A skatulya-elv alkalmazásai

MEGOLDÁSOK

Számelmélet

1.
Tekintsük a $2n$, $2n+1$, … , $4n$ számokat. Ezek száma $2n+1$, ezért lesz közöttük három, amely azonos halmazba kerül. E három szám közül a legnagyobb biztos kisebb a másik kettő összegénél.

2.
Legyenek a kiválasztott számok $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n+1}$. Tekintsük a következő két halmazt:

$$A = \{a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}\} \text{ és } B = \{a_{n+1} - a_1, a_n - a_1, \ldots, a_2 - a_1\}.$$

Mindkét halmaznak n számú eleme van és az elemeik $2n$-nél kisebb pozitív egészek, ezért a két halmaznak van közös eleme! Erre a közös elemre:

$$a_k - a_1 = a_l \Leftrightarrow a_k = a_l + a_1,$$

ahonnan az állítás adódik.

3.
Legyenek a számok $1 \leqslant a_1 < a_2 < \ldots < a_{20} \leqslant 70$. Tegyük fel indirekt módon, hogy legfeljebb három azonos érték van a páronként vett különbségek között, tehát legfeljebb három darab 1-es, 2-es, s.í.t. Ekkor

$$a_{20} = (a_{20} - a_{19}) + (a_{19} - a_{18}) + \ldots + (a_2 - a_1) + a_1 \geqslant 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + \ldots + 3 \cdot 6 + 7 + 1 = 71.$$

Ez ellentmond annak, hogy egyik szám sem lehet nagyobb 70-nél. Indirekt feltevésünk megdőlt, így a bizonyítandó állítás adódik.

4.
a) Legyenek a számok $a_1, a_2, \ldots, a_{16}$. Tekintsük az

$$a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \ldots, a_1 + a_2 + \ldots + a_{16}$$

összegeket! Ezek száma éppen 16. Ha valamelyik osztható 16-tal, akkor készen vagyunk. Ellenkező esetben a skatulya-elv miatt lesz kettő, melynek a 16-os maradéka megegyezik. A több tagból állóból kivonva a kevesebb tagból állót, a kapott összeg 16-tal osztható lesz.

b) Legyen $n = \overline{a_1 a_2 \ldots a_{16}}$ a kiválasztott szám. Ha az a_i számjegyek valamelyike 0, 1, 4 vagy 9, akkor készen vagyunk. Feltehetjük, hogy $a_i \in \{2,3,5,6,7,8\}$. Ekkor bármelyik szorzat, amely egymást követő számjegyekből képezhető

$$2^a 3^b 5^c 7^d$$

alakú lesz, ahol a, b, c, d természetes számok. Elegendő belátnunk, hogy van olyan szorzat, amelyben minden kitevő páros. Tekintsük az

$$a_1, a_1 a_2, a_1 a_2 a_3, \ldots, a_1 a_2 \ldots a_{16}$$

szorzatokat! Paritás alapján az (a, b, c, d) kitevő 4-esek 16 különböző osztályba sorolhatók:

(*ptl*, *ptl*, *ptl*, *ptl*), … , (*ps*, *ps*, *ps*, *ps*).

Ha az utolsó osztályba kerül kitevő 4-es, akkor készen vagyunk. Ellenkező esetben lesz két olyan kitevő 4-es, amelyik azonos osztályban van. Tegyük fel, hogy ezek az $a_1 \ldots a_k$ és $a_1 \ldots a_l$ szorzatokhoz tartoznak, ahol $k >$

l.Ekkor

$$\frac{a_1 \dots a_k}{a_1 \dots a_l} = a_{l+1} \dots a_k$$

olyan szorzat, melyhez tartozó(a, b, c, d)kitevő 4-es minden kitevője páros. Ezt akartuk belátni.

5.
Írjuk fel a számokat $2^k(2m+1)$ alakban, ahol k és m természetes számok. Mivel m lehetséges értékei: $0,1,2,\dots,n-1$ (n darab), ezért a kiválasztott számok között lesz két olyan, amelynek a fenti alakjában szereplő *m* értékek megegyeznek. A nagyobbik számot elosztva a kisebbikkel 2-hatvány adódik.

