatók $n \cdot m + r$ alakban, ahol *n* és $0 \le r \le n-1$ rögzített pozitív egész, *m* pedig valamely egész szám. (Az *n* szám a differencia abszolút értéke.) Megmutatjuk, hogyha $p(x)$ a feltételeknek megfelelő polinom, akkor van olyan $n > 1$ pozitív egész, hogy a $p(k)$ értékek nem adhatnak *n*-féle maradékot *n*-nel osztva, így lesz olyan *r* maradék, amely nem lép fel. Ez azt jelenti, hogy létezik a kívánt számtani sorozat. Legyen tehát $p(x)$ legalább másodfokú, egész együtthatós polinom. Állítjuk, hogy vannak olyan a, b különböző egész számok, amelyekre

$$|p(a) - p(b)| > |a - b|.$$

Mivel bármely *x* és *b* egész számra

$$p(x)-p(b)=(x-b)q(x),$$

továbbá q nem lehet konstans polinom, hiszen p legalább másodfokú, így van megfelelő a egész a b-hez. Legyen $n=\left|p(a)-p(b)\right|$. Ekkor $a\equiv b \pmod n$ nem teljesülhet, miközben $p(a)\equiv p(b) \pmod n$. A $p(x)$ $\bmod n$ vett értékeit az x $\bmod n$ vett értékei határozzák meg. Látható viszont az elmondottakból, hogy $\bmod n$ különböző helyhez nem tartozhat $\bmod n$ különböző érték, így lesz olyan maradék $\bmod n$, amely a $p(x)$ értékek között nem lép fel. Ezt akartuk bizonyítani.

35.

a) Legyen $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$, ekkor

$$x^2=5+2\sqrt{6},$$
$$x^2-5=2\sqrt{6},$$
$$x^4-10x^2+1=0.$$

b) Legyen $x=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$, ekkor

$$x^3=5+3\sqrt[3]{6}x,$$
$$x^3-5=3\sqrt[3]{6}x,$$
$$x^9-15x^6+75x^3-125=162x^3,$$
$$x^9-15x^6-87x^3-125=0.$$

36.**

Vegyük észre, hogy $\sqrt[n]{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt[n]{2-\sqrt{3}}=1$. Legyen $x=\lambda+\frac{1}{\lambda}$, ahol $\lambda>0$. Teljes indukció segítségével megmutatjuk, hogy minden pozitív egész n-re $\left(\lambda^n+\frac{1}{\lambda^n}\right)$-hez található olyan n-ed fokú $T_n(x)$ polinom, amely egész együtthatós, főegyütthatója 1, valamint

$$T_n(x)=\lambda^n+\frac{1}{\lambda^n}.$$

Ha $n=1$, akkor $T_1(x)=x$.
Ha $n=2$, akkor

$$\lambda^2+\frac{1}{\lambda^2}=\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)^2-2=x^2-2=T_2(x).$$

Tegyük fel ezek után, hogy állításuk $(n-1)$-re és n-re igaz, azaz

$$T_{n-1}(x)=\lambda^{n-1}+\frac{1}{\lambda^{n-1}} \text{ és } T_n(x)=\lambda^n+\frac{1}{\lambda^n}.$$

Ekkor $(n+1)$-re:

$$\lambda^{n+1}+\frac{1}{\lambda^{n+1}}=\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)\left(\lambda^n+\frac{1}{\lambda^n}\right)-\left(\lambda^{n-1}+\frac{1}{\lambda^{n-1}}\right)=x\cdot T_n(x)-T_{n-1}(x)=T_{n+1}(x).$$

Ezzel állításunkat igazoltuk. A fent kapott rekurzió segítségével könnyen adódik, hogy

$$T_3(x)=x^3-3x,$$
$$T_4(x)=x\left(x^3-3x\right)-\left(x^2-2\right)=x^4-4x^2+2,$$
$$T_5(x)=x\left(x^4-4x^2+2\right)-\left(x^3-3x\right)=x^5-5x^3+5x.$$

Nézzük most a feladatban szereplő állításokat.

a) Ha $\lambda=\sqrt[4]{2+\sqrt{3}}$, akkor $\lambda^4+\frac{1}{\lambda^4}=4$, ezért $x=\sqrt[4]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[4]{2-\sqrt{3}}=\lambda+\frac{1}{\lambda}$, és $T_4(x)=4$, ezért x gyöke az

$$x^4-4x-2$$

polinomnak.

b) Ha $\lambda=\sqrt[5]{2+\sqrt{3}}$, akkor $\lambda^5+\frac{1}{\lambda^5}=4$, ezért $x=\sqrt[5]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[5]{2-\sqrt{3}}=\lambda+\frac{1}{\lambda}$, és $T_5(x)=4$, így x gyöke az

$$x^5-5x^3+5x-4$$

polinomnak.

c) Ha $\lambda=\sqrt[n]{2+\sqrt{3}}$, akkor $\lambda^n+\frac{1}{\lambda^n}=4$, ezért $x=\sqrt[n]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[n]{2-\sqrt{3}}=\lambda+\frac{1}{\lambda}$, így x gyöke a $T_n(x)-4$ polinomnak.

Megjegyzés:
A feladat kapcsolatba hozható az ún. Csebisev-polinomokkal, azaz $(\cos nx)$ -nek $(\cos x)$ -szel való kifejezéseivel. Tekintsük a $T_n(x)$ polinomsorozatot, ahol $T_0(x)=1$, $T_1(x)=x$ és

$$T_{i+1}(x)=2xT_i(x)-T_{i-1}(x),$$

ahol $i=1,2,\ldots$. Ekkor $T_n(x)$ az ún. n-edik Csebisev-polinom. Teljes indukcióval nem nehéz igazolni velük kapcsolatban az alábbi állításokat:

a) ha $x>1$, akkor $T_{n+1}(x)>T_n(x)>1$, ahol n pozitív egész,

b) $T_n(\cos\alpha) = \cos n\alpha,$ ahol n természetes szám.

Ezekről a polinomokról, valamint velük kapcsolatos további problémákról olvashatunk pl.: Surányi László: Algebra, 170-176.o..

37.*
A Cauchy-egyenlőtlenség szerint:

$$\left(u_n v_n + \ldots + u_1 v_1 + u_0 v_0\right)^2 \le \left(u_n^2 + \ldots + u_1^2 + u_0\right)\left(v_n^2 + \ldots + v_1^2 + v_0\right).$$

Ha $u_i = \sqrt{a_i} \cdot 2^i$ és $v_i = \sqrt{a_i} \cdot 4^i,$ ahol $i = 0,1,\ldots,n,$ akkor

$$\left[p(8)\right]^2 \le p(4) \cdot p(16) = 2 \cdot 8 = 16,$$
$$4 = p(8) \le 4.$$

Egyenlőség a Cauchy-egyenlőtlenségben pontosan akkor teljesül, ha $v_i = \lambda u_i,$ ahol λ adott valós szám és $i = 0,1,\ldots,n.$ Mivel $v_i = 2^i \cdot u_i$ minden i-re, ezért csakis $n = 1$ jöhet szóba, valamint $a_0 = 0.$ Innen pedig a polinom: $p(x) = \frac{1}{2}x.$ Látszik, hogy ez meg is felel.

38.
Legyenek az a, b, c és d számok az $x^4 + x^3 - 1$ polinom gyökei. A Viéte-formulák szerint:

$$\begin{cases} a + b + c + d = -1, \\ ab + (a+b)(c+d) + cd = 0, \\ ab(c+d) + (a+b)cd = 0, \\ abcd = -1. \end{cases}$$

Az első és utolsó egyenletből

$$cd = -\frac{1}{ab}, \quad c + d = -1 - a - b,$$

melyeket behelyettesítve:

$$ab - (a+b)(1 + a + b) - \frac{1}{ab} = 0,$$
$$ab(1 + a + b) + \frac{a+b}{ab} = 0.$$

A második egyenletből:

$$ab+(a+b)\left(ab+\frac{1}{ab}\right)=0,$$

$$a+b=-\frac{(ab)^2}{(ab)^2+1}.$$

Legyen $u=ab,$ ekkor

$$u+\frac{u^2}{u^2+1}\left(1-\frac{u^2}{u^2+1}\right)-\frac{1}{u}=0,$$

$$u^2\left(u^2+1\right)^2+u^3\left(u^2+1\right)-u^5-\left(u^2+1\right)^2=0,$$

ahonnan

$$u^6+u^4+u^3-u^2-1=0.$$

Ebből már látszik, hogy a feladat állítása igaz.

39.

Tekintsük a következő átalakításokat:

$$\begin{aligned} pS_{k-1} &= (x+y+z)\left(x^{k-1}+y^{k-1}+z^{k-1}\right)= \\ &= S_k+(xy+yz+zx)\left(x^{k-2}+y^{k-2}+z^{k-2}\right)-xyz\left(x^{k-3}+y^{k-3}+z^{k-3}\right)= \\ &= S_k+qS_{k-2}-rS_{k-3}. \end{aligned}$$

Rendezés után adódik a bizonyítandó állítás.

II. megoldás:

A Viéte-formulák miatt *x*, *y* és *z* a harmadfokú t^3-pt^2+qt-r polinom gyökei, ezért

$$\begin{aligned} x^3 &= px^2-qx+r, \\ y^3 &= py^2-qy+r, \\ z^3 &= pz^2-qz+r. \end{aligned}$$

Szorozzuk be az egyenletek mindkét oldalát rendre a következőkkel: x^{k-3}, y^{k-3}, z^{k-3}. Összeadás után éppen a bizonyítandó állítást kapjuk.

Megjegyzés:

A feladatban szereplő azonosság általánosítható. Legyenek $x_1, x_2, ..., x_n,$ az *n*-ed fokú $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ polinom gyökei, továbbá $S_k=x_1^k+x_2^k+...+x_n^k,$ ahol *k* természetes szám. Állapodjunk meg abban, hogy $a_l=0,$ ha *l* negatív egész szám. Ekkor

$$a_nS_k+a_{n-1}S_{k-1}+a_{n-2}S_{k-2}+...+a_{n-k+1}S_1+ka_{n-k}=0.$$

Ezt a formulát Newton-féle azonosságnak hívják. Megmutatjuk a bizonyítását, ha $k \geq n$. Mivel x_i gyöke $p(x)$-nek, ezért

$$\begin{aligned}
&a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \ldots + a_1 x_1 + a_0 = 0,\\
&\vdots\\
&a_n x_n^n + a_{n-1} x_n^{n-1} + \ldots + a_1 x_n + a_0 = 0.
\end{aligned}$$

Szorozzuk be az egyes egyenleteket rendre az $x_1^{k-n}, \ldots, x_n^{k-n}$ kifejezésekkel! Kapjuk:

$$\begin{aligned}
&a_n x_1^k + a_{n-1} x_1^{k-1} + \ldots + a_1 x_1^{k-n+1} + a_0 x_1^{k-n} = 0,\\
&\vdots\\
&a_n x_n^k + a_{n-1} x_n^{k-1} + \ldots + a_1 x_n^{k-n+1} + a_0 x_n^{k-n} = 0.
\end{aligned}$$

Összeadva a megfelelő oldalakat, figyelembe véve a megállapodást adódik a bizonyítandó állítás. Abban az esetben, hogyha $k < n$, a bizonyítás bonyolultabb. (Pl. $n-k$ szerinti teljes indukcióval próbálkozzunk.)
Az azonosságot nemcsak a fenti formában használják, hanem az ún. elemi szimmetrikus polinomok segítségével is felírható. Az elemi szimmetrikus polinomok a **14.** feladat utáni megjegyzésben szereplő kifejezésekből (Viéte-formulák) származnak:

$$\begin{aligned}
&\sigma_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n,\\
&\sigma_2 = x_1 x_2 + \ldots + x_{n-1} x_n,\\
&\vdots\\
&\sigma_n = x_1 x_2 \ldots x_n.
\end{aligned}$$

A Newton-féle azonosság fentebb szereplő alakját a_n-nel osztva, a Viéte-formulák felhasználásával adódik, hogy $k \geq n$ esetén:

$$S_k - S_{k-1}\sigma_1 + S_{k-2}\sigma_2 - \ldots + (-1)^n S_{k-n}\sigma_n = 0.$$

Ha $1 \leq k \leq n$ akkor:

$$S_k - S_{k-1}\sigma_1 + S_{k-2}\sigma_2 + \ldots + (-1)^{k-1} S_1 \sigma_{k-1} + (-1)^k k\sigma_k = 0.$$

40.**
Legyen $S_k = a^k + b^k + c^k + d^k$. Feladatunk az $S_6 - S_5 - S_3 - S_2 - S_1$ kifejezés értékének kiszámítása. Alkalmazzuk az előző feladat megjegyzésében szereplő Newton-féle azonosságot az $x^4 - x^3 - x^2 - 1$ polinomra! Mivel $a_4 = 1,\ a_3 = -1,\ a_2 = -1,\ a_1 = 0,\ a_0 = -1$, ezért

$$a_4S_6 + a_3S_5 + a_2S_4 + a_1S_3 + a_0S_2 = 0,$$
$$S_6 - S_5 - S_4 - S_2 = 0.$$

Mindkét oldalhoz adjunk $\left(S_4 - S_3 - S_1\right)$-et:

$$S_6 - S_5 - S_3 - S_2 - S_1 = S_4 - S_3 - S_1.$$

Ismét alkalmazva az azonosságot:

$$a_4S_4 + a_3S_3 + a_2S_2 + a_1S_1 + 4a_0 = 0,$$
$$S_4 - S_3 - S_2 - 4 = 0 \Leftrightarrow S_4 - S_3 = S_2 + 4.$$

Továbbá

$$a_4S_2 + a_3S_1 + 2a_2 = 0,$$
$$S_2 - S_1 - 2 = 0 \Leftrightarrow S_2 = S_1 + 2.$$

Kaptuk, hogy a kifejezés értéke: $S_4 - S_3 - S_1 = S_1 + 2 + 4 - S_1 = 6.$

41.

A feladat szövege alapján

$$f\left(x\right) = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)...\left(x - x_n\right),$$

ahol x_i a polinom valamely gyökét jelöli. A polinom egész helyeken egész értékeket vesz fel és $f\left(0\right) \neq 0,\ f\left(1\right) \neq 0,$ hiszen minden gyöke a $\left]0;1\right[$ intervallumban van. Így akkor

$$1 \leq \left|f\left(0\right)f\left(1\right)\right| = \left|a\left(-1\right)^n x_1x_2...x_n a\left(1 - x_1\right)\left(1 - x_2\right)...\left(1 - x_n\right)\right| = a^2x_1\left(1 - x_1\right)x_2\left(1 - x_2\right)...x_n\left(1 - x_n\right).$$

Könnyű látni, hogy

$$x\left(1 - x\right) \leq \frac{1}{4},$$

ahol egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $x = \frac{1}{2}.$ Ezt alkalmazva, mivel nem minden gyök azonos:

$$1 < a^2 \cdot \frac{1}{4^n} \Leftrightarrow 2^n < \left|a\right|,$$

ami egyenértékű a feladat állításával.

