ALGEBRA

MÁSODFOKÚ POLINOMOK

1.
Határozzuk meg az

$$x^2 + px + q = 0$$

egyenlet megoldásait, ha tudjuk, hogy egész számok, továbbá $p + q = 198$.

2.
Határozzuk meg az összes olyan pozitív egész *p* és *q* számot, amelyre az

$$x^2 - pqx + p + q = 0$$

egyenlet megoldásai egész számok lesznek.

3.
A *p* és *q* olyan egész számok, hogy minden *x* egész számra $x^2 + px + q > 0$.
Mutassuk meg, hogy akkor minden valós *x*-re is teljesül az egyenlőtlenség.

4.
Az egész együtthatós $x^2 + ax + b$ és $x^2 + cx + d$ másodfokú polinomoknak van olyan közös gyöke a valós számok körében, amely nem egész szám. Igazoljuk, hogy $a = c$ és $b = d$.

5.
Az $x^2 - 3x + q = 0$ egyenlet valós megoldásai α és β. Tudjuk, hogy $\alpha^5 + \beta^5 = 1593$. Határozzuk meg *q* értékét.

6.*
Határozzuk meg a legkisebb olyan pozitív egész *a* számot, amelyre igaz, hogy az egész együtthatós $f(x) = ax^2 + bx + c$ másodfokú polinomnak létezik két különböző valós gyöke a $]0;1[$ intervallumban.

7.
Az $f(x) = ax^2 + bx + c$ másodfokú polinom olyan, hogy az $f(x) = x$ egyenletnek nincsen valós megoldása. Lehet-e valós megoldása az

$$f(f(f(x))) = x$$

egyenletnek?

8.*
Az *a*, *b*, *c* adott valós számok olyanok, hogy $|x| \le 1$ esetén $|ax^2 + bx + c| \le 1$. Igazoljuk, hogy akkor $|x| \le 1$ esetén

$$|cx^2 + bx + a| \le 2.$$

9.*
Határozzuk meg az összes olyan a és b valós számot, melyekre teljesül, hogy minden $0 \le x \le 1$ esetén

$$\left|x^2 - ax - b\right| \le \frac{1}{8}.$$

10.
Adott az $f(x) = x^2 + ax + b$ másodfokú polinom, amelyről tudjuk, hogy az $f\left(f(x)\right) = 0$ egyenletnek négy különböző valós megoldása van, melyek közül kettő összege -1. Mutassuk meg, hogy $b \le -\frac{1}{4}$.

Harmadfokú polinomok

11.
Döntsük el, hogy racionális szám-e:

a) $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$,

b) $\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}$.

12.
a) Igazoljuk, hogy az

$$x^3 - x - 1 = 0$$

egyenletnek van 1-nél nagyobb valós megoldása.
b) Ezt a valós megoldást α-val jelölve adjuk meg a

$$\sqrt[3]{3\alpha^2 - 4\alpha} + \sqrt[3]{3\alpha^2 + 4\alpha + 2}$$

kifejezés számértékét.

13.*
Oldjuk meg a valós számok körében:

a) $x^3 + x^2 + x = -\frac{1}{3}$, b) $x^3 + 3x - 2 = 0$.

14.
A páronként különböző x, y, z számokra teljesül, hogy

$$x^3 - 3x = y^3 - 3y = z^3 - 3z.$$

Határozzuk meg $x^2 + y^2 + z^2$ értékét!

15.*
Az x és y olyan valós számok, hogy

$$x^3 - 3x^2 + 5x = 1,$$
$$y^3 - 3y^2 + 5y = 5.$$

Határozzuk meg $x + y$ értékét!

16.*
Tudjuk, hogy a, b és c az $x^3 - 3x + 1$ polinom valós gyökei úgy, hogy $a < b < c$. Igazoljuk, hogy akkor

$$b^2 - a = c^2 - b = a^2 - c = 2.$$

17.
Az $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ polinom együtthatói egész számok, három valós gyöke van, továbbá ad páratlan és bc páros. Igazoljuk, hogy a gyökök között van irracionális szám.

18.**
a) Jelölje α a $p(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ polinom legnagyobb valós gyökét.
Igazoljuk, hogy α^{2000} tizedes tört alakjában a tizedesvessző után több, mint 300 darab 9-es számjegy szerepel.
b) Jelölje α a $p(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 1$ polinom legnagyobb valós gyökét.
Igazoljuk, hogy létezik olyan n pozitív egész szám, amelyre α^n-nek egy pozitív egész számtól vett eltérése kisebb, mint 10^{-2008} .