6.
Tekintsük a$2^1, 2^3, \dots, 2^{2n-1}$számokat. Akárhányat adunk is össze közülük, az összeg mindig$2^{2k-1}(2m+1)$alakú lesz, ahol$2k-1$az összeadott számokban lévő legkisebb kitevő.

7.
Jelölje$p(n)$az *n* pozitív egész szám legnagyobb páratlan osztóját. Ekkor$n = 2^k p(n)$, ahol a k természetes számot jelöl. Ha$n_1$és$n_2$olyanok, hogy$p(n_1) = p(n_2)$, akkor közülük az egyik legalább 2-szer akkora, mint a másik. Ez viszont azt jelenti, hogy

$$p(2007), p(2008), \dots, p(4012)$$

páronként különböző páratlan számok! Mivel összesen 2006 darab számról van szó, így ezek pontosan a $\{1,3,\dots,4011\}$halmaz elemei. Így a keresett összeg:

$$1 + 3 + \dots + 4011 = 2006^2.$$

8.
Írjuk fel a pozitív egész számokat$a^2 b$alakban, ahol *a* pozitív egész és *b* négyzetmentes pozitív egész, azaz az 1-en kívül nincsen négyzetszám osztója. Az első 25 pozitív egész számot tekintve *b* lehetséges értékei a következők:

$$1,2,3,5,6,7,10,11,13,14,15,17,19,21,22,23.$$

Összesen 16 darab van belőlük, így, ha a 25 számból kiválasztunk 17 darabot, akkor lesz közöttük kettő, melyek fentebb felírt alakjában szereplő b szám megegyezik. Összeszorozva a két számot nyilvánvaló módon négyzetszám adódik.

9.
A megoldás azon az állításon fog múlni, hogy egy mértani sorozatban nem lehet 3 különböző prímszám. Mivel az 1 és 100 között 25 prímszám van, így 12 mértani sorozat nem tartalmazhatja mind a 25 prímet.
Az állítás bizonyítása. Feltehetjük, hogy a sorozat pozitív tagú és szigorúan monoton növekedő. Ha a$p_1 < p_2 < p_3$prímek mégis tagjai ugyanannak a mértani sorozatnak, akkor

$$p_1 = aq^k, p_2 = aq^l, p_3 = aq^m,$$

ahol *a* a kezdőtag, *q* a kvóciens és$k < l < m$ természetes számok. Ekkor

$$\frac{p_2}{p_1} = q^{l-k} \text{és} \frac{p_3}{p_2} = q^{m-l}.$$

Innen

$$p_2^{m-k} = p_1^{m-l} p_3^{l-k},$$

ami ellentmondás, hiszen a$p_i$számok különböző prímek és a kitevők pozitív egészek.

10.
a) Legyen az a 1-nél nagyobb pozitív egész és *n* az a-hoz relatív prím, 1-nél nagyobb pozitív egész. Belátjuk, hogy akkor van olyan *k* pozitív egész kitevő, hogy a^k n-nel vett osztási maradéka 1.
Tekintsük az

$$a^1, a^2, \ldots, a^n$$

hatványait a -nak. Ezek között nincs olyan, amely *n*-nel osztható, hiszen *n* az *a*-hoz relatív prím. Így akkor van közöttük kettő, melyek *n* -nel osztva azonos maradékot adnak: $a^l < a^m$. Ezek különbsége osztható lesz *n*-nel. Mivel

$$a^m - a^l = a^l(a^{m-l} - 1),$$

továbbá $(a^l, n) = 1$, ezért $a^{m-l} = a^k$ n-nel osztva 1 maradékot kell, hogy adjon.

b) Vegyük észre, hogy a 2011 prímszám. Belátjuk a következőt: ha p prím és a a p-hez relatív prím 1-nél nagyobb pozitív egész, valamint *m* az a legkisebb pozitív egész kitevő, melyre a^m p-vel osztva 1 maradékot ad, akkor m a $p-1$ osztója.
Azt, hogy ilyen m kitevő egyáltalán létezik, a kis Fermat tétel biztosítja, hiszen $p \mid a^{p-1} - 1$. Osszuk el maradékosan $p-1$-et *m*-mel! (A kis Fermat tétel miatt $m \leqslant p-1$.) Kapjuk, hogy $p - 1 = mq + r$, ahol $0 \leqslant r < m$. Ekkor

$$1 \equiv a^{p-1} = a^{mq+r} = (a^m)^q \cdot a^r \equiv a^r (\mathrm{mod}\, p).$$

Mivel m a legkisebb pozitív egész kitevő volt, így $r = 0$, ami bizonyítja az állítást.