42.**

Mivel $a_i \geq 0,$ ezért $x \geq 0$ esetén $f\left(x\right) \geq 1,$ így $f\left(x\right)$ gyökei mind negatív számok. Legyenek a gyökök $-x_1, -x_2,\ ...\ , -x_n,$ ahol $x_i > 0.$ Ekkor a gyöktényezős alak miatt:

$$f(x)=(x+x_1)(x+x_2)\dots(x+x_n),$$

ahol $x_1x_2\dots x_n=1$.

a) A számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség miatt

$$2+x_i=1+1+x_i\ge 3\sqrt[3]{x_i},$$

így

$$f(2)=(2+x_1)(2+x_2)\dots(2+x_n)\ge 3^n\sqrt[3]{x_1x_2\dots x_n}=3^n.$$

b) A súlyozott számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget alkalmazva:

$$x+x_i=(x+1)\left(\frac{x}{x+1}\cdot 1+\frac{1}{x+1}\cdot x_i\right)\ge(x+1)\cdot 1^{\frac{x}{x+1}}\cdot x_i^{\frac{1}{x+1}}=(x+1)x_i^{\frac{1}{x+1}},$$

így $x\ge 0$ esetén

$$f(x)\ge(x+1)^n\cdot(x_1x_2\dots x_n)^{\frac{1}{x+1}}=(x+1)^n.$$

c) A Viéte-formulák szerint a_k egy olyan összeg, amelynek tagjait úgy kapjuk, hogy az $x_1,x_2,\dots,x_n$ gyökök közül kiválasztunk k darabot és összeszorozzuk őket. Összesen $\binom{n}{k}$ darab ilyen szorzat képezhető és minden x_k összesen $\binom{n-1}{k-1}$ darabban van benne. A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség szerint akkor

$$a_k\ge\binom{n}{k}\left[(x_1x_2\dots x_n)^{\binom{n-1}{k-1}}\right]^{\frac{1}{\binom{n}{k}}}=\binom{n}{k}.$$

Ezt kellett igazolni.

43.

Legyen $y_k=\dfrac{1}{1-x_k}$, ahol $k=1,\ 2,\ \dots,\ n$. Innen $x_k=\dfrac{y_k-1}{y_k}$, továbbá

$$\left(\frac{y_k-1}{y_k}\right)^n+\left(\frac{y_k-1}{y_k}\right)^{n-1}+\dots+\frac{y_k-1}{y_k}+1=0.$$

Átalakítva:

$$(y_k-1)^n+y_k(y_k-1)^{n-1}+\dots+y_k^{n-1}(y_k-1)+y_k^n=0.$$

Ebből következik, hogy y_k gyöke a

$$p(x)=(x-1)^n+x(x-1)^{n-1}+\ldots+x^{n-1}(x-1)+x^n$$

n-ed fokú polinomnak. Vegyük észre, hogy

$$p(x)=(n+1)x^n-\left[\binom{n}{1}+\binom{n-1}{1}+\ldots+\binom{1}{1}\right]x^{n-1}+\ldots\,.$$

Ezért a megfelelő Viéte-formula miatt

$$y_1+y_2+\ldots+y_n=\frac{\binom{n}{1}+\binom{n-1}{1}+\ldots+\binom{1}{1}}{n+1}=\frac{n(n+1)}{2(n+2)}=\frac{n}{2},$$

ami egyenértékű a feladat állításával.

44.
Legyen $Q(x)=(x+1)P(x)-x.$ Világos, hogy a $0,1,\ \ldots,n$ a $Q(x)$ zérushelyei, ezért a gyöktényező kiemelhetősége miatt (lásd a **14.** feladat utáni megjegyzésben):

$$Q(x)=(x+1)P(x)-x=ax(x-1)\ldots(x-n),$$

ahol a konstans. Helyettesítsünk: ha $x=-1,$ akkor

$$1=a(-1)^{n+1}(n+1)!\Rightarrow a=\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Ezért

$$P(x)=\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot x(x-1)\ldots(x-n)+x}{x+1},$$

$$P(n+1)=\begin{cases}1, & \text{ha } n \text{ páratlan,}\\ \dfrac{n}{n+2}, & \text{ha } n \text{ páros.}\end{cases}$$

Tehát $P(2009)=\frac{2008}{2010}$ és $P(2010)=1.$

45.*
Tegyük fel, hogy léteznek ilyen a, b, c számok. Legyenek a polinom gyökei $x_1,x_2,\ldots,x_n$. Ekkor a Viéte-formulák miatt (az első egyenletből világos, hogy egyik gyök sem lehet 0):

$$x_1x_2...x_n = (-1)^n c,$$

$$x_1x_2...x_n\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}...+\frac{1}{x_n}\right)=(-1)^{n-1}b,$$

$$x_1x_2...x_n\left(\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_1x_3}...+\frac{1}{x_{n-1}x_n}\right)=(-1)^{n-2}a.$$

Így akkor

$$x_1x_2...x_n\cdot\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}\right)^2-\left(\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+...+\frac{1}{x_n^2}\right)\right)=(-1)^{n-2}a.$$

Mindezekből adódik, hogy

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}=-\frac{b}{c},$$

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+...+\frac{1}{x_n^2}=\frac{b^2-2ac}{c^2}.$$

Vegyük észre, hogy

$$(x_1x_2...x_n)^2\left(\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+...+\frac{1}{x_n^2}\right)=b^2-2ac,$$

$$(x_2x_3...x_n)^2+(x_1x_3...x_n)^2+...+(x_1x_2...x_{n-1})^2=b^2-2ac.$$

Az utolsó egyenlet bal oldalán n darab pozitív egész szám összege áll, ezért

$$n\le b^2-2ac.$$

Ez azonban nyilvánvaló ellentmondás, hiszen b^2-2ac rögzített szám, míg n tetszőlegesen nagy pozitív egész szám lehet.

46.

Legyen $p(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$, ahol $|a_i|=1$. Tételezzük fel, hogy $p(x)$ minden gyöke valós. Ekkor a Viéte-formulák felhasználásával:

$$x_1^2+x_2^2+...+x_n^2=a_{n-1}^2-2a_{n-2}=1\pm 2,$$

$$(x_1x_2...x_n)^2=a_0^2=1.$$

Világos, hogy $a_{n-2}=-1.$ A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt:

$$\frac{3}{n}=\frac{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}{n}\ge\sqrt[n]{x_1^2x_2^2...x_n^2}=1.$$

Tehát $n \le 3$. Ha $n = 3$, akkor a becslésben egyenlőségnek kell teljesülni, ezért $x_i^2 = 1$. Az $(x \pm 1)^3$ polinomok nem felelnek meg, ezért

$$p(x) = (x^2 - 1)(x \pm 1) \Rightarrow p(x) = x^3 + x^2 - x - 1 \text{ vagy } p(x) = x^3 - x^2 - x + 1.$$

Ha $n = 2$, akkor $p(x) = x^2 - x - 1$, vagy $p(x) = x^2 + x - 1$. Ha $n = 1$, akkor $p(x) = x + 1$, vagy $p(x) = x - 1$.

47.*
Átrendezve a rekurziós egyenletet:

$$(*) \qquad P_n(x) - P_{n-1}(x) = (x-1)\left(P_{n-1}(x) - P_{n-2}(x).\right)$$

Az n helyére 2, 3, ... , n beírása után kapott egyenletek megfelelő oldalait összeszorozva:

$$\left(P_2(x) - P_1(x)\right) \cdot \ldots \cdot \left(P_n(x) - P_{n-1}(x)\right) = (x-1)^{n-1}\left(P_1(x) - P_0(x)\right) \cdot \ldots \cdot \left(P_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)\right).$$

Gondoljuk meg, hogyha valamely k-ra $P_k(x) \equiv P_{k-1}(x)$, akkor a (*****) egyenlet miatt végül $P_1(x) \equiv P_0(x)$, ami ellentmondás. Ezért a két oldal közös tényezőivel leosztva:

$$P_n(x) - P_{n-1}(x) = (x-1)^{n-1}.$$

Az n helyére 1, 2, 3, ... , n beírása után kapott egyenletek megfelelő oldalait összeadva:

$$P_n(x) = 1 + (x-1) + (x-1)^2 + \ldots + (x-1)^{n-1} = \frac{(x-1)^n - 1}{x-2}.$$

Mivel így

$$P_n(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^n - 1}{x-2} = 0,$$

ezért páratlan n esetén az egyetlen valós gyök az $x = 2$, míg páros n esetén két valós gyök van: $x = 2$ és $x = 0$.

48.
Nem létezik ilyen n pozitív egész. Legyen $x_1 = \frac{\pi}{4n}$ és $x_2 = \pi - \frac{\pi}{4n}$. Ekkor $\sin x_1 = \sin x_2$, mégis $\sin(2nx_1) = 1$ és $\sin(2nx_2) = -1$.

49.**
A megoldásban fel fogjuk használni a következő, Lagrange-tól származó azonosságot:

$$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=\left(ac+bd\right)^2+\left(ad-bc\right)^2.$$

Ismeretes, hogy minden valós együtthatós polinom felírható legfeljebb másodfokú valós együtthatós polinomok szorzataként, ahol a szorzattá bontában esetlegesen szereplő másodfokú polinomok nem rendelkeznek valós gyökkel. A feladatban lévő $P(x)$ polinom faktorizációja azonban nem tartalmazhat elsőfokú tényezőt. Ennek az az oka, hogy $P(x)$ értéke nem lehet negatív. Valamely elsőfokú tényező biztosan létező zérushelyében ugyanis az adott tényező (és csakis az) előjelet vált, így, mivel a polinomfüggvény folytonos, ezért $P(x)$ felvenne negatív értéket is. Tehát az idézett tétel miatt

$$P(x)=c\left(x^2+p_1x+q_1\right)\cdot\ldots\cdot\left(x^2+p_nx+q_n\right),$$

ahol $c,\ p_i,\ q_i$ valós számok, $c>0$ és $p_i^2-4q_i<0,$ minden *i*-re. Mivel

$$x^2+p_ix+q_i=\left(x+\frac{p_i}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{4q_i-p_i^2}}{2}\right)^2=Q_i^2(x)+R_i^2(x),$$

így

$$P(x)=c\left[Q_i^2(x)+R_i^2(x)\right]\cdot\ldots\cdot\left[Q_n^2(x)+R_n^2(x)\right].$$

Alkalmazzuk most egymás után annyiszor a megoldás elején említett azonosságot, amíg végül csak egyetlen zárójeles tényező marad! Kapjuk:

$$P(x)=c\left[Q^{*2}(x)+R^{*2}(x)\right]=\left[\sqrt{c}\cdot Q^*(x)\right]^2+\left[\sqrt{c}\cdot R^*(x)\right]^2=Q^2(x)+R^2(x).$$

Ezt kellett bizonyítanunk.

Megjegyzés:
A valós együtthatós polinomok szorzattá bontási tételét az algebra alaptételének segítségével nem nehéz igazolni. Ha a $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^n+\ldots+a_1x+a_0$ valós együtthatós polinomnak az α komplex (de nem valós) szám gyöke, akkor $\overline{\alpha}$ (α konjugáltja) is gyöke. Ezt a konjugáltak tulajdonságainak felhasználásával így igazolhatjuk:

$$p\left(\overline{\alpha}\right)=\sum_{i=0}^{n}a_i\left(\overline{\alpha}\right)^i=\sum_{i=0}^{n}\overline{a_i}\,\overline{\left(\alpha^i\right)}=\sum_{i=0}^{n}\overline{a_i\alpha^i}=\overline{\sum_{i=0}^{n}a_i\alpha^n}=\overline{p(\alpha)}=0.$$

A gyöktényező kiemelhetőségére vonatkozó tétel miatt akkor $p(x)$-ből $x-\alpha$ és $x-\overline{\alpha}$ is kiemelhető. Mivel

$$(x-\alpha)(x-\overline{\alpha}) = x^2 - (\alpha+\overline{\alpha})x + \alpha\overline{\alpha},$$

továbbá

$$\alpha+\overline{\alpha} = a+bi+a-bi = 2a \in \mathbb{R},$$
$$\alpha\overline{\alpha} = (a+bi)(a-bi) = a^2-(bi)^2 = a^2+b^2 \in \mathbb{R},$$

ezért $p(x)$-ből egy olyan valós együtthatós másodfokú polinom emelhető ki, amelynek nincs valós gyöke. A további komplex gyökökre megismételve a gondolatmenetet adódik a tétel állítása.

50.*

a) Van ilyen polinom. Legyen $P(x,y) = (y^2+1)x^2+2xy+1.$ Rögzített y esetén az x-ben másodfokú kifejezés diszkriminánsa:

$$D = 4y^2 - 4(y^2+1) = -4 < 0,$$

ezért $y^2+1>0$ miatt $P(x,y)>0$ bármely x és y valós számokra.

b) Legyen $c>0,$ rögzített szám. Ekkor

$$P(x,y) = c \Leftrightarrow (y^2+1)x^2+2xy+1-c = 0.$$

Ennek az x-ben másodfokú egyenletnek a diszkriminánsa:

$$D = 4y^2 - 4(y^2+1)(1-c).$$

Az egyenletnek pontosan akkor létezik valós megoldása, ha $D \geq 0,$ azaz

$$4y^2 \geq 4(y^2+1)(1-c),$$
$$\frac{y^2}{y^2+1} \geq 1-c,$$
$$1-\frac{1}{y^2+1} \geq 1-c,$$
$$\frac{1}{y^2+1} \leq c.$$

Nyilvánvaló, hogy y megválasztható oly módon, hogy az utolsó feltétel teljesül, ezért az egyenletnek lesz megoldása.

51.
A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt:

$$\sqrt{x^2+x-1} \le \frac{x^2+x-1+1}{2} = \frac{x^2+x}{2},$$
$$\sqrt{x-x^2+1} \le \frac{x-x^2+1+1}{2} = \frac{x-x^2+2}{2},$$

így a bal oldal nem nagyobb, mint

$$\frac{x^2+x}{2} + \frac{x-x^2+2}{2} = x+1.$$

De

$$x^2-x+2 \ge x+1 \Leftrightarrow (x-1)^2 \ge 0,$$

ami mindig igaz, ezért csakis akkor lehet a két oldal értéke egyenlő, ha $x=1$, ami meg is felel.

52.
Szorozzuk végig az egyenletet $8\cdot 6\cdot 4\cdot 2 = 384$-gyel. Kapjuk, hogy

$$8(3x+1)6(4x+1)4(6x+1)2(12x+1) = 768,$$
$$(24x+8)(24x+6)(24x+4)(24x+2) = 768.$$

Legyen $24x+5=u$, ekkor

$$(u+3)(u+1)(u-1)(u-3) = 768,$$
$$(u^2-1)(u^2-9) = 768,$$
$$u^4-10u^2-759 = 0.$$

Ennek az u^2-ben másodfokú egyenletnek a megoldásai $u^2=33$ és $u^2=-23$. Ez utóbbi nem lehetséges, így az eredeti egyenlet megoldásai:

$$x_1 = \frac{\sqrt{33}-5}{24},\ x_2 = \frac{-\sqrt{33}-5}{24}.$$

53.
a) Legyen $t=\sqrt{1+x}$, ekkor behelyettesítés után:

$$2x^3 = 3x^2t - t^3 \Leftrightarrow 2z^3-3z^2+1 = 0,$$

ahol $z=\frac{x}{t}$. (Könnyű látni, hogy $t=0$ nem lehetséges.) Észrevehetjük, hogy $z=1$ megoldás, így a bal oldali polinomból $z-1$ kiemelhető:

$$(z-1)(2z^2-z-1)=0,$$
$$(z-1)^2(2z+1)=0,$$

ahonnan $z=-\frac{1}{2}$ adódik további megoldásként.