NEGYEDFOKÚ POLINOMOK

19.
Oldjuk meg a valós számok körében:

a) $x^4 - 4x - 1 = 0$, b) $x^4 + 8x - 7 = 0$.

20.
Oldjuk meg a valós számok körében:

a) $x^4 - 10x^2 - 8x + 5 = 0$, b) $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x - 6 = 0$.

21.
Van-e valós gyöke a $p(x) = x^4 - x + \frac{1}{2}$ polinomnak?

22.

Tudjuk, hogy az x^2+ax+b polinomnak, ahol *a* és *b* adott valós számok, két különböző valós gyöke van. Mutassuk meg, hogy akkor az $x^4+ax^3+(b-2)x^2-ax+1$ polinomnak 4 különböző valós gyöke van.

23.*

Igazoljuk, hogyha az

$$ax^2+(c-b)x+(c-d)=0$$

egyenletnek van 1-nél nagyobb valós megoldása, akkor az

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$$

egyenletnek is van legalább egy valós megoldása, ha *a*, *b*, *c*, *d* és *e* valós számokat jelölnek.

POLINOMOK

24.

Határozzuk meg az x^{18} illetve x^{17} tagok együtthatóit az $(1+x^5+x^7)^{20}$ kifejezés polinom alakjában.

25.

Tudjuk, hogy *x*-nek az x^k-a^k polinomja osztója az x^n-a^n polinomnak, ahol *a* adott valós szám, továbbá *k* és *n* pozitív egész számok. Igazoljuk, hogy *k* az *n* osztója.

26.

Határozzuk meg azokat az *a* és *b* egész számokat, amelyekre az $ax^{17}+bx^{16}+1$ polinom osztható az x^2-x-1 polinommal.

27.

Határozzuk meg az összes olyan *k* értéket, amelyre $x+y+z$ osztója lesz az $x^3+y^3+z^3+kxyz$ polinomnak.

28.

Létezik-e olyan polinom, amely minden egész helyen egész értéket vesz fel és főegyütthatója $\frac{1}{13}$?

29.

Van-e olyan $p(x)$ egész együtthatós polinom, amelyre $p(1)=4,\ p(2)=7,$ valamint $p(x)$ -nek van egész gyöke?

30.

A $p(x)$ egész együtthatós polinom olyan, hogy létezik négy, páronként különböző egész szám: *a*, *b*, *c* és *d* úgy, hogy $p(a)=p(b)=p(c)=p(d)=5.$ Lehetséges-e, hogy valamely *x* egész szám esetén $p(x)=8$?

31.
Az a, b, c páronként különböző pozitív egész számok, a $P(x)$ egész együtthatós polinom. Lehetséges-e, hogy egyszerre teljesüljön

$$P(a)=b,\ P(b)=c,\ P(c)=a\ ?$$

32.
Az egész együtthatós

$$p(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$$

polinomról tudjuk, hogy minden x egész számra $p(x)$ osztható 7-tel. Igazoljuk, hogy akkor a, b, c, d és e is osztható 7-tel.

33.
Létezik-e olyan egész együtthatós, legalább elsőfokú $p(x)$ polinom, hogy bármely k pozitív egészre a $p(1),\ p(2),\ \ldots,\ p(k)$ számok mindegyike prímszám?

34.*
Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges, legalább másodfokú, egész együtthatós $p(x)$ polinomhoz található olyan egész számokból álló, nem állandó számtani sorozat, melynek nincsen $p(k)$ alakú tagja, ahol k egész szám.

35.
Írjunk fel olyan egész együtthatós polinomot, amelynek egyik gyöke

a) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, b) $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$.

36.**
Igazoljuk, hogy található olyan egész együtthatós polinom, amely

a) negyedfokú és gyöke a $\sqrt[4]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[4]{2-\sqrt{3}}$,

b) ötödfokú és gyöke az $\sqrt[5]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[5]{2-\sqrt{3}}$,

c) n-ed fokú és gyöke az $\sqrt[n]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[n]{2-\sqrt{3}}$, ahol $n \geq 2$, egész.

37.*
A $p(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$ n-ed fokú polinom együtthatói nem negatív valós számok, továbbá $p(4)=2$, $p(16)=8$ és $p(8)=4$. Határozzuk meg a polinomot!

38.*
Az a és b számok gyökei az x^4+x^3-1 polinomnak. Igazoljuk, hogy akkor ab gyöke lesz az $x^6+x^4+x^3-x^2-1$ polinomnak.