11.
Tegyük fel indirekt módon, hogy van ilyen *n*. Nyilvánvaló, hogy *n* páratlan. Az *n* nem lehet prímszám, hiszen a kis Fermat tétel miatt akkor $n \mid 2^n - 2$ teljesülne, ami kizárt. Ha *n* összetett, akkor jelölje *p* az *n* legkisebb prímosztóját. Ekkor a kis Fermat tétel miatt $p \mid 2^{p-1} - 1$. Jelölje k a legkisebb olyan 1-nél nagyobb pozitív egész számot, amelyre $p \mid 2^k - 1$. Az előző feladatban beláttuk, hogy $k \mid p - 1$. Pontosan ugyanazzal a gondolatmenettel adódik, hogy $k \mid n$. Ez pedig nyilvánvalóan ellentmondás, hiszen p az n legkisebb prímosztója volt.

12.
Igen. Mivel $(7, 10^{200}) = 1$ és $(3, 10^{200}) = 1$ ezért a **10.** feladat a) részében olvasható általánosítás miatt van olyan *t* illetve *n* pozitív egész, hogy $7^{\mathrm{t}} \equiv 3^{\mathrm{n}} \equiv 1 (\mathrm{mod} 10^{200})$. Ebből állításunk nyomban kiolvasható.

13.
Vizsgáljuk a Fibonacci-sorozatot $\mathrm{mod} 10^{\mathrm{n}}$. Tekintsük az első $10^{2n} + 1$ tagot: $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}$, ahol $k = 10^{2n}$. Ezekből készíthető 10^{2n} darab pár:

$$(a_1, a_2), (a_2, a_3), \ldots, (a_k, a_{k+1}).$$

Feltehetjük, hogy a (0,0) pár nincs közöttük (különben készen vagyunk). Így viszont legfeljebb $(10^n)^2 - 1 = 10^{2n} - 1$ különböző pár állhat elő, hiszen $\mathrm{mod} 10^{\mathrm{n}}$ a sorozat tagjainak lehetséges értékei $0, 1, 2, \ldots, 10^n - 1$. Így akkor valamelyik pár ismétlődni fog. A sorozat képzési szabálya miatt egy adott pár minden korábbit, illetve későbbit is meghatároz. Mivel (1,1) az első pár, ezért ez fog először ismétlődni! Kapjuk a sorozatra:

$$\underbrace{1,1,2,3, \ldots, a_p,}_{periódus} 1,1, \ldots$$

Így akkor

$$1 + a_p \equiv 1 \Rightarrow 10^n \mid a_p.$$

Ezt akartuk bizonyítani.

14.
Legyen $x_n = \overline{aa\ldots ab}$, ahol az a jegyek száma n. Csak azzal az esettel foglalkozunk, amikor b nem páros és nem 5, hiszen egyébként az állítás nyilvánvaló. Ekkor az $x_1 = \overline{ab}$ és a 10 relatív prímek. Először belátjuk, hogy van olyan olyan m pozitív egész, amelyre az $1 + 10 + \ldots + 10^{m-1}$ m-jegyű „csupaegy” szám osztható x_1-gyel. Tekintsük az

$$1, 11, \ldots, \underbrace{11\ldots1}_{x_1+1}$$

számokat. Ezek között van kettő, melyek azonos maradékot adnak x_1-gyel osztva, ezért különbségük osztható lesz x_1-gyel:

$$x_1 \mid \overline{11\ldots10\ldots0},$$
$$x_1 \mid \overline{11\ldots1} \cdot 10^r.$$

Mivel $(x_1, 10^r) = 1$, ezért állításunkat igazoltuk. Ha m az említett tulajdonságú pozitív egész, akkor minden k pozitív egészre:

$$x_{km+1} = x_1 + a(10^2 + 10^3 + \ldots + 10^{km+1}) = x_1 + 100a(1 + 10 + \ldots + 10^{km-1}) = x_1 + 100a\frac{10^{km} - 1}{9},$$
$$x_{km+1} = x_1 + 100a \cdot \overline{11\ldots1}(1 + 10^m + 10^{2m} + \ldots + 10^{(k-1)m}),$$

így osztható x_1-gyel tehát összetett szám.