Ha $z=1$, akkor

$$x^2=x+1 \Leftrightarrow x^2-x-1=0,$$

melynek megoldásai közül csak $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ felel meg, hiszen $x=t>0$.

Ha $z=-\frac{1}{2}$, akkor

$$4x^2=x+1 \Leftrightarrow 4x^2-x-1=0,$$

melynek gyökei közül csak $x=\frac{1-\sqrt{17}}{8}$ felel meg, hiszen $x=-\frac{t}{2}<0$.

Mivel ekvivalens egyenletekkel dolgoztunk, ezért a találtakon kívül nincs más valós megoldása az egyenletnek.

b) A feladat az a) részben látott módon oldható meg, ha elvégezzük a $t=\sqrt{x^2-x+1}$ helyettesítést. A megoldások:

$$x=\frac{-1+\sqrt{13}}{4} \quad \text{illetve} \quad x=\frac{-1-\sqrt{61}}{30}.$$

54.*

A bal oldalon szereplő két gyökös kifejezést jelöljük *y*-nal ill. *z*-vel, ekkor teljesülnek az alábbi összefüggések:

$$\begin{cases} y+z=x, \\ y^3+z^3=x^3-3x^2+3x. \end{cases}$$

Innen

$$3yz(y+z)=(y+z)^3-(y^3+z^3)=3x^2-3x,$$

amiből

$$yz=x-1,$$

hiszen *x* pozitív. Mivel

$$\begin{cases} y+z=x, \\ yz=x-1, \end{cases}$$

így a Viéte-formulák miatt *y* és *z* megoldása lesz a *t*-ben másodfokú

$$t^2 - xt + x - 1 = 0$$

egyenletnek. Vegyük észre, hogy ennek megoldásai az 1 és az $x-1$, ezért $y=1,\ z=x-1$ vagy $y=x-1,\ z=1$.
Ha $y=1$, akkor

$$\sqrt[3]{x^3 - \frac{14}{x}} = 1 \Leftrightarrow x^4 - x - 14 = 0.$$

Ennek $x = 2$ megoldása, így a bal oldal $x - 2$ kiemelésével szorzattá bontható:

$$(x-2)\left(x^3 + 2x^2 + 4x + 7\right) = 0,$$

itt a második tényező biztosan pozitív, ezért több megoldás nincs.
Ha $z=1$, akkor

$$\sqrt[3]{\frac{14}{x} + 3x - 3x^2} = 1 \Leftrightarrow 3x^3 - 3x^2 + x - 14 = 0.$$

Ennek $x = 2$ megoldása, így a bal oldal $x - 2$ kiemelésével szorzattá bontható:

$$(x-2)\left(3x^2 + 3x + 7\right) = 0,$$

itt a második tényező biztosan pozitív, ezért több megoldás nincs. Azt kaptuk, hogy az eredeti egyenletnek egyetlen pozitív megoldása lehet: $x = 2$. Könnyű ellenőrizni, hogy ez meg is felel.

55.
Elvégezve a kijelölt műveleteket, rendezés után:

$$8x^2 - 4xy + 2y^2 + 4x + \frac{2}{3} = 0,$$

$$8x^2 + 4(1-y)x + 2y^2 + \frac{2}{3} = 0.$$

Ezt *x*-ben másodfokú egyenletnek tekintve, a diszkrimináns:

$$D = 16(1-y)^2 - 32\left(2y^2 + \frac{2}{3}\right) = 16\left(-3y^2 - 2y - \frac{1}{3}\right) = -48\left(y + \frac{1}{3}\right)^2.$$

A valós gyök létezésének feltétele $D \geq 0$, ami a fentiek miatt csak úgy lehetséges, ha $y = -\frac{1}{3}$, ekkor $D = 0$ és $x = -\frac{1}{3}$. Az egyetlen megoldás tehát: $x = -\frac{1}{3}$, $y = -\frac{1}{3}$.

Megjegyzés:
Könnyű egy megfelelően előállított diszkrimináns segítségével ilyen feladatokat gyártani. Ilyen feladat a következő is. Oldjuk meg a valós számok körében az alábbi egyenletet:

$$x^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 = \frac{1}{3}.$$

56.*
A kijelölt műveletek elvégzése és rendezés után:

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-2)^2(x+1) + (y-2)^2(y+1) + (z-2)^2(z+1) = 0.$$

Világos, hogy ez csakis $x = y = z = 2$ esetén állhat fenn.

57.
Nyilvánvaló, hogy $x \geq 1$, $y \geq 1$. Leosztva xy-nal:

$$\sqrt{\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}} + \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = 1,$$
$$\sqrt{\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{y}\right)^2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x}\right)^2} = 1.$$

Innen azonnal látszik, hogy a bal oldal maximális értéke $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, amelyet pontosan akkor vesz fel, ha

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{y} \text{ és } \frac{1}{2} = \frac{1}{x},$$

ahonnan

$$x = y = 2.$$

Ezek teljesítik az eredeti egyenletet, a fentiek miatt pedig más megoldás nem lehetséges.

58.*
Világos, hogy csakis $a \geq 0$ mellett létezhet valós megoldás, továbbá, ha x megoldás, akkor $x \geq 0$. Négyzetre emelés után:

$$a - x^2 = \sqrt{a + x}.$$

Innen $a - x^2 \geq 0$ miatt miatt az eddigi feltételeket is figyelembe véve $\sqrt{a} \geq x.$ Újabb négyzetre emelés után:

$$x^4 - 2ax^2 - x + a^2 - a = 0.$$

A bal oldalon álló polinom szorzattá bontható:

$$\left(x^2 - x - a\right)\left(x^2 + x + 1 - a\right) = 0.$$

Tekintsük most az

$$x^2 - x - a = 0,$$
$$x^2 + x + 1 - a = 0$$

másodfokú egyenleteket. A diszkriminánsaik:

$$D_1 = 1 + 4a,$$
$$D_2 = 4a - 3.$$

$D_1 > 0$ mindig teljesül, ha $a \geq 0.$ Az első egyenlet megoldásai:

$$x_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{a + \frac{1}{2}}, \quad x_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{a + \frac{1}{2}}.$$

Az x_1 nem megoldása az eredeti egyenletnek, mivel nem teljesíti az $x \leq \sqrt{a}$ feltételt. Az x_2 pedig csakis $a = 0$ esetén (ekkor $x = 0$), mivel $a > 0$ esetén negatív az értéke.
A második másodfokú egyenletnek pontosan akkor van valós megoldása, ha $a \geq \frac{3}{4}.$ Ekkor a megoldások:

$$x_3 = -\frac{1}{2} + \sqrt{a - \frac{3}{4}}, \quad x_4 = -\frac{1}{2} - \sqrt{a - \frac{3}{4}}.$$

Az x_4 nem megoldása az eredeti egyenletnek, mivel negatív szám. Az x_3 pontosan akkor nem negatív, ha $a \geq 1.$ Ekkor $x_3 \leq \sqrt{a}$ is teljesülni fog.
Összefoglalva:
A feladatban szereplő egyenletnek $a < 0$ esetén nincs valós megoldása. Ha $a = 0,$ akkor egyetlen valós megoldása van, az $x = 0.$ Ha $0 < a < 1,$ akkor nincs valós megoldás. Végül, ha $a \geq 1,$ akkor egyetlen valós megoldása van az egyenletnek:

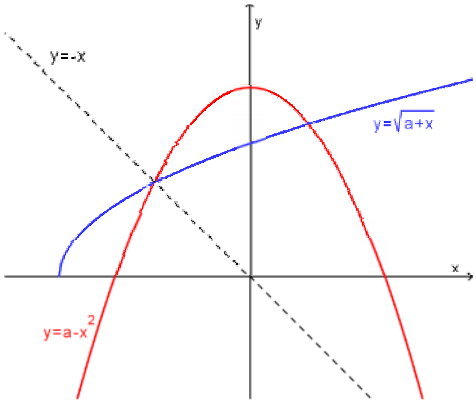
$$x = -\frac{1}{2} + \sqrt{a - \frac{3}{4}}.$$

Megjegyzés:
A megoldásban szereplő negyedfokú polinom szorzattá bontására pl. úgy jöhetünk rá, hogy vázoljuk az

$$x \mapsto a - x^2 \text{ és } x \mapsto \sqrt{a+x}$$

hozzárendelések grafikonját ugyanazon $a > 1$ érték mellett. A rajz alapján sejthető, hogy a két grafikonnak van közös pontja az $y = -x$ egyenesen, azaz

$$a - x^2 = \sqrt{a+x} = -x \Rightarrow x^2 - x - a = 0.$$



59.
Az egyenlet rendezés után:

$$\textbf{(*)} \qquad x^2 + \log_2\left(x^2 + 2^x\right) = 2^x + x + 1.$$

A 2-es alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekedése miatt, ha $x^2 < 2^x$, akkor

$$x^2 + \log_2\left(x^2 + 2^x\right) < 2^x + \log_2 2^{x+1} = 2^x + x + 1.$$

Ha pedig $x^2 > 2^x$, akkor

$$x^2 + \log_2\left(x^2 + 2^x\right) > 2^x + x + 1.$$

Ezért a (*****) egyenlet megoldásai pontosan azok a pozitív *x* számok, melyekre

$$x^2 = 2^x \Leftrightarrow \log_2 x = \frac{1}{2}x.$$

Könnyen észrevehetjük, hogy $x = 2$ és $x = 4$ megoldás. További megoldása nincs az egyenletnek, ugyanis a bal oldalon szereplő függvény szigorúan konkáv, míg a jobb oldalon álló függvény grafikonja egyenes. Márpedig a két grafikonnak legfeljebb két közös pontja lehet.

Megjegyzés:
Azt mondjuk, hogy az *f* függvény szigorúan konkáv az *I* intervallumban, ha minden $a, b \in I$ és $a < x < b$ esetén

$$f(x) > \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

(Szemléletesen ez azt jelenti, hogy bármely $(a, b) \subseteq I$ intervallumban f grafikonja az $(a, f(a))$ és $(b, f(b))$ pontokat összekötő húr fölött van.)

Most igazoljuk, hogy az I intervallumon szigorúan konkáv f függvény grafikonját minden egyenes legfeljebb két pontban metszi. Legyen az egyenes egyenlete $y = ax + b.$ Tegyük fel indirekt módon, hogy három metszéspont is van, amelyek első koordinátái $x_1 < x_2 < x_3$. A definíció miatt:

$$f(x_2) > \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1) + f(x_1),$$
$$ax_2 + b > \frac{a(x_3 - x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1) + ax_1 + b,$$
$$ax_2 + b > ax_2 + b,$$

ami ellentmondás. Ugyanígy mutatható meg az, hogy egy adott intervallumon szigorúan konvex függvény grafikonjának egy egyenessel legfeljebb két metszéspontja lehet.
Bizonyítható a következő: ha f folytonos az I intervallumon, akkor f pontosan akkor szigorúan konkáv, ha bármely $x < y$ esetén

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) > \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

A bizonyítás megtalálható pl. Laczkovich-T.Sós: Analízis I. 173.oldalán. Alkalmazzuk a tételt a logaritmusfüggvényre, amelyről tudjuk, hogy folytonos. Ha $a > 1,$ akkor az $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = \log_a x$ függvény a teljes értelmezési tartományán szigorúan konkáv, ugyanis

$$\log_a \frac{x+y}{2} > \frac{\log_a x + \log_a y}{2},$$
$$\log_a \frac{x+y}{2} > \log_a \sqrt{xy}.$$

Ez pedig a függvény szigorúan monoton növekedése, valamint a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt igaz.

60.
Vegyük észre, hogy $x = 1$ megoldás. Belátjuk, hogy más megoldás nincs. Mindkét oldalt elosztva $105^x = 3^x \cdot 5^x \cdot 7^x$-nel:

$$(*)\quad \left(\left(\frac{8}{5}\right)^x - 1\right)\left(1 - \left(\frac{2}{7}\right)^x\right)\left(2^x - \left(\frac{4}{3}\right)^x\right) + \left(\left(\frac{9}{7}\right)^x - \left(\frac{4}{7}\right)^x\right)\left(\left(\frac{8}{3}\right)^x - 1\right)\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^x\right) = 1.$$

Ha $a \geq 1 > b > 0,$ akkor a pozitív számokon értelmezett $f(x) = a^x - b^x$ függvény pozitív értékű, hiszen

$$f(x) = b^x\left[\left(\frac{a}{b}\right)^x - 1\right],$$

továbbá 1-nél nagyobb alap esetén az exponenciális függvény szigorúan monoton növekedő. Most belátjuk, hogy f szigorúan monoton növekedő. Tegyük fel, hogy $x_2 > x_1 > 0$. Ekkor

$$f(x_2) > f(x_1) \Leftrightarrow a^{x_2} - b^{x_2} > a^{x_1} - b^{x_1},$$

$$a^{x_1}\left(a^{x_2-x_1} - 1\right) > b^{x_1}\left(b^{x_2-x_1} - 1\right),$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{x_1}\left(a^{x_2-x_1} - 1\right) \geq a^{x_2-x_1} - 1 > b^{x_2-x_1} - 1.$$

Mivel $a \geq 1 > b > 0$, ezért $\left(\frac{a}{b}\right)^{x_2-x_1} > 1$, így állításunkat igazoltuk. Mivel szigorúan monoton növekedő, pozitív értékű függvények szorzata illetve összege is szigorúan monoton növekedő függvény, ezért a (*****) egyenlet bal oldalán szigorúan monoton növekedő függvény áll. Így annak értéke egyetlen helyen lehet csak 1, ami $x = 1$ esetén be is következik. Ezzel igazoltuk, hogy a feladatban szereplő egyenletnek sincs más pozitív megoldása.

61.*

Kissé átalakítva az egyenletet:

$$(*) \qquad 4\left(x^3 - 2\right)\left(3^{\sin x} - 3^0\right) + \left(2^{x^3} - 2^2\right)\sin x = 0.$$

Mivel $t \mapsto 2^t$ és $t \mapsto 3^t$ szigorúan monoton növekedő függvények, ezért $x^3 - 2$ és $2^{x^3} - 2^2$, valamint $\sin x$ és $3^{\sin x} - 3^0$ előjele azonos, ezért a (*****) bal oldalán álló összeg két tagja azonos előjelű lesz, következésképpen összegük csakis úgy lehet 0, ha mindkét tag értéke 0. Így az egyenlet megoldásai:

$$x = \sqrt[3]{2} \text{ vagy } x = n\pi, \text{ ahol } n \text{ egész számot jelöl.}$$

62.