39.
Legyen $S_k = x^k + y^k + z^k$, ahol k természetes számot jelöl, valamint $p = x + y + z$, $q = xy + yz + zx$ és $r = xyz.$ Igazoljuk, hogy akkor minden $k \geq 3$ egész számra:

$$S_k = pS_{k-1} - qS_{k-2} + rS_{k-3}.$$

(*Newton képlete*)

40.**
Legyen $p(x) = x^6 - x^5 - x^3 - x^2 - x.$ Jelölje $a,\ b,\ c,\ d$ az $x^4 - x^3 - x^2 - 1$ polinom gyökeit. Határozzuk meg $p(a) + p(b) + p(c) + p(d)$ értékét!

41.
Jelöljön az $f(x)$ n-ed fokú egész együtthatós polinomot, ahol $n \geq 2.$ Tudjuk, hogy a polinomnak n darab valós gyöke van a $]0;1[$ intervallumban úgy, hogy nem minden gyök azonos. Jelölje a a polinom főegyütthatóját. Igazoljuk, hogy $|a| \geq 2^n + 1.$

42.**
Tekintsük az $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + 1$ polinomot, ahol az együtthatók nem negatív számok, továbbá tudjuk, hogy a polinomnak n darab valós gyöke van. Igazoljuk a következőket:

a) $f(2) \geq 3^n$;

b) $f(x) \geq (x+1)^n$, ha $x \geq 0$;

c) $a_k \geq \binom{n}{k}$, ha $k = 1,\ 2,\ ...,\ n-1.$

43.
Jelölje $x_1,\ x_2, ...,\ x_n$ az $x^n + x^{n-1} + ... + x + 1$ polinom komplex gyökeit. Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{1-x_1} + \frac{1}{1-x_2} + ... + \frac{1}{1-x_n} = \frac{n}{2}.$$

44.
Legyen $P(x)$ olyan n-ed fokú polinom, amelyre teljesül, hogy $P(k) = \frac{k}{k+1}$ ahol $k = 0,\ 1,\ ...,\ n.$ Határozzuk meg $P(n+1)$ értékét, ha a) $n = 2009,$ b) $n = 2010.$

45.*
Léteznek-e olyan, 0-tól különböző $a,\ b,\ c$ valós számok, hogy bármely $n > 3$ egész szám esetén létezik olyan $p_n(x)$ polinom, amelyre $p_n(x) = x^n + ... + ax^2 + bx + c,$ továbbá a polinomnak n darab (nem feltétlenül különböző) egész gyöke van?

46.*
Határozzuk meg az összes olyan n pozitív egész számot, melyre igaz, hogy van olyan

$$x^n \pm x^{n-1} \pm x^{n-2} \pm \ldots \pm x \pm 1$$

alakú polinom, melynek minden gyöke valós szám.

47.*
A $P_n(x)$ polinomsorozat a következő módon van adva:

$$P_0(x)=0, P_1(x)=1 \text{ és } P_n(x)=x\cdot P_{n-1}(x)+(1-x)\cdot P_{n-2}(x).$$

Határozzuk meg a sorozat n-edik tagjának valós gyökeit $n \geq 2$ esetén.

48.
Létezik-e olyan pozitív egész n, hogy $\sin(2nx)$ felírható a $\sin x$ polinomjaként?

49.**
A $P(x)$ valós együtthatós, legalább elsőfokú polinom olyan, hogy helyettesítési értéke bármely x valós szám esetén nem negatív. Igazoljuk, hogy létezik olyan $Q(x)$ és $R(x)$ valós együtthatós polinom, hogy

$$P(x)=Q^2(x)+R^2(x)$$

minden valós x esetén.

50.*
Létezik-e olyan valós együtthatós $P(x,y)$ kétváltozós polinom, hogy

a) $P(x,y)>0$ bármely valós x és y számokra?

b) bármely $c>0$ esetén van olyan valós x és y, hogy $P(x,y)=c$?

Egyenletek, egyenletrendszerek

51.
Oldjuk meg a valós számok halmazán:

$$\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x-x^2+1}=x^2-x+2.$$

52.
Oldjuk meg a valós számok körében:

$$(3x+1)(4x+1)(6x+1)(12x+1)=2.$$

53.
Oldjuk meg a valós számok halmazán:

a) $2x^3=(3x^2-x-1)\sqrt{1+x}$, b) $16x^3=(11x^2+x-1)\sqrt{x^2-x+1}$.