Valós számok

15.
a) Ha a két szám előjele ellentétes, akkor az állítás nyilvánvaló, hiszen a 0 racionális szám. Feltehetjük, hogy $0 \leqslant a < b$. Legyen n olyan pozitív egész, amelyre $\frac{1}{n} < b - a$. Jelöljük meg a számegyenesen a 0-tól indulva az $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots$ számokat! Ekkor lesz olyan k pozitív egész, hogy $a < \frac{k}{n} < b$.

b) Ismeretes, hogy a $\sqrt{2}$ irracionális szám. Mivel $a - \sqrt{2} < b - \sqrt{2}$ és az a) szerint van köztük egy r racionális szám, ezért $a < r + \sqrt{2} < b$, ahol $r + \sqrt{2}$ irracionális szám.

16.
Tekintsük a $\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, \ldots, 1000\sqrt{3}$ számokat. Ezeknek a tört része irracionális szám, hiszen a $\sqrt{3}$ irracionális. Tekerjük fel gondolatban a számegyenes nem negatív felét egy egységnyi kerületű körre és osszuk fel a körívet 1000 egyenlő hosszú ívre! Könnyű látni, hogy a köríven egy nem negatív szám tört része jelenik meg. Mivel a fent számok egyike sem eshet osztáspontba, így két eset lehetséges. Ha valamelyik szám a 0 melletti ívek valamelyikének belsejébe esik, akkor készen vagyunk. Ellenkező esetben lesz közöttük kettő, amely ugyanannak az ívnek belső pontja, azaz ($k > l$ feltehető)

$$|\{k\sqrt{3}\} - \{l\sqrt{3}\}| < 0{,}001,$$
$$|(k-l)\sqrt{3} - ([k\sqrt{3}] - [l\sqrt{3}])| < 0{,}001.$$

Ez viszont ellentmondásra vezet, hiszen $(k-l)\sqrt{3}$ a 0 melletti ívek egyikére esne. Ebből a feladat állítása leolvasható.

17.

a) A **16.** feladat megoldásából tudjuk, hogy léteznek $x_1 > x_2$ egész számok, melyekre

$$|\,(x_1 - x_2)\sqrt{3} - ([x_1\sqrt{3}] - [x_2\sqrt{3}])\,| < 0{,}001.$$

Legyen $a = x_1 - x_2$. Tekintsük azt a szabályos háromszöget, melynek csúcsai: $(0; 0)$, $(2a; 0)$, $(a; a\sqrt{3})$. Ezek közül az első kettő rácspont. Mivel

$$|\,a\sqrt{3} - ([x_1\sqrt{3}] - [x_2\sqrt{3}])\,| < 0{,}001,$$

ezért az $(a; a\sqrt{3})$ pont is megfelel, vagyis a három csúcs három különböző körlapra esik.

b) Tegyük fel indirekt módon, hogy a $P'Q'R'$ szabályos háromszög l oldalhosszúsága legfeljebb 96, továbbá csúcsai különböző rácspontok köré írt 0,001 sugarú körlapokon vannak. Jelölje P, Q és R a három rácspontot. Ekkor

$$l - 0{,}002 \leqslant PQ, QR, RP \leqslant l + 0{,}002.$$

Ismeretes, hogy szabályos rácsháromszög nem létezik, ezért a PQR háromszögnek van két különböző hosszúságú oldala, pl.: $PQ \neq QR$. Tekintettel arra, hogy PQ^2 és QR^2 egész számok:

$$1 \leqslant |\,PQ^2 - QR^2\,| = (PQ + QR)\,|\,PQ - QR\,| \leqslant 0{,}004(PQ + QR) \leqslant 0{,}004(2l + 0{,}004)$$
$$\leqslant 2 \cdot 96{,}002 \cdot 0{,}004 < 1.$$

Ez ellentmondás, ami bizonyítja az eredeti állítást.