Legyen $3^x = a\ (> 0)$, ekkor

$$a^3 - 7\sqrt[3]{7a+6} = 6 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{7\sqrt[3]{7a+6} + 6}.$$

Tekintsük az

$$f(a) = \sqrt[3]{7a+6}$$

függvényt, amely a pozitív számokon értelmezett. Könnyű látni, hogy a függvény szigorúan monoton növekedő a teljes értelmezési tartományon. Az egyenlet írható

$$a = f(f(a))$$

alakban. A szigorún monoton növekedés miatt, ha a olyan, hogy $a < f(a)$, akkor $a < f(a) < f(f(a))$, ha pedig $a > f(a)$, akkor $a > f(a) > f(f(a))$. Így az egyenlet csakis olyan a számokra lehet igaz, melyekre

$$a = f(a) \Leftrightarrow a^3 - 7a - 6 = 0.$$

Ennek $a = -1$ megoldása, így a bal oldalon $a+1$ kiemelhető:

$$(a+1)\left(a^2 - a - 6\right) = 0.$$

A második tényező gyökei $a = -2,\ a = 3$, de ezek közül csak $a = 3$ felel meg, így $x = 1$. Könnyű ellenőrizni, hogy ez valóban teljesíti az eredeti egyenletet.

Megjegyzés:
Sok szép feladat készíthető a fenti ötletre, például:
Oldjuk meg a valós számok körében a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x^2 - 4\sqrt{3x-2} + 6 = y, \\ y^2 - 4\sqrt{3y-2} + 6 = x. \end{cases}$$

63.
Világos, hogy $x \ge -2.$ Ha $x > 2,$ akkor

$$x^3 - 3x = \frac{x^3 + 3x(x+2)(x-2)}{4} > \frac{x^3}{4} > \sqrt{x+2},$$

ugyanis

$$x^6 > 16(x+2),$$
$$x\left(x^5 - 16\right) > 2 \cdot 16 = 32.$$

Ez azt jelenti, hogy $-2 \le x \le 2.$ Legyen $x = 2\cos\alpha,$ ahol $0 \le \alpha \le \pi.$ Ekkor az egyenlet:

$$8\cos^3\alpha - 6\cos\alpha = \sqrt{2\cos\alpha + 2}.$$

Tudjuk, hogy

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha,$$
$$\cos 2\alpha + 1 = 2\cos^2\alpha,$$

ezért

$$2\cos 3\alpha = 2\cos\frac{\alpha}{2},$$

$$\cos 3\alpha = \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Innen $3\alpha = \frac{\alpha}{2} + k\cdot 2\pi,$ vagy $3\alpha = -\frac{\alpha}{2} + k\cdot 2\pi,$ ahol k egész szám. Mivel $0 \le \alpha \le \pi,$ ezért $k = 0,$ vagy $k = 1$ lehet. Az eredeti egyenlet megoldásai tehát:

$$x = 2,\ x = 2\cos\frac{4\pi}{5},\ x = 2\cos\frac{4\pi}{7}.$$

64.*

Legyen $\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ és $\beta = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Ekkor $\alpha - \beta = \alpha\beta = 1.$ Vegyük észre, hogy

$$\alpha^3 = \sqrt{5} + 2,$$

$$\beta^3 = \sqrt{5} - 2,$$

ezért

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = 1.$$

(Egy másik levezetés adódik a **11.** feladat a) részének megoldásából.) Legyen $y = \sqrt[5]{\sqrt{x}-3},$ ekkor rendezés után az egyenlet:

$$\sqrt[5]{y^5+6} = y + 1.$$

Mivel $y^5 + 6 = \sqrt{x} + 3 > 3,$ így $y + 1 > 1,$ tehát $y > 0.$ Az egynlet mindkét oldalát ötödik hatványra emelve, rendezést követően kaphatjuk, hogy

$$y^4 + 2y^3 + 2y^2 + y - 1 = 0.$$

Vegyük észre, hogy ez írható

$$\left(y^2 + y + \alpha\right)\left(y^2 + y - \beta\right) = 0$$

alakban. Itt $y^2 + y + \alpha$ nem rendelkezik valós gyökkel, mivel $1 - 4\alpha < 0.$ Az $y^2 + y - \beta$ polinom pozitív gyöke:

$$y = \frac{-1+\sqrt{1+4\beta}}{2} = \frac{-1+\sqrt{2\sqrt{5}-1}}{2},$$

ahonnan

$$x = \left(y^5+3\right)^2 = \left[\left(\frac{-1+\sqrt{2\sqrt{5}-1}}{2}\right)^5 + 3\right]^2 = \frac{7+5\sqrt{5}}{2}.$$

Ekvivalens egyenletekkel dolgoztunk.

65.
Tegyük fel, hogy a változók között az a a legnagyobb értékű! Mivel az $x \mapsto x^5$ függvény szigorúan monoton nő, így

$$3b = (d+e+a)^5 \geq (c+d+e)^5 = 3a \Rightarrow b \geq a,$$

vagyis $a = b$ -nek kell teljesülnie. Ezt felhasználva:

$$3c = (e+a+b)^5 \geq (d+e+a)^5 = 3b \Rightarrow c \geq b,$$

ahonnan $a = b = c$. Még kétszer megismételve a gondolatmenetet, adódik, hogy $a = b = c = d = e$. Ekkor

$$81a^5 = a \Leftrightarrow a(81a^4 - 1) = 0,$$

ahonnan

$$a = 0 \text{ vagy } a = \frac{1}{3} \text{ vagy } a = -\frac{1}{3}.$$

Egyszerű ellenőrizni, hogy a kapott értékek valóban meg is felelnek.

66.
Átrendezés után:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2} = \dfrac{12}{5x} - 1, \\ \dfrac{1}{x^2+y^2} = 1 - \dfrac{4}{5y}. \end{cases}$$

Az egyenleteket összeadva ill. kivonva egymásból:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2} = \dfrac{6}{5x} - \dfrac{2}{5y}, \\ 1 = \dfrac{6}{5x} + \dfrac{2}{5y}. \end{cases}$$

Szorozzuk össze a kapott egyenleteket! Kapjuk, hogy

$$\frac{1}{x^2+y^2} = \frac{36}{25x^2} - \frac{4}{25y^2}.$$

Legyen $x^2 = a,\ y^2 = b,$ ekkor rendezést követően:

$$25ab = 36b\left(a+b\right) - 4a\left(a+b\right) \Leftrightarrow 0 = 36b^2 + 7ab - 4a^2.$$

Az a-t paraméternek tekintve, a b-ben másodfokú egyenlet megoldásai

$$b = \frac{a}{4} \text{ és } b = -\frac{4a}{9}.$$

Könnyű látni, hogy a második eset nem állhat fenn, következésképpen $y^2 = \frac{x^2}{4}$, amiből

$$1 = \left(x^2 + y^2\right)\left(\frac{12}{5x} - 1\right) = \frac{5x^2}{4}\left(\frac{12}{5x} - 1\right) = 3x - \frac{5x^2}{4},$$

$$5x^2 - 12x + 4 = 0,$$

melynek megoldásai $x_1 = 2$ ill. $x_2 = 0,4.$ Mivel $y = \frac{2x}{5x-6}$, ezért a megfelelő y értékek: $y_1 = 1$ ill. $y_2 = -0,2.$ A kapott megoldások behelyettesítéssel könnyen ellenőrizhetők.

67.*

Tekintsük a $z = a - bi$ komplex számot! Mivel két kanonikus alakú komplex szám pontosan akkor egyenlő, ha valós ill. képzetes részeik egyenlők, ezért az egyenletrendszer megfelel annak, hogy

$$z^3 = \left(a - bi\right)^3 = 8 + 11i.$$

Így akkor

$$a^2 + b^2 = |z|^2 = \left|\sqrt[3]{8+11i}\right|^2 = \sqrt[3]{\left|8+11i\right|} = \sqrt[3]{64+121} = \sqrt[3]{185}.$$

Megjegyzés:

A komplex számokra vonatkozó alapvető ismeretekről számos helyen olvashatunk. Például egy érdekes felépítést és jó összefoglalást találhatunk Szele Tibor: Bevezetés az algebrába c. könyvének 27-47. oldalain.

68.*

Ha az $x^3 - 3x + 1$ polinom gyökei $\alpha, \beta, \gamma,$ akkor a Viéte-formulák miatt:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0, \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -3, \\ \alpha\beta\gamma = -1, \end{cases} \quad \text{illetve} \quad \begin{cases} \alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5 = -a, \\ \alpha^5\beta^5 + \beta^5\gamma^5 + \gamma^5\alpha^5 = b, \\ \alpha^5\beta^5\gamma^5 = -c. \end{cases}$$

Nyilvánvaló, hogy $c = 1.$ Legyen $s_k = \alpha^k + \beta^k + \gamma^k.$ Világos, hogy $s_1 = 0,$ valamint

$$s_2 = (\alpha+\beta+\gamma)^2 - 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) = 6,$$
$$s_3 = 3s_1 - 3 = -3.$$

Mivel pl. $\alpha^5 = 3\alpha^3 - \alpha^2$, ezért

$$s_5 = 3s_3 - s_2 = -15 \Rightarrow a = 15.$$

Mivel $\alpha^2\beta^2\gamma^2 = 1$, ezért $\alpha\beta,\ \beta\gamma,\ \gamma\alpha$ gyökei lesznek az x^3+3x^2-1 polinomnak. Legyen $S_k = (\alpha\beta)^k + (\beta\gamma)^k + (\gamma\alpha)^k$. Tudjuk, hogy $S_1 = -3$. Vegyük észre, hogy

$$S_2 = (\alpha\beta)^2 + (\beta\gamma)^2 + (\gamma\alpha)^2 = S_1^2 - 2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma) = 9 - 2\cdot 0 = 9,$$
$$S_3 = 3 - 3S_2 = -24.$$

Tekintettel arra, hogy pl.

$$(\alpha\beta)^4 = \alpha\beta - 3(\alpha\beta)^3,$$
$$(\alpha\beta)^5 = (\alpha\beta)^2 - 3(\alpha\beta)^4,$$

kapjuk, hogy

$$S_4 = S_1 - 3S_3 = -3 + 72 = 69,$$
$$S_5 = S_2 - 3S_4 = 9 - 207 = -198 = b.$$

Tehát $a = 15,\ b = -198,\ c = 1.$

69.*

Legyen $p = a^2b + b^2c + c^2a$ és $q = ab^2 + bc^2 + ca^2$. A Viéte-formulák miatt:

$$\begin{cases} a+b+c = 2, \\ ab+bc+ca = -1, \\ abc = -1. \end{cases}$$

Az első összefüggést rendre megszorozva az $ab,\ bc,\ ca$ kifejezésekkel:

$$\begin{cases} a^2b + ab^2 + abc = 2ab, \\ abc + b^2c + bc^2 = 2bc, \\ ca^2 + abc + c^2a = 2ca. \end{cases}$$

Összeadást követően:

$$p + q = 2(ab+bc+ca) - 3abc = 1.$$

Vegyük észre, hogy

$$pq=(ab)^3+(bc)^3+(ca)^3+3(abc)^2+abc\left(a^3+b^3+c^3\right).$$

Tekintsük a következő azonosságokat:

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca),$$
$$(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)=a^3+b^3+c^3+a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2.$$

Ezekből
$$a^3+b^3+c^3=2(4+2)-(p+q)=11,$$
valamint
$$(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2=(-1)^2-2abc(a+b+c)=1+2\cdot 2=5,$$
$$(ab)^3+(bc)^3+(ca)^3=(-1)\cdot 5-abc(p+q)=-5+1=-4.$$
Ezért
$$pq=-4+3-11=-12.$$
Innen
$$p(1-p)=-12,$$
$$p^2-p-12=0.$$

Ennek a megoldásai $p=-3$, illetve $p=4$. Ezekkel lehet tehát a kifejezés egyenlő.

Megjegyzés:
A feladatban szereplő harmadfokú polinomnak 3 valós gyöke van. A kifejezés azért vehet fel két különböző értéket is, mivel a gyökök sorrendje nincs megadva.

70.*
Tekintsük azt a $p(t)=t^3+at^2+bt+c$ polinomot, melynek gyökei x, y és z. A gyökök és együtthatók közötti összefüggés szerint $-a=x+y+z=0$, ezért $p(t)=t^3+bt+c$. Teljesülni fognak a következők:
$$x^3+bx+c=0,$$
$$y^3+by+c=0,$$
$$z^3+bz+c=0.$$

Mivel $x^3+y^3+z^3=18$ és $x+y+z=0$, így a fenti összefüggések összeadása után $c=-6$ adódik, ahonnan
$$p(t)=t^3+bt-6.$$
Mivel
$$t^k p(t)=t^{k+3}+bt^{k+1}-6t^k,$$

ezért, bevezetve az $S_k=x^k+y^k+z^k$ jelölést:

$$S_{k+3}+bS_{k+1}-6S_k=0.$$

Így akkor

$$S_7=-bS_5+6S_4=-b\left(-bS_3+6S_2\right)+6\left(-bS_2+6S_1\right)=b^2S_3-12bS_2+36S_1.$$

Ismét felhasználva egyet a Viéte-formulák közül:

$$S_2=x^2+y^2+z^2=\left(x+y+z\right)^2-2\left(xy+yz+zx\right)=-2b.$$

Mivel $S_1=0,\ S_3=18,\ S_7=2058$ és $S_2=-2b,$ ezért

$$2058=18b^2+24b^2=42b^2.$$

Innen $b=7,$ vagy $b=-7.$ Ha $b=7,$ akkor $p\left(t\right)=t^3+7t-6,$ de ennek a polinomnak csak egyetlen valós gyöke van, hiszen szigorúan monoton növekedő, így $b\neq 7.$ Ha $b=-7,$ akkor $p\left(t\right)=t^3-7t-6.$ Könnyű ellenőrizni, hogy ennek három valós gyöke van: $-1,\ -2,$ és a $3.$ Ezeknek a számoknak a permutációi adják az eredeti egyenletrendszer megoldáshármasait.

71.*

Ha tekintjük az x^2+ax+c ill. x^2+bx+d polinomokat, akkor

$$\left(x^2+ax+c\right)\left(x^2+bx+d\right)=x^4+\left(a+b\right)x^3+\left(ab+c+d\right)x^2+\left(ad+bc\right)x+cd.$$

Legyen ezért

$$p\left(x\right)=x^4+8x^3+23x^2+28x+12.$$

Könnyű ellenőrizni, hogy ennek a polinomnak a $-1,$ a -3 és a -2 is gyöke, ezért a gyöktényezők kiemelése után:

$$p\left(x\right)=\left(x+1\right)\left(x+2\right)^2\left(x+3\right).$$

Innen

$$p\left(x\right)=\left(x^2+4x+3\right)\left(x^2+4x+4\right),$$

vagy

$$p\left(x\right)=\left(x^2+3x+2\right)\left(x^2+5x+6\right).$$

Ezért az egyenletrendszer az egyenletrendszer összes $\left(a,b,c,d\right)$ megoldásai:

$$\left(4,4,3,4\right),\ \left(4,4,4,3\right),\ \left(3,5,2,6\right),\ \left(5,3,6,2\right).$$

FÜGGVÉNYEGYENLETEK

72.
Helyettesítsünk az x helyére az $x-2$ illetve $6-x$ kifejezéseket, így adódik, hogy

$$2f(x)+f(6-x)=2x+3,$$
$$2f(6-x)+f(x)=-2x+15.$$

Ezekből az egyenletekből könnyen kifejezhetjük $f(x)$-et:

$$4f(x)-2x+15-f(x)=2(2x+3)\Leftrightarrow 3f(x)=6x-9\Leftrightarrow f(x)=2x-3.$$

Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy a kapott $f(x)$ függvény teljesíti a feladatban szereplő összefüggést.