54.*
Oldjuk meg az alábbi egyenletet a pozitív számok halmazán:

$$\sqrt[3]{x^3-\frac{14}{x}}+\sqrt[3]{\frac{14}{x}+3x-3x^2}=x.$$

55.
Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$(2x+1)^2+y^2+(y-2x)^2=\frac{1}{3}.$$

56.*
Oldjuk meg a pozitív számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$(x+y+z)^2=x^3+y^3+z^3+12.$$

57.
Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1}=xy.$$

58.*
Oldjuk meg a valós számok körében, ahol *a* valós paramétert jelöl:

$$\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x.$$

59.
Oldjuk meg a következő egyenletet a pozitív valós számok körében:

$$x^2-x-1=2^x-\log_2\left(x^2+2^x\right)$$

60.
Oldjuk meg a pozitív valós számok körében:

$$\left(8^x-5^x\right)\left(7^x-2^x\right)\left(6^x-4^x\right)+\left(9^x-4^x\right)\left(8^x-3^x\right)\left(5^x-2^x\right)=105^x.$$

61.*
Oldjuk meg a valós számok körében:

$$(4x^3-8)(3^{\sin x}-1)+\left(2^{x^3}-4\right)\sin x=0.$$

62.
Oldjuk meg a valós számok halmazán:

$$27^{x}-7\sqrt[3]{7\cdot 3^{x}+6}=6\,.$$

63.
Oldjuk meg a valós számok körében:

$$x^{3}=3x+\sqrt{x+2}.$$

64.*
Oldjuk meg a pozitív valós számok körében:

$$\sqrt[5]{\sqrt{x}+3}+\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=\sqrt[5]{\sqrt{x}-3}+\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}.$$

65.
Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a valós számok körében:

$$\begin{cases}(c+d+e)^{5}=3a,\\(d+e+a)^{5}=3b,\\(e+a+b)^{5}=3c,\\(a+b+c)^{5}=3d,\\(b+c+d)^{5}=3e.\end{cases}$$

66.*
Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán:

$$5x\left(1+\frac{1}{x^{2}+y^{2}}\right)=12,$$
$$5y\left(1-\frac{1}{x^{2}+y^{2}}\right)=4.$$

67.*
Az *a* és *b* valós számokra

$$\begin{cases}a^{3}-3ab^{2}=8,\\b^{3}-3a^{2}b=11.\end{cases}$$

Határozzuk meg $a^{2}+b^{2}$ értékét!

68.*
Adjuk meg azokat az a, b, c számokat, amelyekre az $x^{3}+ax^{2}+bx+c=0$ egyenlet megoldásai rendre egyenlők az $x^{3}-3x+1=0$ egyenlet három megoldásának az ötödik hatványával.

69.*

Legyenek az $x^3-2x^2-x+1=0$ egyenlet valós megoldásai *a*, *b* és *c*.
Mennyi $a^2b+b^2c+c^2a$ értéke?

70.*

Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán:

$$\begin{cases} x+y+z=0, \\ x^3+y^3+z^3=18, \\ x^7+y^7+z^7=2058. \end{cases}$$

71.*

Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán:

$$\begin{cases} a+b=8, \\ ab+c+d=23, \\ ad+bc=28, \\ cd=12. \end{cases}$$

FÜGGVÉNYEGYENLETEK

72.

Határozzuk meg az összes olyan $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényt, melyekre teljesül, hogy minden *x*-re

$$2f(x+2)+f(4-x)=2x+7.$$

73.

Határozzuk meg az összes olyan $f:\mathbb{R}\setminus\{0;1\}\to\mathbb{R}$ függvényt, amelyekre teljesül, hogy minden, az értelmezési tartományban lévő *x* számra

$$f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=x.$$

74.

Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény olyan, hogy minden *x*-re

$$x+f(x)=f\big(f(x)\big).$$

Oldjuk meg az $f\big(f(x)\big)=0$ egyenletet!

75.

Létezik-e olyan $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ és $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény, hogy minden *x*-re

$$f\big(g(x)\big)=x^2 \text{ és } g\big(f(x)\big)=x^3 \ ?$$

76.*
Az $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ függvény olyan, hogy bármely x, y racionális számok esetén

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+80xy.$$

Adjuk meg az összes ilyen *f* függvényt!