18.

Tekintsük az $r + s\sqrt{2} + t\sqrt{3}$ alakú számok H halmazát, ahol $r, s, t \in \{0, 1, \ldots, 10^6 - 1\}$. Belátható, hogy ez az előállítás egyértelmű, azaz

$$r + s\sqrt{2} + t\sqrt{3} = e + f\sqrt{2} + g\sqrt{3}$$

pontosan akkor, amikor $r = e, s = f, t = g$. Legyen $d = (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot 10^6$. Világos, hogy $x \in H$ esetén $0 \leqslant x < d$. Osszuk fel a $[0; d]$ intervallumot $10^{18} - 1$ egyenlő részre! Legyen a részintervallumok mindegyike balról zárt, jobbról nyitott. Ekkor a skatulya-elv miatt a H halmaz 10^{18} darab eleme között lesz két olyan, amely azonos részre esik. Ezen elemek különbsége $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}$ alakú, a feladatban szereplő tulajdonságokkal bíró szám, továbbá

$$|\,a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}\,| < \frac{(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot 10^6}{10^{18} - 1} < 10^{-11}.$$

19.

a) A bal oldali egyenlőtlenség nyilvánvaló, mivel a számok különbözők. Legyen $x = \tan\alpha, y = \tan\beta$, ekkor (megfelelő feltételek mellett)

$$\frac{x - y}{1 + xy} = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \tan(\alpha - \beta).$$

Legyenek a számok $x_1 < x_2 < \ldots < x_{13}$, továbbá $x_i = \tan\alpha_i$, ahol $\frac{-\pi}{2} < \alpha_i < \frac{\pi}{2}$. A tangens függvény ezen az intervallumon szigorúan monoton növekedő. A skatulya-elv miatt van olyan $i < j$, hogy $0 < \alpha_j - \alpha_i < \frac{\pi}{12}$. Legyen $x = \tan\alpha_j$ és $y = \tan\alpha_i$. Számolással igazolható, hogy $\tan\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$, ezért

$$0 < \frac{x - y}{1 + xy} = \tan(\alpha_j - \alpha_i) < \tan\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3},$$

amiből az állítás adódik.

b) Vegyük észre, hogyha $1+\frac{1}{y}=\tan\alpha, 1+\frac{1}{x}=\tan\beta$, akkor

$$\frac{x-y}{1+x+y+2xy}=\frac{(1+\frac{1}{y})-(1+\frac{1}{x})}{(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y})+1}=\tan(\alpha-\beta).$$

Legyenek a számok $0<x_1<x_2<x_3<x_4$, továbbá $1+\frac{1}{x_i}=\tan\alpha_i$, ahol $\frac{\pi}{4}<\alpha_i<\frac{\pi}{2}$. Ekkor az α_i szögek között van kettő, melyek különbsége kisebb, mint

$$\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}}{3}=\frac{\pi}{12},$$

amiből adódik az állítás.

20.
Tegyük fel indirekt módon, hogy a feladat állítása nem igaz, tehát bármely x valós számra a feladatban szereplő összegek között van racionális szám. Jelöljön α irracionális számot, ekkor az

$$2\alpha, 3\alpha, \ldots, (n+1)\alpha$$

számok mindegyike irracionális. Tekintsük számoknak az alábbi táblázatát:

$\alpha+a_1$	$\alpha+a_2$	...	$\alpha+a_n$
$2\alpha+a_1$	$2\alpha+a_2$	...	$2\alpha+a_n$
...	...	...	...
$n\alpha+a_1$	$n\alpha+a_2$	...	$n\alpha+a_n$
$(n+1)\alpha+a_1$	$(n+1)\alpha+a_2$	...	$(n+1)\alpha+a_n$

Indirekt feltevésünk miatt a táblázat minden sorában van legalább egy racionális szám. Mivel $n+1$ sor van és n oszlop, ezért van két olyan sor, ahol a racionális számok ugyanabban az oszlopban fordulnak elő! Tehát van $i>j$, hogy $i\alpha+a_k$ és $j\alpha+a_k$ is racionális. De akkor

$$(i\alpha+a_k)-(j\alpha+a_k)=(i-j)\alpha$$

is racionális, ami ellentmondásra vezet.