Megjegyzés:
A helyettesítést nem úgy kell érteni, hogy az x szám helyett a vele egyenlő $x-2$ számot írjuk be az egyenletbe (ilyen szám nincs is), hanem úgy, hogyha x valamely eleme az értelmezési tartománynak, akkor $x-2$ is eleme, így rá is teljesülnie kell az összefüggésnek.

73.
Írjunk x helyére $\frac{1}{1-x}$-et, majd pedig $\frac{x-1}{x}$-et, ekkor a következők adódnak:

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{1}{1-x},$$

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right)+f(x)=\frac{x-1}{x}.$$

A fenti két egyenletből, valamint az eredeti összefüggésből álló rendszer lehetővé teszi, hogy kifejezzük $f(x)$-et:

$$2\left(f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)\right)=x+\frac{1}{1-x}+\frac{x-1}{x},$$

$$2\left(f(x)+\frac{1}{1-x}\right)=x+\frac{1}{1-x}+\frac{x-1}{x},$$

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{x-1}{x}-\frac{1}{1-x}\right)=\frac{x^3-x+1}{2x(x-1)}.$$

Kissé fáradtságos számolással meggyőződhetünk róla, hogy a kapott függvény valóban teljesíti a feladatban szereplő összefüggést.

74.
Rendezés után:

$$x=f\left(f(x)\right)-f(x).$$

Ha $f(x_1)=f(x_2)$, akkor

$$x_1=f\left(f(x_1)\right)-f(x_1)=f\left(f(x_2)\right)-f(x_2)=x_2.$$

Ha $f\left(f(x_1)\right)=f\left(f(x_2)\right)$, akkor a fentiek miatt

$$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow x_1=x_2.$$

Ebből az következik, hogy az $f\left(f(x)\right)=0$ egyenletnek nem lehet két különböző megoldása! Mivel $x=0$ helyettesítéssel az eredeti egyenletből

$$f(0)=f\left(f(0)\right),$$

ezért $0=f(0)$, tehát az egyenletnek egyetlen megoldása van: $x=0$.

75.
Ha x_1 és x_2 olyan, hogy $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$, akkor

$$g\left(f(x_1)\right)=g\left(f(x_2)\right)\Leftrightarrow x_1^3=x_2^3\Leftrightarrow x_1=x_2.$$

Mivel

$$f\left(g\left(f(x)\right)\right)=\left(f(x)\right)^2=f\left(x^3\right),$$

Ezért *x* helyére a 0, 1, -1 számokat helyettesítve:

$$f(0)=\left(f(0)\right)^2,$$
$$f(1)=\left(f(1)\right)^2,$$
$$f(-1)=\left(f(-1)\right)^2.$$

Láttuk, hogy $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, így $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$ páronként különbözők, ami ellentmond annak, hogy a $y = y^2$ egyenletnek csak két különböző megoldása van! Nem létezik tehát a feladatban leírt tulajdonságú f és g függvény.

76.*

Vegyük észre, hogy $f_0(x) = 40x^2$ kielégíti a feladatban szereplő egyenletet! Tekintsük a

$$g(x) = f(x) - f_0(x)$$

függvényt. Ekkor az f-re vonatkozó összefüggés miatt

$$g(x+y) = g(x) + g(y),$$

ha $x, y \in \mathbb{Q}$.

Ha elvégezzük az $y = 0,\ y = -x,\ y = x$ helyettesítéseket, akkor rendre a következők adódnak:

$$g(0) = 0,$$
$$g(-x) = -g(x),$$
$$g(2x) = 2g(x).$$

Teljes indukció felhasználásával könnyű igazolni, hogy

$$g(nx) = ng(x),$$

ahol az n pozitív egész. Az indukciós lépés:

$$g\left((n+1)x\right) = g(nx + x) = g(nx) + g(x) = ng(x) + g(x) = (n+1)g(x).$$

Tekintsük most az $x = \frac{t}{n}$ helyettesítést, ekkor

$$g(t) = g\left(n \cdot \frac{t}{n}\right) = ng\left(\frac{t}{n}\right),$$

így

$$g\left(\frac{t}{n}\right) = \frac{1}{n} g(t).$$

Ha p egész és $q \neq 0$, egész, akkor az eddigi eredményeink miatt:

$$g\left(\frac{p}{q}x\right) = g\left(p \cdot \frac{x}{q}\right) = pg\left(\frac{x}{q}\right) = \frac{p}{q} g(x),$$

ahonnan $x = 1$ helyettesítéssel

$$g\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q} \cdot g(1) = k \cdot \frac{p}{q},$$

ahol $k = g(1)$ konstans. Azaz, ha *x* racionális szám, akkor

$$f(x) = 40x^2 + kx,$$

ahol *k* adott racionális számot jelöl. Könnyű ellenőrizni, hogy ezek az *f* függvények valóban megfelelnek.

77.*
Tegyük fel indirekt módon, hogy *f* egy megfelelő függvény. Ha $x = y$, akkor

$$(*) \qquad f\left(f(x)x\right) = \frac{x}{2} \cdot f\left(2f(x)\right).$$

Legyen $a, b \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $f(a) = f(b)$, ekkor

$$(a+b)\, f\left(f(b)b\right) = (a+b)\, f\left(f(a)b\right) = a^2 f\left(f(a) + f(b)\right) = a^2 f\left(2f(b)\right).$$

Felhasználva a (*) összefüggést:

$$(a+b)\frac{b}{2} f\left(2f(b)\right) = a^2 f\left(2f(b)\right),$$
$$(a+b)b = 2a^2,$$
$$(a-b)(2a+b) = 0 \Leftrightarrow a = b.$$

Azt kaptuk, hogy *f* injektív függvény. Legyen most $x = c,\ y = 1,$ ekkor

$$(c+1)\, f\left(f(c)\right) = c^2 f\left(f(c) + f(1)\right).$$

Ha $c + 1 = c^2 \Leftrightarrow c^2 - c - 1 = 0,$ aminek pozitív megoldása $c = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$ akkor felhasználva *f* injektivitását kapjuk, hogy

$$f\left(f(c)\right) = f\left(f(c) + f(1)\right),$$
$$f(c) = f(c) + f(1),$$
$$f(1) = 0,$$

ami ellentmondás, hiszen *f* pozitív értékű.

78.
Legyen $x=0,$ ekkor

$$f\left(f\left(y\right)\right)=y+f\left(0\right).$$

Ebből adódóan, ha $f\left(x\right)=f\left(y\right),$ akkor $f\left(f\left(x\right)\right)=f\left(f\left(y\right)\right),$ így $x=y,$ vagyis *f* injektív függvény. Legyen $y=0,$ ekkor

$$f\left(x+f\left(0\right)\right)=f\left(x\right)\Rightarrow x+f\left(0\right)=x\Rightarrow f\left(0\right)=0.$$

Így akkor $f\left(f\left(y\right)\right)=y$ minden racionális *y* számra. Ezért aztán

$$f\left(x+y\right)=f\left(x+f\left(f\left(y\right)\right)\right)=f\left(y\right)+f\left(x\right).$$

Ez pedig a nevezetes Cauchy-féle egyenlet, amelynek megoldásai a **76.** feladat megoldása közben látottak szerint: $f\left(x\right)=f\left(1\right)\cdot x.$ Legyen $x=f\left(1\right),$ ekkor

$$f\left(f\left(1\right)\right)=f\left(1\right)\cdot f\left(1\right)=1,$$

ahonnan $f\left(1\right)=1$ vagy $f\left(1\right)=-1.$ Kaptuk, hogy $f\left(x\right)=x$ vagy $f\left(x\right)=-x.$ Könnyű ellenőrizni, hogy ezek teljesítik az eredeti feltételt, a látott gondolatmenetből pedig következik, hogy más megoldás nem jöhet szóba.

Megjegyzés:
Ha a Cauchy-féle egyenlet megoldásait az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvények között keressük, akkor igen komoly problémát kapunk. Ha feltesszük, hogy *f* folytonos $\mathbb{R}$-en, akkor tekintve egy x_0 irracionális helyet, valamint egy racionális számokból álló: $r_n\to x_0$ sorozatot (ilyen sorozat van) adódik, hogy

$$f\left(r_n\right)\to f\left(x_0\right),$$
$$f\left(r_n\right)=f\left(1\right)\cdot r_n\to f\left(1\right)\cdot x_0,$$

ezért $f\left(x_0\right)=f\left(1\right)\cdot f\left(x_0\right).$ Tehát ilyenkor ugyanolyan hozzárendelésű (csak éppen a valós számokon értelmezett) függvények a megoldások. Megmutatható azonban, hogy vannak az egyenletnek nem folytonos megoldásai is.

79.

Belátjuk, hogy csakis $\alpha=1$ lehetséges. Ha $\alpha=1$, akkor pl. $f(x)=x$ megfelel. Ha $\alpha\neq 1$, akkor minden x-hez létezik olyan y, hogy $y=\alpha(x+y)$. Ez ugyanis ekvivalens azzal, hogy

$$y=\frac{\alpha x}{1-\alpha}.$$

Így viszont

$$f(x)=0$$

teljesülne minden x-re, ami kizárt, hiszen f nem lehet konstans függvény.

80.*

Nem létezik ilyen függvény. Legyen $x\neq 0$ és $y=\frac{1}{x}$, ekkor

$$f^2(x+y)\geq f^2(x)+2f(1)+f^2(y)\geq f^2(x)+a,$$

ahol $a=2f(1)>0$. Értelmezzük az x_n sorozatot a következőképpen:

$$x_n=x_{n-1}+y_{n-1},\ y_n=\frac{1}{x_n},$$

ahol $n\geq 2$, egész szám és $x_1\neq 0$, $y_1=\frac{1}{x_1}$ rögzített. Ekkor a fentiek miatt

$$f^2(x_n+y_n)\geq f^2(x_n)+a=f^2(x_{n-1}+y_{n-1})+a\geq f^2(x_{n-1})+2a\geq\ldots\geq f^2(x_1)+na\geq na,$$

ahonnan

$$f^2(x_n)\geq(n-1)a,$$

ami ellentmond annak, hogy az f korlátos függvény.

81.

Alkalmazzuk f-et az összefüggés mindkét oldalára:

$$f\big(f(f(n))\big)=f(n+1),$$
$$f(n+1)=f(n)+1.$$

Az $n=0,1,2,\ldots,n-1$ helyettesítésekkel kapjuk, hogy

$$f(1) = f(0) + 1,$$
$$f(2) = f(1) + 1,$$
$$\vdots$$
$$f(n) = f(n-1) + 1.$$

Összeadás után:

$$f(n) = n + f(0).$$

Így akkor

$$f(f(n)) = n + 1 = f(n) + f(0) = n + 2f(0),$$

ahonnan $f(0) = \frac{1}{2}$, ami ellentmondás. Nincs tehát megfelelő f függvény.

82.**

Legyen $g(x) = x^2 - 2,\ x \in \mathbb{R}$. A g függvénynek két fixpontja van, azaz két olyan $x \in \mathbb{R}$ szám létezik, melyekre $g(x) = x$: $x = 2,\ x = -1$. Állítjuk, hogy nincs olyan f függvény, amely megfelelő lenne. Vegyük észre, hogy a $(g \circ g)(x) = g(g(x))$ függvénynek 4 fixpontja van:

$$g(g(x)) = x \Leftrightarrow (x^2 - 2)^2 - 2 = x,$$
$$x^4 - 4x^2 - x + 2 = 0,$$
$$(x+1)(x-2)(x^2 + 3x + 1) = 0,$$

ahonnan

$$x_1 = -1,\ x_2 = -2,\ x_3 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2},\ x_4 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}.$$

Jelöljük ezeket rendre a, b, c, d-vel. (Az a és b a g függvény fixpontjai.) Tegyük fel, hogy $g(c) = y$. Ekkor

$$c = g(g(c)) = g(y),$$
$$g(g(y)) = g(c) = y,$$

tehát y fixpontja $g \circ g$ -nek. Ha $y = a$, akkor $a = g(a) = g(y) = c$, ami ellentmondás, így $y \neq a$. Hasonlóan adódik, hogy $y \neq b$. Mivel $y \neq c$ (hiszen $g(c) \neq c$), így $y = d$. Azt kaptuk, hogy $g(c) = d$ és $g(d) = c$. Vegyük észre, hogy

$$g(f(x)) = f(f(f(x))) = f(g(x)).$$

Ha x_0 jelöli az a vagy b valamelyikét, akkor $f(x_0)=f(g(x_0))=g(f(x_0))$. Ez azt jelenti, hogy $f(x_0)$ értéke a vagy b. Ugyanígy adódik, hogy $x_0 \in \{a,b,c,d\}$ esetén $f(x_0)\in\{a,b,c,d\}$. Tegyük fel, hogy $f(c)=a$. Ekkor

$$f(a)=f(f(c))=g(c)=d,$$

ami a korábban látottak miatt ellentmondás, tehát $f(c)\neq a$. Hasonlóan adódik, hogy $f(c)\neq b$. De $f(c)=c$ sem lehetséges, hiszen akkor

$$f(f(c))=f(c)=c=g(c),$$

ami ellentmondás. Tehát $f(c)=d$. Ekkor

$$f(d)=f(f(c))=g(c)=d,$$
$$f(f(d))=f(d)=d=g(d),$$

ami ellentmondásra vezet.

83.**

Tekintsük az (x_n) sorozatot, ahol $x_0>0$ rögzített valós szám, továbbá $x_n=f(x_{n-1})$, ha $n=1,\ 2,\ \ldots$. Ekkor a sorozat tagjaira érvényes lesz az

$$x_{n+2}=-2x_{n+1}+15x_n$$

rekurziós formula. Ez egy másodrendű lineáris rekurzió. A karakterisztikus egyenlet:

$$x^2+2x-15=0,$$

aminek a megoldásai: $x_1=3$ és $x_2=-5$. Így akkor az elméletből ismert módon adódik, hogy

$$x_n=\lambda_1\cdot 3^n+\lambda_2\cdot(-5)^n,$$

ahol

$$x_0=\lambda_1+\lambda_2,$$
$$x_1=3\lambda_1-5\lambda_2.$$

Tehát

$$x_n=5^n\left[\lambda_1\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n+\lambda_2(-1)^n\right].$$

Az (x_n) pozitív tagú sorozat, így $\lambda_2 \neq 0$ esetén $\left(\frac{3}{5}\right)^n \to 0$ miatt a szögletes zárójelen belül lévő szám λ_2 előjelétől függően elég nagy páratlan, vagy páros n pozitív egészre 0-nál kisebb, ami ellentmondásra vezet. Tehát $\lambda_2 = 0$, ekkor $\lambda_1 = x_0$ és $f(x_0) = x_1 = 3\lambda_1 = 3x_0$. Mivel x_0 tetszőlegesen volt rögzítve, ezért ez azt eredményezi, hogy $f(x) = 3x$, $x \in \mathbb{R}^+$. Könnyű ellenőrizni, hogy a kapott függvény meg is felel.