77.*
Igazoljuk, hogy nincs olyan $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ függvény, amelyre teljesül, hogy bármely *x*, *y* pozitív számokra

$$(x+y)f\big(f(x)y\big)=x^2 f\big(f(x)+f(y)\big).$$

78.
Határozzuk meg az összes olyan $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ függvényt, amelyre teljesül, hogy bármely $x, y\in\mathbb{Q}$ esetén

$$f\big(x+f(y)\big)=y+f(x).$$

79.
Határozzuk meg azokat az α értékeket, melyekre létezik olyan $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, konstanstól különböző függvény, hogy

$$f\big(\alpha(x+y)\big)=f(x)+f(y).$$

80.*
Létezik-e olyan $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ korlátos függvény, hogy $f(1)>0$, és bármely valós *x*, *y* számok esetén

$$f^2(x+y)\ge f^2(x)+2f(xy)+f^2(y)\ ?$$

81.
Létezik-e olyan $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ függvény, hogy minden *n* egész számra

$$f\big(f(n)\big)=n+1\ ?$$

82.**
Létezik-e olyan, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény, hogy minden *x* valós számra

$$f\big(f(x)\big)=x^2-2\ ?$$

83.**
Határozzuk meg az összes olyan $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ függvényt, amelyre teljesül, hogy minden $x>0$ számra

$$f\big(f(x)\big)+2f(x)=15x.$$

84.*
Határozzuk meg az összes olyan $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényt, amelyre

$$f\left(xy+f\left(x\right)\right)=xf\left(y\right)+f\left(x\right)$$

bármely x, y valós számok esetén.

85.
Határozzuk meg az összes olyan $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényt, amelyre teljesül, hogy

$$f\left(xy\right)=f\left(x+y\right)$$

bármely x és y irracionális számok esetén.

86.*
Határozzuk meg az összes olyan $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényt, amelyre teljesül, hogy bármely valós x esetén

$$f\left(x^2\right)=f^2\left(x\right) \text{ és } f\left(x+1\right)=f\left(x\right)+1.$$

EUKLIDESZI SZERKESZTHETŐSÉG

87.
Adott az egységnyi hosszú szakasz a végpontjaival. Igazoljuk, hogy azok a szakaszok, amelyek hossza a $H=\left\{a+b\sqrt{c}:a,\ b,\ c\in\mathbb{Q},\ c>0,\ \sqrt{c}\notin\mathbb{Q}\right\}$ halmaz eleme, mind szerkeszthetők euklideszi módon. (A H elemeit kvadratikus irracionálisoknak hívják.)

88.
Igazoljuk, hogy a H halmazbeli együtthatókkal felírt másodfokú polinomok gyökei szerkeszthetők az egységszakasz birtokában euklideszi módon.

89.
Igazoljuk, hogy egy pont pontosan akkor szerkeszthető euklideszi módon, ha koordinátái megkaphatók a racionális számokból az alapműveletek és a négyzetgyökvonás véges sokszori alkalmazásával.

90.**
a) Igazoljuk, hogyha az f racionális együtthatós harmadfokú polinomnak az $a+b\sqrt{c}$ $\left(a,\ b,\ c\in\mathbb{Q},\ \sqrt{c}\notin\mathbb{Q}\right)$ szám gyöke, akkor az $a-b\sqrt{c}$ szám is gyöke, valamint a harmadik gyöke racionális szám.
b) Igazoljuk, hogyha az f racionális együtthatós harmadfokú polinomnak nincs racionális gyöke, akkor nincs $a+b\sqrt{c}$ $\left(a,\ b,\ c\in\mathbb{Q},\ \sqrt{c}\notin\mathbb{Q}\right)$ alakú gyöke sem.
c) Igazoljuk, hogyha egy racionális együtthatós harmadfokú polinomnak nincs racionális gyöke, akkor egyik gyöke sem szerkeszthető euklideszi módon.

91.
Igazoljuk, hogy a déloszi probléma (kockakettőzés) nem oldható meg euklideszi módon. (Tehát, ha adott egy egységnyi élű kocka, akkor nem tudjuk egy kétszer akkora térfogatú kocka élhosszúságát megszerkeszteni.)

92.
a) Igazoljuk, hogy a 20°-os szög nem szerkeszthető euklideszi módon.
(Így nincs olyan euklideszi szerkesztés, amely bármely adott szöget harmadol.)
b) Igazoljuk, hogy szabályos kilencszög nem szerkeszthető euklideszi módon.

93.
Felhasználva, hogy a 20°-os szöget nem lehet megszerkeszteni, adjunk választ arra a kérdésre, hogy milyen n pozitív egészekre szerkeszthető $n°$ -os szög?