21.
A sorozat tagjait dobozokba rakjuk: az r-edik dobozba kerül egy tag, ha a vele kezdődő leghosszabb növekvő részsorozat r tagból áll. Ha nincs m tagból álló növekvő részsorozat, akkor legfeljebb $m-1$ dobozunk van. A skatulya-elv miatt az $(m-1)(n-1)+1$ szám közül akkor lesz n darab, amely biztosan azonos dobozba kerül. Ez az n szám csökkenő részsorozatot fog alkotni. Tegyük fel, hogy ezek a számok az eredeti sorozatban:

$$a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}$$

továbbá az r-edik dobozba kerültek. Akkor, ha mégis valamely j-re $a_{i_1}<a_{i_j}$, akkor

$$a_{i_1}<a_{i_2}<\ldots<a_{i_j}<\ldots<a_{i_r},$$

ezért ellentmondásra jutunk, hiszen a_{i_j} is egy r-tagú növekvő részsorozat kezdő tagja lenne, ami nem lehet, mert az a_{i_1} r-edik dobozban van.

Véges-végtelen

22.
Nevezzük az a_k tagot csúcsnak, ha minden $k \leqslant n$ esetén $a_k \geqslant a_n$. Ha végtelen sok csúcsa van a sorozatnak, akkor azok nyilván monoton csökkenő részsorozatot alkotnak. Tegyük fel, hogy csak véges sok van. Ekkor létezik n_0, hogy minden $n \geqslant n_0$ esetén a_n nem csúcs. Tehát van $n_0 < n_1$, hogy $a_{n_0} < a_{n_1}$. Hasonlóan adódik, hogy mivel a_{n_1} nem csúcs, ezért van $n_1 < n_2$, $a_{n_1} < a_{n_2}$. A gondolatmenet ismétlésével adódó $a_{n_0} < a_{n_1} < a_{n_2} < \ldots$ részsorozat szigorúan monoton növekedő lesz.

23.
Használjuk fel az intervallumfelezés módszerét és a Cantor-axiómát.

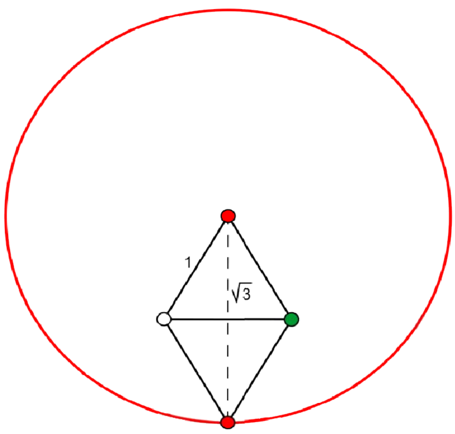
24.
a) Véges sok pont véges sok irányt határoz meg a síkon, ezért létezik olyan egyenes, amely ezen irányok egyikével sem párhuzamos, továbbá minden pont az egyik partjára esik. Ha ezt az egyenest egy rá merőleges irány mentén mozgatjuk, akkor mindig pontosan egy pont kerül át a másik partjára. Ebből könnyen adódik az állítás.

b) Tekintsünk a síkon egy olyan pontot, amely nincs rajta semelyik két adott pont által meghatározott szakaszfelező merőleges egyenesen sem, továbbá egyik adott ponttal sem egyezik meg. Ha az adott pontok távolságai ettől a ponttól $d_1 < d_2 < \ldots < d_k < d_{k+1} < \ldots < d_n$, akkor tekintsünk egy r sugarú kört, ahol $d_k < r < d_{k+1}$. Ez a körlap megfelel.

25.
a) Tekintsünk egy olyan egyenest a síkon, amely egyik olyan egyenessel sem párhuzamos, amely valamely sávot határolja. Ezen az egyenesen bármely sáv egy szakaszt fed le, így világos, hogy véges sok sáv nem tudja lefedni az egyenest, következésképpen a síkot sem.
b) Tekintsünk egy olyan egyenest a síkon, amely egyik parabola tengelyével sem párhuzamos. Ezen az egyenesen bármely parabolatartomány legfeljebb szakasznyi ponthalmazt fed le, így már ezt az egyenest sem tudják lefedni a parabolatartományok.