84.*

Könnyű látni, hogy $f(x) \equiv 0$ megfelelő. A továbbiakban feltesszük, hogy f nem az azonosan 0 függvény. Legyen $x = y = -1$, akkor

$$f(1 + f(-1)) = -f(-1) + f(-1) = 0,$$

így létezik olyan $a \in \mathbb{R}$ szám, hogy $f(a) = 0$. Legyen $x = a$ és $y = 1$, akkor

$$f(a + f(a)) = af(1) + f(a),$$
$$0 = af(1).$$

Ha $a \neq 0$, akkor $f(1) = 0$. Legyen $y = 1$, akkor

$$(*) \qquad f(x + f(x)) = xf(1) + f(x) = f(x).$$

Ha $f(x) = f(y) \neq 0$, akkor behelyettesítés után

$$f(xy + f(x)) = xf(y) + f(x) = f(xy + f(y)) = yf(x) + f(y),$$
$$xf(y) = yf(x) \Leftrightarrow x = y.$$

A (*) összefüggés miatt akkor

$$x + f(x) = x \Leftrightarrow f(x) = 0,$$

ami ellentmondás. Azt kaptuk, hogy $a = 0$, azaz $f(0) = 0$. Ha $y = 0$, akkor

$$f(f(x)) = f(x).$$

Ha $f(x) \neq 0$, akkor a fentiek miatt $f(x) = x$. Világos, hogy a kapott függvények megfelelnek, a gondolatmenetből pedig világos, hogy más megoldás nincs.

85.
Legyen $a > 0,\ a \notin \mathbb{Q}$, ekkor $\sqrt{a} \notin \mathbb{Q}$ is igaz. Tekintsük az $x = \sqrt{a}, y = -\sqrt{a}$ helyettesítést:

$$f(-a) = f\left(\sqrt{a} - \sqrt{a}\right) = f(0).$$

Tehát $f(x) = f(0) = c$, ha $x < 0,\ x \notin \mathbb{Q}$. Tekintsük most az $x = -\sqrt{a}, y = -\sqrt{a}$ helyettesítést:

$$f(a) = f\left(-2\sqrt{a}\right) = f(0) = c.$$

Azt kaptuk, hogyha x irracionális szám, akkor $f(x) = c$. Legyen r a 0-tól különböző racionális szám. Belátjuk léteznek olyan x és y irracionális számok, hogy $r = x + y$ és $xy \notin \mathbb{Q}$. Ekkor ugyanis

$$f(r) = f(x+y) = f(xy) = c = f(0),$$

vagyis *f* konstans.
Mivel $xy = x(r-x) = rx - x^2$, ezért $x = \sqrt{2}$ esetén $xy = r\sqrt{2} - 2 \notin \mathbb{Q}$, amely igazolja állításunkat. A feladat megoldásai tehát a konstans függvények.

86.*
Világos, hogy f értékei nemnegatív valós számok. Teljes indukcióval könnyen adódik, hogyha n természetes szám, akkor bármely valós x esetén $f(x+n) = f(x) + n$. Elvégezve az $x \leftrightarrow x-1$ helyettesítést:

$$f(x) = f(x-1) + 1.$$

Innen teljes indukcióval azonal adódik, hogy

$$f(x+n) = f(x) + n \geq 0$$

bármely x valós és n egész szám esetén teljesül. Mivel

$$\left(f(x-1)\right)^2 = f\left((x-1)^2\right) = f\left((1-x)^2\right) = \left(f(1-x)\right)^2,$$

ezért

$$\left(f(x)-1\right)^2 = \left(f(-x)+1\right)^2,$$
$$f(x) - 1 = f(-x) + 1,$$
$$f(-x) = -f(x).$$

Ebből $f(0) = 0$, ezért bármely n egész számra $f(n) = n$. Láttuk, hogyha n egész szám, akkor

$$f(x) - n \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq n.$$

Mivel

$$0 \le f(n+1-x) = -f(x-(n+1)) = -f(x)+n+1,$$
$$f(x) \le n+1,$$

ezért $x \in [n, n+1]$ esetén $f(x) \in [n, n+1]$. Innen következik, hogy tetszőleges x valós számra

$$|f(x)-x| \le 1.$$

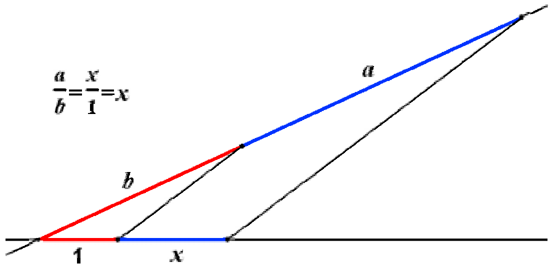
Legyen k pozitív egész kitevős 2-hatvány! Ekkor eddigi eredményeinket figyelembe véve:

$$1 \ge |f(x^k)-x^k| = |(f(x))^k - x^k| = |f(x)-x|\left|x^{k-1}+x^{k-2}f(x)+..+(f(x))^{k-1}\right| \ge |f(x)-x|x^{k-1},$$
$$0 \le |f(x)-x| \le \frac{1}{x^{k-1}}.$$

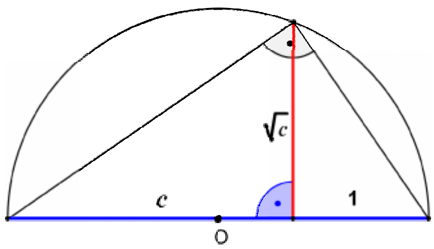
Mivel k tetszőlegesen nagy lehet, ezért ez csakis úgy teljesülhet, ha $f(x)=x$ minden valós x esetén, amelyre $x>1$. Láttuk, hogy $f(x+n)=f(x)+n$ bármely x valós és n egész szám esetén teljesül. Ebből következik, hogy $f(x)=x$ minden valós x esetén.

EUKLIDESZI SZERKESZTHETŐSÉG

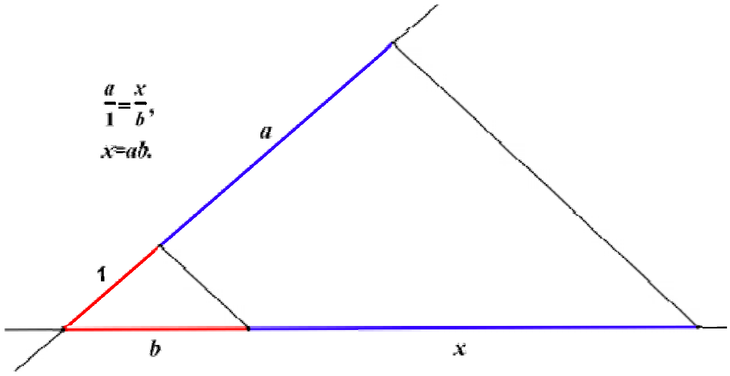
87.
A pozitív egész számok szerkeszthetősége nyilvánvaló. A pozitív racionális számok szerkesztéséhez használjuk fel a párhuzamos szelők tételét:



A pozitív racionális számok négyzetgyökének szerkesztéséhez használjuk fel a derékszögű háromszögre vonatkozó magasságtételt:



Két adott szakasz összege és különbsége nyilván szerkeszthető. Az eddig látottak miatt ezért elegendő igazolni, hogy az egységszakasz birtokában két adott szakasz hosszának szorzatát meg bírjuk szerkeszteni. Ez a párhuzamos szelők tételéből egyszerűen adódik. (Negyedik arányos szerkesztése.)



88.
Könnyű látni, hogy az egységszakasz birtokában H elemeinek szorzata és hányadosa szerkeszthető. (Negyedik arányos szerkesztése.) A másodfokú polinomok gyökeire vonatkozó megoldóképlet miatt ezek után elegendő igazolni, hogyha adott az egységszakasz és egy $0 < x \in H$ hosszú szakasz, akkor szerkeszthető $\sqrt{x}$ hosszú szakasz. Ez a magasságtétel segítségével a **87.** feladatban látott módon megtehető.

89.
Az, hogy egy pont szerkeszthető, ha koordinátái megkaphatók a racionális számokból az alapműveletek és a négyzetgyökvonás véges sokszori alkalmazásával következik a **87.** és **88.** feladat megoldásában látottakból. A megfordításhoz gondoljuk át, hogy a derékszögű koordináta-rendszerben az egyenes ill. kör egyenlete:

$$Ax + By + C = 0,$$
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Az euklideszi szerkesztési lépéseknek ezen egyenletek közül választott két egyenletből álló egyenletrendszer megoldása felel meg. Tekintettel arra, hogy ez legfeljebb másodfokú egyenletre vezet, melynek együtthatói szerkeszthető számok (kvadratikus irracionálisok), így a **88.** feladat miatt az állítás adódik.

90.**
a) Legyen $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, ahol $a_i \in \mathbb{Q}$, $a_3 \neq 0$. A konjugált számokról tudottak miatt:

$$f\left(a+b\sqrt{c}\right)=A+B\sqrt{c},$$
$$f\left(a-b\sqrt{c}\right)=A-B\sqrt{c},$$

ahol $A,B\in\mathbb{Q}$. Mivel

$$f\left(a+b\sqrt{c}\right)=0\Leftrightarrow A+B\sqrt{c}=0,$$

ezért $A=B=0$, amiből következik, hogy

$$f\left(a-b\sqrt{c}\right)=0.$$

A Viéte-formulák miatt, ha $f(x)$ harmadik gyöke x_3, akkor

$$a+b\sqrt{c}+a-b\sqrt{c}+x_3=-\frac{a_2}{a_3},$$
$$2a+x_3=-\frac{a_2}{a_3}\in\mathbb{Q},$$

ahonnan adódik, hogy x_3 racionális szám.

b) Indirekt módon bizonyítunk. Az a) pont miatt azonnal ellentmondásra jutunk.

c) Először megfogalmazzuk a szerkeszthetőséget a testbővítések nyelvén. Legyen F a valós számok valamely részteste. Mivel $0\in F$ és $1\in F$, ezért $\mathbb{Q}\subseteq F$. A konjugáltakról tudottak miatt adódik, hogyha $c\in F$, $c>0$, akkor $F\left(\sqrt{c}\right)=\left\{a+b\sqrt{c}:a,b,c\in F,\sqrt{c}\notin F\right\}$ is számtest. (Ezt nevezzük az F számtest egyszerű négyzetgyökbővítésének.) Egy x valós szám szerkeszthetősége a **89.** feladat állítása miatt azzal egyenértékű, hogy benne van egy egyszerű négyzetgyökbővítésekből álló testbővítés-láncban, azaz $x\in F_n$, ahol

$$\mathbb{Q}=F_0\subset F_1\subset\ldots\subset F_{n-1}\subset F_n,$$

ahol $c_i\in F_i$ pozitív számok úgy, hogy $F_i=F_{i-1}\left(\sqrt{c_{i-1}}\right)$, $i=1,2,\ldots,n.$ Elegendő ezek után belátnunk, hogyha egy racionális együtthatós harmadfokú polinomnak nincs racionális gyöke, akkor egyik gyöke sem kapható meg a $\mathbb{Q}$ halmazból a fent leírtak szerint. Tegyük fel indirekt módon, hogy a polinom valamely gyöke mégis benne van egy ilyen láncban. Ekkor léteznie kell olyan F testnek a láncban, hogy az F testben nincs gyöke a polinomnak, de $F\left(\sqrt{c}\right)$-ben igen, ahol $c>0$, $c\in F$, $\sqrt{c}\notin F$. Legyen x a polinom gyöke úgy, hogy $x\notin F$ és $x\in F\left(\sqrt{c}\right)$, ahol $\sqrt{c}\notin F$. Ekkor $x=a+b\sqrt{c}$, $a,b\in F$. Az a) részben látott módon adódik, hogy akkor $\overline{x}=a-b\sqrt{c}$ is gyöke lesz a polinomnak. (Ezek a gyökök különbözők.) Ha y a polinom harmadik gyöke $F\left(\sqrt{c}\right)$-ben, akkor az a) részben látottakkal analóg módon, a Viéte-formulák miatt

$$a+b\sqrt{c}+a-b\sqrt{c}+y=-\frac{a_2}{a_3},$$
$$y=-\frac{a_2}{a_3}-2a\in F,$$

ami ellentmondás. Ezzel állításunkat igazoltuk.

Megjegyzés:
A konjugált számokról: egy $x=a+b\sqrt{c}$ alakú szám ($a,b,c\in\mathbb{Q}$, $c>0$, $\sqrt{c}\notin\mathbb{Q}$) konjugáltján értsük az $\overline{x}=a-b\sqrt{c}$ számot. Könnyű igazolni a következőket: az x számok H halmaza zárt az összeadásra és szorzásra (következésképpen a pozitív egész kitevős hatványozásra is), továbbá

$$x=y\Leftrightarrow\overline{x}=\overline{y},$$
$$\overline{x+y}=\overline{x}+\overline{y},$$
$$\overline{x\cdot y}=\overline{x}\cdot\overline{y}\Rightarrow\overline{x^n}=\left(\overline{x}\right)^n,$$
$$x\in H,\ x\neq 0\Rightarrow\frac{1}{x}\in H,$$
$$\overline{\left(\frac{1}{x}\right)}=\frac{1}{\overline{x}}.$$

Akkor mondjuk, hogy az F számhalmaz a valós számok valamely részteste, ha $0\in F$ és $1\in F$, valamint F minden a eleméhez van olyan b elem, hogy $a+b=0$, és minden $a\neq 0$ eleme esetén $\frac{1}{a}\in F$, továbbá F elemein az összeadás és a szorzás a valós számoknál érvényes axiómáknak tesz eleget.

91.
A déloszi probléma azzal ekvivalens, hogy a $\sqrt[3]{2}$ szerkeszthető-e? Mivel ez a szám gyöke az x^3-2 polinomnak, de a polinomnak nincsen racionális gyöke, ezért nem szerkeszthető. Tehát a kockakettőzés euklideszi eszközökkel nem lehetséges.

92.
a) Az egységkörös modell miatt a 20°-os szög szerkeszthetősége egyenértékű a $\cos 20°$ szám szerkeszthetőségével. Tudjuk, hogy $\cos 60°=\frac{1}{2}$, valamint $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$. Ha tehát $x=\cos 20°$, akkor x-re:

$$\frac{1}{2}=4x^3-3x,$$
$$0=8x^3-6x-1.$$

A Rolle-tétel miatt adódik (de közvetlen számolással sem nehéz igazolni), hogy az egyenletnek racionális szám nem lehet megoldása, ezért $\cos 20°$ (és így a 20°-os szög) nem szerkeszthető meg.
b) Mivel a szabályos kilencszög oldalaihoz 20°-os kerületi szög tartozik, ezért az a) pont miatt a szerkesztés nem lehetséges.