94.**
Igazoljuk, hogy szabályos hétszög nem szerkeszthető euklideszi módon.

95.*
Tekintsük azt az egyenlő szárú háromszöget, melynek alaphoz tartozó szögfelezője egységnyi, a szárakhoz tartozó szögfelezők hossza pedig 4 egység. Bizonyítsuk be, hogy ez a háromszög nem szerkeszthető meg euklideszi módon. (Így általában nem szerkeszthető meg euklideszi módon a háromszög a három belső szögfelező szakasz birtokában.)

REKURZÍV SOROZATOK

96.
Legyen az (a_n) sorozat a következő:

$$a_1 = 1799,\ a_2 = 1828 \text{ és } a_{n+2} = \frac{a_{n+1}+1}{a_n},$$

ahol n pozitív egész. Mivel egyenlő a_{2011} ?

97.**
Tekintsük az

$$a_0 = 1,\ a_1 = \frac{1}{3},\ a_{n+1} = \frac{2a_n}{3} - a_{n-1}$$

rekurzióval meghatározott (a_n) sorozatot, ahol n pozitív egész. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan n amelyre

$$a_n > 0{,}99999\,.$$

98.
Az (a_n) sorozat olyan, hogy $a_0 = 3$, továbbá $(3 - a_{n+1})(6 + a_n) = 18$, ahol $n = 0, 1, 2, \ldots$.
Határozzuk meg $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{a_i}$ zárt alakját!

99.
Az $\left(a_n\right)$ sorozat olyan, hogy $a_0 = 1$, továbbá

$$a_{n+1} = \frac{7a_n + \sqrt{45a_n^2 - 36}}{2},$$

ahol $n = 0,1,2,\ldots$. Igazoljuk, hogy

a) a_n pozitív egész minden n-re,
b) $a_n a_{n+1} - 1$ teljes négyzet minden n-re.

100.*
Legyen $a_1 = 1$ és $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{s_n}$, ahol $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Korlátos-e az a_n sorozat?

101.*
Az $\left(a_n\right)$ sorozat tagjaira: $a_{n+1} = 2a_n^2 - 2a_n + 1$, ahol $n = 0,1,2,\ldots$. Határozzuk meg az összes olyan a_0 racionális számot, amelyhez létezik négy, páronként különböző k, m, p és q index úgy, hogy

$$a_q - a_p = a_m - a_k.$$

TRIGONOMETRIA

102.
Igazoljuk, hogy $\cos 10°$ irracionális szám.

103.
Hány pozitív szám van az alábbi sorozatban:

$$\sin 1°,\ \sin 10°,\ \sin 100°,\ \sin 1000°, \ldots\ ?$$

104.**
Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{\cos^2 20°} + \frac{1}{\cos^2 40°} + \frac{1}{\cos^2 60°} + \frac{1}{\cos^2 80°} = 40.$$

105.**
Igazoljuk, hogyha n pozitív egész, akkor

$$\sin\frac{\pi}{2n+1} \cdot \sin\frac{2\pi}{2n+1} \cdot \ldots \cdot \sin\frac{n\pi}{2n+1} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}.$$

106.
Adott 8 valós szám: $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ h.$ Tekintsük a belőlük képzett

$$ac+bd,\ ae+bf,\ ag+bh,\ ce+df,\ cg+dh,\ eg+fh$$

számokat. Igazoljuk, hogy a számok között biztosan van olyan, amely nem negatív.

107.*
Az x valós számra teljesül, hogy $0<x<\pi.$ Igazoljuk, hogy tetszőleges n pozitív egészre a

$$\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\ldots+\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$

összeg értéke pozitív.

108.*
Igazoljuk, hogy létezik olyan q racionális szám, hogy

$$\sin 1°\cdot\sin 2°\cdot\ldots\cdot\sin 89°\cdot\sin 90°=q\sqrt{10}.$$

VEGYES FELADATOK

109.
Oldjuk meg a valós számok körében, ha $\{a\}$ az a valós szám tört részét jelöli:

$$\left\{(x+1)^3\right\}=x^3.$$

110.
Oldjuk meg a valós számok körében az

$$[x]\cdot\{x\}=2007x$$

egyenletet.

111.
Tudjuk, hogy $a+b+c=0.$ Igazoljuk, hogy

$$2\left(a^5+b^5+c^5\right)=5abc\left(a^2+b^2+c^2\right).$$