26.
Tekintsünk egy kört! A kerületén lévő pontok véges sok színnel vannak színezve, ezért lesz olyan szín, amellyel végtelen sok pontot színeztünk ki közülük. Kiválasztva e pontok közül n darabot azok egy konvex sokszög csúcsait alkotják. A megmaradt, még mindig végtelen sok azonos színű kerületi pontból ismét válasszunk ki n darabot, és így tovább.

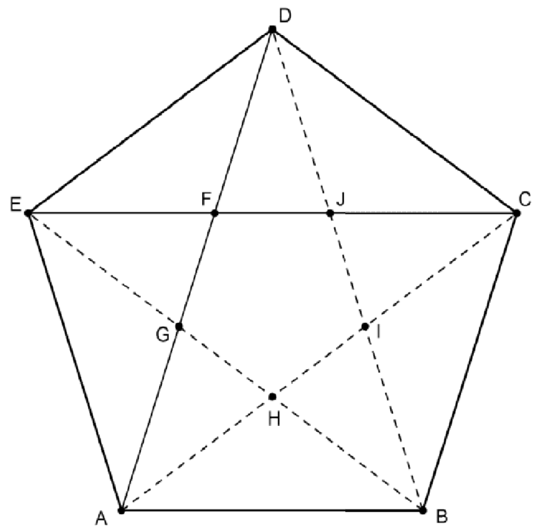
27.
Legyen a három szín piros (P), fehér (F) és zöld (Z). Tekintsünk egy egységnyi oldalú szabályos háromszöget. Ha ennek van két azonos színű csúcsa, akkor készen vagyunk. Ha nincs, akkor tükrözzük a P csúcsot az FZ oldalra. Ha ez a pont F vagy Z, akkor készen vagyunk. Tegyük fel, hogy P. Forgassuk most az eredeti háromszöget a P csúcsa körül pozitív irányba! Minden egyes helyzetre megismételve a fenti gondolatmenetet vagy kaptunk közben egységnyi oldalú szabályos háromszöget két azonos színű csúccsal, vagy pedig adódik



egy, a P tükörképei által alkotott piros színű körvonal, melynek sugara $\sqrt{3}$. E körívnek nyilván van két, egymástól egységnyi távol lévő pontja, melyek megfelelnek.

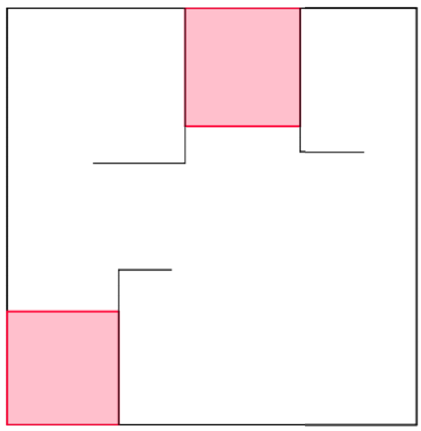
28.
Tekintsünk a síkon egy négyzetrácsot. Megmutatjuk, hogy már ennek a rácspontjai között is van négy olyan, amelyek azonos színűek és egy téglalap csúcsait alkotják. Tegyük fel, hogy a rácspontok színezéséhez n-féle színt használtunk fel. Tekintsünk $n+1$ függőleges helyzetű rácsegyenest. Az ezekre merőleges vízszintes rácsegyenesekkel képzett metszéspontok között lesz két azonos színű pont minden vízszintes rácsegyenesen. Ez a két azonos színű pont egy adott vízszintes rácsegyenesen $\binom{n+1}{2}$ pozícióban állhat és n-féle színű lehet. Tekintsünk most $n\binom{n+1}{2}+1$ vízszintes rácsegyenest. A kiválasztott függőleges rácsegyenesekkel alkotott metszéspontjaik között lesz két olyan pontpár, amelyek azonos színű pontokból állnak, továbbá ugyanabban a pozícióban vannak két függőleges rácsegyenesen. E négy pont egy megfelelő téglalap csúcsait alkotja.