93.
Mivel szabályos háromszöget és szabályos ötszöget tudunk szerkeszteni, ezért 30°-os 36°-os szöget is. Így akkor 6°-os és 3°-os szöget is. Ebből azonnal adódik, hogy a $3k$°-os szögek szerkeszthetők, ahol k pozitív egész szám. Azok a szögek, amelyek mérőszámainak 3-as maradéka 1 vagy 2, nem szerkeszthetők, hiszen akkor tudnánk 1°-os ill. 2°-os szöget szerkeszteni, melyekből a 20°-os szög szerkesztése is adódhatna, ami ellentmondásra vezetne.

94.**
A komplex számsík valamely pontjának megszerkesztése egyenértékű azzal, hogy a pontnak megfelelő komplex szám valós és képzetes része is szerkeszthető. A szabályos sokszögek szerkeszthetősége ekvivalens azzal, hogy az egységsugarú körbe írt szabályos sokszögek közül melyek szerkeszthetők. Ez pedig a Moivre-formula és a komplex számok trigonometrikus alakja miatt egyenértékű azzal, hogy (szabályos n-szög esetén) a z^n-1 ún. körosztási polinom gyökei szerkeszthetők. (Tudniillik a körosztási polinom gyökei, az ún. n-edik egységgyökök lesznek a 0 középpontú egységkörbe írt szabályos n-szög csúcsai.) Mivel

$$z^n-1=(z-1)\left(z^{n-1}+z^{n-2}+\ldots+z+1\right),$$

így a szabályos hétszög szerkesztéséhez a $z^6+z^5+\ldots+z+1$ polinom gyökeinek szerkesztése a kérdés.

$$z^6+z^5+\ldots+z+1=0,$$
$$\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)+\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+\left(z+\frac{1}{z}\right)+1=0.$$

Legyen $w=z+\frac{1}{z}$, ekkor

$$w^3=z^3+\frac{1}{z^3}+3\left(z+\frac{1}{z}\right),$$
$$w^2=z^2+\frac{1}{z^2}+2,$$

ezért

$$w^3-3w+w^2-2+w+1=0,$$
$$w^3+w^2-2w-1=0.$$

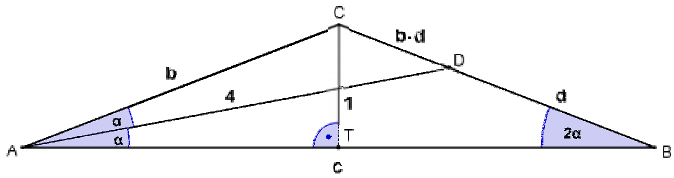
A $z=\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}$ komplex szám gyöke az eredeti polinomnak, így a $w=\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}=\varepsilon+\bar{\varepsilon}=2\cos\frac{2\pi}{7}$ valós szám valós gyöke a w^3+w^2-2w-1 polinomnak. Ennek a harmadfokú polinomnak azonban a Rolle-tétel miatt könnyen láthatóan nincsen racionális gyöke, ezért egyik gyöke sem szerkeszthető. Ez azt jelenti, hogy ε valós része nem szerkeszthető, ezért maga a szám sem.

Megjegyzés:
Egy z komplex szám trigonometrikus alakja: $z=|z|\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. A Moivre-formula: $z^k=|z|^k(\cos k\varphi+i\sin k\varphi)$.

95.*
Az ábra alapján:

$$(1)\quad \frac{1}{b}=\sin 2\alpha \Leftrightarrow b=\frac{1}{\sin 2\alpha},$$

$$(2)\quad \frac{2}{c}=\mathrm{tg}2\alpha \Leftrightarrow c=2\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}.$$



A szinusztételt alkalmazva:

$$(3)\quad \frac{4}{d}=\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}=2\cos\alpha.$$

A szögfelezőtételből:

$$(4)\quad d=\frac{bc}{b+c}.$$

A (3) és (4) egyenletekből:

$$2(b+c)=bc\cos\alpha.$$

Behelyettesítve ebbe az (1) és (2) összefüggéseket, adódik, hogy

$$2\frac{1+2\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=\frac{2\cos 2\alpha\cos\alpha}{\sin^2 2\alpha},$$

$$\sin 2\alpha(1+2\cos 2\alpha)=\cos 2\alpha\cos\alpha,$$

$$2\sin\alpha\left(3-4\sin^2\alpha\right)=1-2\sin^2\alpha,$$

$$8\sin^3\alpha-2\sin^2\alpha-6\sin\alpha+1=0.$$

Legyen $\sin\alpha=x$, ekkor

$$8x^3-2x^2-6x+1=0.$$

A Rolle-tétel segítségével könnyű ellenőrizni, hogy ennek az egész együtthatós harmadfokú egyenletnek nincs racionális megoldása, ez pedig azt jelenti, hogy egyetlen gyöke sem szerkeszthető. Ebből azonnal következik, hogy a háromszög nem szerkeszthető meg, hiszen $\sin\alpha$ és α szerkeszthetősége ekvivalens.

Rekurzív sorozatok

96.
Legyen $a_1 = a$ és $a_2 = b$. Ekkor

$$a_3 = \frac{b+1}{a},$$
$$a_4 = \frac{\frac{b+1}{a}+1}{b} = \frac{a+b+1}{ab},$$
$$a_5 = \frac{\frac{a+b+1}{ab}+1}{\frac{b+1}{a}} = \frac{a+b+1+ab}{b(b+1)} = \frac{(a+1)(b+1)}{b(b+1)} = \frac{a+1}{b},$$
$$a_6 = \frac{\frac{a+1}{b}+1}{\frac{a+b+1}{ab}} = a \Rightarrow a_7 = \frac{a+1}{\frac{a+1}{b}} = b.$$

A kapott eredmény azt mutatja, hogy a sorozat periodikus, a periódus hossza 5. Így akkor

$$a_{2011} = a_1 = 1799.$$

97.**
A lineáris rekurziók elmélete szerint, ha a_n-et $a_n = \alpha x_1^n + \beta x_2^n$ alakban keressük, akkor x_1 és x_2 megoldása az

$$x^2 = \frac{2}{3}x - 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x + 3 = 0,$$

ún. karakterisztikus egyenletnek. Az egyenlet megoldásai: $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm 2\sqrt{2}i}{3}$.

A rekurziós képletet $n = 0$ és $n = 1$ esetére alkalmazva:

$$\begin{cases} 1 = \alpha + \beta, \\ \dfrac{1}{3} = \alpha\dfrac{1+2\sqrt{2}i}{3} + \beta\dfrac{1-2\sqrt{2}i}{3}. \end{cases}$$

Az egyenletrendszert megoldva $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$ adódik, ezért a komplex számok trigonometrikus alakját, valamint a Moivre-formulát felhasználva:

$$a_n=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1+2\sqrt{2}i}{3}\right)^n+\left(\frac{1-2\sqrt{2}i}{3}\right)^n\right]=\frac{1}{2}\left(\cos n\alpha+i\sin n\alpha+\cos(-n\alpha)+i\sin(-n\alpha)\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(2\cos n\alpha+i\sin n\alpha-i\sin n\alpha\right)=\cos n\alpha,$$

ahol az α hegyesszögre $\cos\alpha=\frac{1}{3}$ és $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Ha belátjuk, hogy $n\alpha$ tetszőleges közel lehet a 2π valamely többszöröséhez, akkor abból már a feladat állítása következik, hiszen $\cos(m\cdot 2\pi)=1$, valamint tudjuk, hogy a koszinusz függvény folytonos.

Tekintsünk egy egységsugarú kört és tekerjük fel rá gondolatban a számegyenes nemnegatív részét. Osszuk fel k számú egyenlő ívre, ekkor két szomszédos osztópont ívtávolsága $\frac{2\pi}{k}$. A skatulya-elv miatt az $\alpha, 2\alpha, ..., k\alpha, (k+1)\alpha$ szögek között biztos lesz kettő, amely azonos ívre esik: $n_1\alpha$ és $n_2\alpha$ $(n_1>n_2)$. Ekkor valamely m természetes és n pozitív egész szám esetén:

$$|n_1\alpha-n_2\alpha-m\cdot 2\pi|\le\frac{2\pi}{k},$$
$$|n\alpha-m\cdot 2\pi|\le\frac{2\pi}{k}.$$

Ez azt mutatja, hogy $n\alpha$ közelebb van $m\cdot 2\pi$-hez, mint $\frac{2\pi}{k}$, ahol k tetszőlegesen nagy pozitív egész. Ezt akartuk belátni.

Megjegyzés:
A lineáris rekurziókról számos helyen olvashatunk. Pl.: Reiman István: Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák 1959-1994, 546-547.o.

98.

Legyen $b_n=\frac{1}{a_n}$, ahol $n=0,1,2,...$. Ekkor

$$\left(3-\frac{1}{b_{n+1}}\right)\left(6+\frac{1}{b_n}\right)=18\Leftrightarrow 3b_{n+1}-6b_n-1=0,$$

ahonnan

$$b_{n+1}=2b_n+\frac{1}{3}\Leftrightarrow b_{n+1}+\frac{1}{3}=2\left(b_n+\frac{1}{3}\right).$$

Ebből kitűnik, hogy $\left(b_n+\frac{1}{3}\right)$ olyan mértani sorozat, amelynek hányadosa 2. Alkalmazva a mértani sorozattal kapcsolatos ismereteket:

$$b_n+\frac{1}{3}=2^n\left(b_0+\frac{1}{3}\right)=\frac{2^{n+1}}{3}\Leftrightarrow b_n=\frac{1}{3}\left(2^{n+1}-1\right).$$

Így akkor

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{a_i}=\sum_{i=0}^{n}b_i=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{3}\left(2^{i+1}-1\right)=\frac{1}{3}\left[\frac{2\left(2^{n+1}-1\right)}{2-1}-(n+1)\right]=\frac{1}{3}\left(2^{n+2}-n-3\right).$$

99.

Könnyű látni, hogy $a_1=5.$ A rekurziós képletet átrendezve:

$$2a_{n+1}-7a_n=\sqrt{45a_n^2-36}.$$

Ebből azonnal következik, hogy a sorozat szigorúan monoton növekedő. Négyzetre emelve:

$$(1)\quad a_{n+1}^2-7a_na_{n+1}+a_n^2+9=0,$$
$$(2)\quad a_n^2-7a_{n-1}a_n+a_{n-1}^2+9=0.$$

Az egyenletek megfelelő oldalainak különbségét képezve adódik, hogy

$$a_{n+1}^2-a_{n-1}^2-7a_n\left(a_{n+1}-a_{n-1}\right)=0,$$
$$\left(a_{n+1}-a_{n-1}\right)\left(a_{n+1}+a_{n-1}-7a_n\right)=0.$$

Itt $a_{n+1}=a_{n-1}$ nem lehetséges (szigorú monotonitás), ezért

$$a_{n+1}=7a_n-a_{n-1},$$

amiből a feladat a) állítása következik. Az (1) egyenlet miatt

$$\left(a_{n+1}+a_n\right)^2=9\left(a_na_{n+1}-1\right),$$
$$a_{n+1}a_n-1=\left(\frac{a_{n+1}+a_n}{3}\right)^2.$$

A baloldalon az a) miatt egy pozitív egész szám áll, valamint ugyancsak az a) állítás miatt a zárójelben álló szám racionális. Ezért az utolsóként kapott egyenlet csakis úgy teljesülhet, ha a zárójelben egész szám van, amiből adódik a feladat b) állítása.

100.*

Tegyük fel, hogy a sorozat korlátos. Ekkor létezik olyan K szám, hogy minden n-re $a_n < K$. Így akkor

$$s_n < n \cdot K \Leftrightarrow \frac{1}{s_n} > \frac{1}{n \cdot K},$$

továbbá

$$a_{n+1} > a_n + \frac{1}{n \cdot K}.$$

Ha az n helyére rendre az $1, 2, ..., n$ számokat írjuk, akkor kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} a_2 &> a_1 + \frac{1}{K}, \\ a_3 &> a_2 + \frac{1}{2K}, \\ &\vdots \\ a_{n+1} &> a_n + \frac{1}{nK}. \end{aligned}$$

Összeadva és a mindkét oldalon előforduló tagokat levonva adódik, hogy

$$K > a_{n+1} > a_1 + \frac{1}{K}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}\right).$$

Ez azonban nem lehetséges. Ismert, hogy az $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$, ún. harmonikus összeg bármilyen nagy lehet, tehát elég nagy n-re K^2-nél is nagyobb, amiből a $K > a_1 + K$ ellentmondást kapnánk.

Megjegyzés:

A harmonikus összegre vonatkozó nevezetes állítást sokféleképpen igazolhatjuk. Elemien pl. a 2-hatványok segítségével:

$$\begin{aligned} a_{2^k} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + ... + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + ... + \frac{1}{2^k}\right) \geq \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + ... + \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} + ... + \frac{1}{2^k}\right) = 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2}}_{k \text{ darab}} = 1 + \frac{k}{2}. \end{aligned}$$

Világos, hogy bármely rögzített K esetén van olyan k, hogy $a_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2} \geq K$, ami állításunkat bizonyítja.

101.*

Vegyük észre, hogy

$$2a_{n+1}-1=\left(2a_n-1\right)^2.$$

Legyen $2a_n-1=b_n$, ekkor $b_{n+1}=b_n^2$, ahonnan teljes indukcióval adódik, hogy $b_n=b_0^{2^n}$. A feladatban szereplő rekurziós összefüggéssel ekvivalens a következő:

$$\left(2a_q-1\right)-\left(2a_p-1\right)=\left(2a_m-1\right)-\left(2a_k-1\right),$$

azaz

$$b_q-b_p=b_m-b_k.$$

Így a korábban látottak miatt

$$b_0^{2^q}-b_0^{2^p}=b_0^{2^m}-b_0^{2^k}.$$

Ha $b_0=\dfrac{r}{s}$, ahol $r,s\in\mathbb{Z},\ s\geq 1,\ (r,s)=1,$ akkor a következő adódik:

$$\left(\frac{r}{s}\right)^{2^q}-\left(\frac{r}{s}\right)^{2^p}=\left(\frac{r}{s}\right)^{2^m}-\left(\frac{r}{s}\right)^{2^k}.$$

Feltehetjük, hogy q a legnagyobb a négy index közül, ekkor

$$r^{2^q}=r^{2^p}s^{2^q-2^p}+r^{2^m}s^{2^q-2^m}-r^{2^k}s^{2^q-2^k}.$$

Mivel r és s relatív prímek, ezért ebből az egyenletből adódik, hogy $r=0$ vagy $s=1$. Ha $r=0$, akkor $b_0=0\Leftrightarrow a_0=\dfrac{1}{2}$. Tegyük fel, hogy $r\neq 0$, ekkor $s=1$. Az egyenlet:

$$r^{2^q}=r^{2^p}+r^{2^m}-r^{2^k}.$$

Mivel a q, p, m, k indexek különbözők, ezért csakis $|r|=1$ lehetséges, hiszen r lehető legmagasabb hatványával végigosztva az egyik oldal r-rel osztható marad, a másik viszont -1 maradékot ad majd r-rel osztva. Ha $r=1$, akkor $b_0=1\Leftrightarrow a_0=1$, ha pedig $r=-1$, akkor $b_0=-1\Leftrightarrow a_0=0$. Tehát $a_0\in\left\{0,\dfrac{1}{2},1\right\}$.

102.
Tegyük fel indirekt módon, hogy $\cos 10°$ racionális szám. Mivel ismert azonosság szerint $\cos 20° = 2\cos^2 10° - 1$, ezért ebből következik, hogy $\cos 20°$ is racionális szám. A **92.** feladat megoldása közben azonban igazoltuk, hogy $\cos 20°$ irracionális szám, ezért ellentmondásra jutottunk. Innen azonnal adódik a feladatban szereplő állítás.

Megjegyzés:
A **36.** feladat után szereplő megjegyzésben olvashatunk az ún. Csebisev-polinomokról. Ezek egész együtthatós polinomok, valamint, ha $T_n(x)$ az n-edik Csebisev-polinom, akkor $T_n(\cos\alpha) = \cos n\alpha$, ahol n természetes szám. Mivel $\cos 20°$ irracionális szám, ezért ebből adódik, hogy pl. $\cos 1°$ is irracionális szám. Próbáljuk meg igazolni a következő állításokat:

1. a $\sin 1°$ irracionális szám.

2. ha $1 \le n < 90$, egész szám, akkor $\cos n°$ pontosan akkor racionális, ha $n = 60$.

103.
Könnyű látni, hogy $\sin 1° > 0$, $\sin 10° > 0$, $\sin 100° > 0$, viszont $\sin 1000° < 0$. Vegyük észre, hogy

$$10^{n+1} - 10^n = 360 \cdot 25 \cdot 10^{n-3},$$

ezért

$$\sin\left(10^{n+1}\right)° = \sin\left(10^n\right)°,$$

feltéve, hogy $n \ge 3$, egész szám. Mivel $\sin 1000° < 0$, így a fenti három darabon kívül nincs több pozitív tagja a sorozatnak.

104.*
Felhasználva, hogy $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, a bizonyítandó:

$$\mathrm{tg}^2 20° + \mathrm{tg}^2 40° + \mathrm{tg}^2 60° + \mathrm{tg}^2 80° = 36 \Leftrightarrow \mathrm{tg}^2 20° + \mathrm{tg}^2 40° + \mathrm{tg}^2 80° = 33,$$

hiszen $\mathrm{tg} 60° = \sqrt{3}$. Mivel

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta},$$

ezért

$$\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha} \text{ és } \mathrm{tg}3\alpha = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}2\alpha}{1-\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}2\alpha} = \frac{3\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}^3\alpha}{1-3\mathrm{tg}^2\alpha}.$$

Vegyük észre, hogy $\mathrm{tg}^2 60° = \mathrm{tg}^2 120° = \mathrm{tg}^2 240° = 3$, így a

$$(*)\quad \frac{\mathrm{tg}^2\alpha\left(3-\mathrm{tg}^2\alpha\right)^2}{\left(1-3\mathrm{tg}^2\alpha\right)^2}=3$$

egyenlet $\alpha=20°,\ 40°,\ 80°$ esetén teljesülni fog. Legyen $\mathrm{tg}^2\alpha=x,$ ekkor a (*) összefüggés miatt:

$$x(3-x)^2=3(1-3x)^2 \Leftrightarrow x^3-33x^2+27x-3=0.$$

Mivel ennek a harmadfokú egyenletnek $\mathrm{tg}^2 20°,\ \mathrm{tg}^2 40°,\ \mathrm{tg}^2 80°$ megoldásai, így a Viéte-tétel miatt

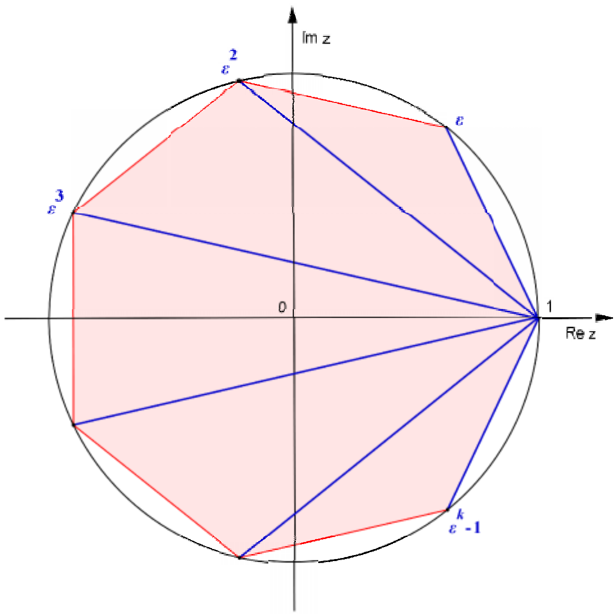
$$\mathrm{tg}^2 20°+\mathrm{tg}^2 40°+\mathrm{tg}^2 80°=33,$$

amelyet éppen bizonyítani szerettünk volna.

105.**

A következő segédállításra fogunk támaszkodni: egységsugarú körbe írt szabályos k-szög esetén valamely csúcsot a többi csúccsal összekötő szakaszok hosszának szorzata k.
Az állítás bizonyításához helyezzük el az egységkörbe írt szabályos sokszöget a komplex számsíkon úgy, hogy a kör középpontja a 0 legyen, a sokszög kiválasztott csúcsa pedig az 1. Ismert, hogy ekkor a sokszög csúcsai a z^k-1 polinom gyökei, az ún. k-adik egységgyökök lesznek, $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{k}+i\sin\frac{2\pi}{k}$ jelölés esetén: $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{k-1}$.
A többi csúcstól vett távolságok szorzata:

$$|1-\varepsilon|\cdot\left|1-\varepsilon^2\right|\cdot\ldots\cdot\left|1-\varepsilon^{k-1}\right|=$$
$$=\left|(1-\varepsilon)\left(1-\varepsilon^2\right)\ldots\left(1-\varepsilon^{k-1}\right)\right|.$$



A körosztási polinom gyöktényezős alakja:

$$z^k-1=(z-1)(z-\varepsilon)\ldots\left(z-\varepsilon^{k-1}\right),$$

de

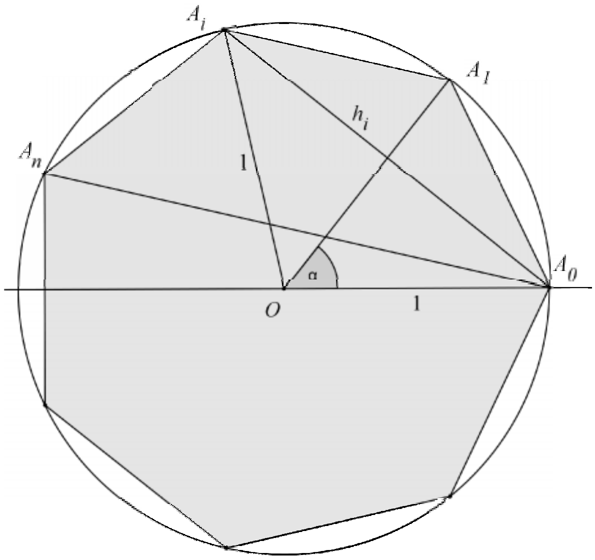
$$z^k-1=(z-1)\left(z^{k-1}+z^{k-2}+\ldots+1\right),$$

így

$$(z-\varepsilon)\ldots\left(z-\varepsilon^{k-1}\right)=z^{k-1}+z^{k-2}+\ldots+1.$$

A $z=1$ helyettesítés után, mindkét oldal abszolútértékét véve:

$$\left|(1-\varepsilon)\left(1-\varepsilon^2\right)\ldots\left(1-\varepsilon^{k-1}\right)\right|=k.$$



Tekintsük az egységsugarú körbe írt szabályos $(2n+1)$-szöget. Az ábra jelölései mellett $\alpha = \dfrac{2\pi}{2n+1}$, továbbá

$$h_i = A_0A_i = 2\sin\frac{i\alpha}{2} = 2\sin\frac{i\pi}{2n+1}.$$

Mivel a sokszög tengelyesen szimmetrikus az OA_0 egyenesre, ezért $h_i = h_{2n+1-i}$, így a segédállítás miatt

$$h_1h_2...h_n = \sqrt{2n+1},$$

$$2^n \sin\frac{\pi}{2n+1}\sin\frac{2\pi}{2n+1}...\sin\frac{n\pi}{2n+1} = \sqrt{2n+1},$$

ahonnan 2^n-nel való osztás után adódik a bizonyítandó állítás.

Megjegyzés:
Hasonló módon igazolható a következő azonosság:

$$\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}...\sin\frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

106.
A síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben tekintsük az alábbi helyvektorokat:

$$\overrightarrow{v_1}(a,b),\ \overrightarrow{v_2}(c,d),\ \overrightarrow{v_3}(e,f),\ \overrightarrow{v_4}(g,h).$$

Vegyük észre, hogy a feladatban szereplő kifejezések éppen az ezekből képezhető skaláris szorzatoknak a vektorok koordinátáival kifejezett alakja. A skaláris szorzat definíciója miatt világos, hogy két vektor skaláris szorzata pontosan akkor nem negatív, amikor α hajlásszögükre: $0° \le \alpha \le 90°$. Mivel a $\overrightarrow{v_i}$ vektorok helyvektorok (azaz közös kezdőpontjuk az origó), így a skatulya-elv miatt van közöttük kettő, amelyek hajlásszöge legfeljebb derékszög. Ebből a fentebb mondottak miatt adódik a feladat állítása

107.*
Az addíciós tételekből könnyen adódik, hogy

$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta),$$

ezért

$$2\sin(2k-1)x\sin x = \cos(2k-2)x - \cos 2kx.$$

Ha S jelöli a feladatban szereplő összeget, akkor

$$2\sin x\cdot S=1-\cos 2x+\frac{\cos 2x-\cos 4x}{3}+\ldots+\frac{\cos(2n-2)x-\cos 2nx}{2n-1}=$$
$$=1-\left(1-\frac{1}{3}\right)\cos 2x-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\cos 4x-\ldots-\frac{1}{2n-1}\cos 2nx\geq$$
$$\geq 1-\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right]=0.$$

Mivel $\sin x>0$, továbbá $0<x<\pi$, így egyenlőség nem teljesülhet, amivel megkaptuk a feladat állítását.

108.*

Tudjuk, hogy

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$

ezért

$$\sin 3\varphi=\sin\varphi\cos 2\varphi+\cos\varphi\sin 2\varphi=\sin\varphi\left(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi+2\cos^2\varphi\right)=$$
$$=4\sin\varphi\left(\frac{3}{4}\cos^2\varphi-\frac{1}{4}\sin^2\varphi\right)=4\sin\varphi\sin(60°-\varphi)\sin(60°+\varphi).$$

Innen

$$\sin\varphi\sin(60°-\varphi)\sin(60°+\varphi)=\frac{\sin 3\varphi}{4}.$$

Legyen

$$P=\sin 1°\cdot\sin 2°\cdot\ldots\cdot\sin 89°\cdot\sin 90°,$$

ekkor, felhasználva, hogy $\cos\varphi=\sin(90°-\varphi)$:

$$P=\sin 30°\cdot\sin 60°\cdot\prod_{n=1}^{29}\sin n°\sin(60°-n°)\sin(60°+n°)=$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4^{30}}\sin 3°\cdot\sin 6°\cdot\ldots\cdot\sin 87°=$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4^{30}}\sin 30°\cdot\sin 60°\cdot\prod_{m=1}^{9}\sin(3m)°\sin(60°-3m°)\sin(60°+3m°)=$$
$$=\frac{3}{4^{40}}\sin 9°\cdot\sin 18°\cdot\ldots\cdot\sin 81°=$$
$$=\frac{3}{4^{40}}\sin 9°\cos 9°\sin 18°\cos 18°\sin 27°\cos 27°\sin 36°\cos 36°\sin 45°=$$
$$=\frac{3\sqrt{2}}{2^{85}}\sin 18°\cdot\cos 18°\cdot\sin 36°\cdot\cos 36°=\frac{3\sqrt{2}}{2^{87}}\sin 36°\cdot\sin 72°.$$

Ismert, hogy $\sin 36° = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ és $\sin 72° = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$, ezért végül kapjuk, hogy

$$P = \frac{3\sqrt{2}}{2^{87}} \cdot \frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}}{16} = \frac{3}{2^{89}}\sqrt{10}.$$

Világos, hogy $q = \frac{3}{2^{89}}$ megfelelő racionális szám.

VEGYES FELADATOK

109.

Tudjuk, hogy $0 \le \{a\} < 1$, ezért az egyenletben szereplő x csak akkor lehet megoldás, ha $0 \le x < 1$. Az egyenlet:

$$\{x^3 + 3x^2 + 3x + 1\} = x^3,$$

$$\{x^3 + 3x^2 + 3x\} = x^3.$$

Ha $\{a+b\} = a$, akkor

$$a + b - [a+b] = a,$$

$$b = [a+b].$$

Ez azt jelenti, hogy x pontosan akkor megoldása az egyenletnek, ha $0 \le x < 1$ továbbá

$$3x^2 + 3x = n,$$

ahol n egész és $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$

$$3x^2 + 3x - n = 0$$

pozitív megoldásai:

$$x = \frac{-3 + \sqrt{9+12n}}{6},$$

ahol $n = 0,1,2,3,4,5.$

110.

Világos, hogy $x = 0$ megoldás. Mivel $[x] \le x$ és $0 \le \{x\} < 1$, így $x > 0$ esetén a bal oldal x-nél kisebb, ezért nincs megoldása az egyenletnek. Tegyük fel, hogy $x < 0$ és írjuk fel x-et

$$x = -a + \{x\}$$

alakban, ahol a pozitív egész szám. Ekkor az egyenlet:

$$-a\{x\} = 2007\left(-a + \{x\}\right),$$

ahonnan

$$\{x\}(a+2007)=2007a \Leftrightarrow \{x\}=\frac{2007a}{a+2007}.$$

Mivel

$$\frac{2007a}{a+2007}<1 \Leftrightarrow a<\frac{2007}{2006},$$

így $a=1$, ezért $\{x\}=\frac{2007}{2008}$ és $x=-\frac{1}{2008}$, ami meg is felel. Két valós megoldás van:

$$x=0,\ x=-\frac{1}{2008}.$$

111.

Tekintsük azt a $p(x)=x^3+px+q$ polinomot, melynek *a*, *b* és *c* gyökei. Ekkor a Viéte-formulákat alkalmazva:

$$\begin{cases} a+b+c=0, \\ ab+bc+ca=p, \\ abc=-q. \end{cases}$$

Könnyű látni, hogy

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=-2p.$$

Ha *x* gyöke a polinomnak, akkor

$$x^3=-px-q,$$

ezért

$$a^3+b^3+c^3=-p(a+b+c)-3q=-3q,$$

továbbá

$$a^5+b^5+c^5=-p\left(a^3+b^3+c^3\right)-q\left(a^2+b^2+c^2\right)=3pq+2pq=5pq,$$

ahonnan a bizonyítandó állítás már könnyen kiolvasható.