29.
Tegyük fel, hogy létezik a négyzetrácson szabályos rácsötszög. Először gondoljuk meg, hogyha egy paralelogramma három csúcsa rácspont, akkor a negyedik csúcsa is rácspont. (Egyszerűen adódik pl. abból, hogy az átlók felezve metszik egymást.) Könnyű látni, hogy a szabályos ötszög átlói párhuzamosak azzal az oldallal, amellyel nincs közös pontjuk. Így akkor az *ABCDE* szabályos rácsötszög *AD* és *CE* átlóinak *F* metszéspontja rácspont. Hasonlóan adódik, hogy bármely két átló metszéspontja rácspont. Mivel az átlók metszéspontjai által kijelölt ötszög szabályos, ezért az eredeti szabályos rácsötszög belsejében találtunk egy újabb szabályos rácsötszöget. Tekintettel arra, hogy a látott gondolatmenet akárhányszor megismételhető, viszont az eredeti ötszög belsejében csak véges sok rácspont van, ellentmondásra jutunk.



A gondolatmenet csekély változtatással átvihető minden 3-nál nagyobb, páratlan oldalszámú szabályos sokszögre, valamint 6-nál nagyobb, páros oldalszámú szabályos sokszögre.

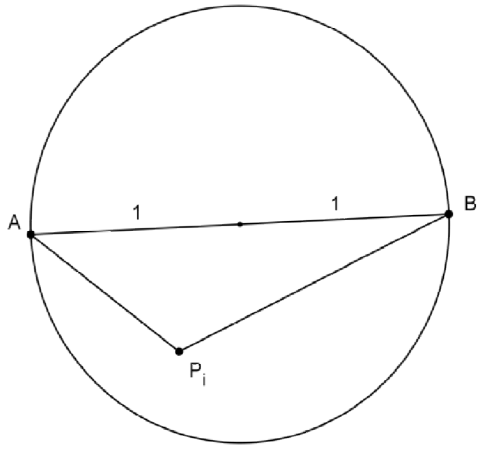
30.
Tegyük fel indirekt módon, hogy sikerült különböző méretű kisebb kockákra darabolni az eredeti kockát. Válasszuk ki az eredeti kocka egyik lapját. A darabolás után ez négyzetekre lesz bontva. Tekintsük a legkisebb négyzetet! Könnyű látni, hogy ez a négyzet a lap belsejében kell, hogy legyen, hiszen a lapon nincs két egyforma méretű négyzet és ő a legkisebb. (Ábra!) Tekintsük azt a kockát, amelynek ez a négyzet az egyik lapja. Ezt a kockát nagyobb kockák veszik körül minden oldalról, így az előzővel szemközti lapja négyzetekre kell, hogy darabolódjon a kockákra való felbontás során. Ismételjük meg a gondolatmenetet erre a négyzetre! Világos, hogy az eljárás sosem fog leállni. Ez ellentmondásra vezet, hiszen a darabolás során véges sok kocka keletkezik.



Geometriai mérték

31.

Legyenek az adott pontok $P_1, P_2, ..., P_{1000}$. Tekintsük az egységnyi sugarú k kör AB átmérőjét! A háromszög-egyenlőtlenség miatt



$$AP_i + BP_i \geqslant 2,$$

ezért

$$\sum_{i=1}^{1000}(AP_i + BP_i) \geqslant 2000,$$

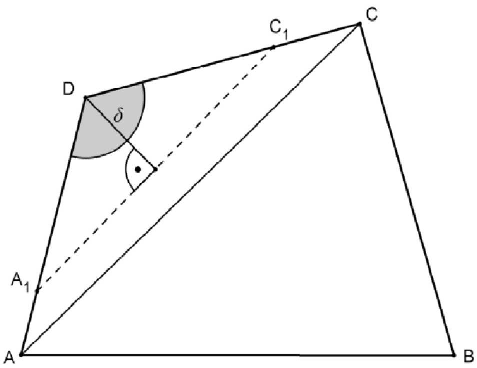
$$\underbrace{\sum_{i=1}^{1000} AP_i}_{S_1} + \underbrace{\sum_{i=1}^{1000} BP_i}_{S_2} \geqslant 2000.$$

Nyilvánvaló, hogy S_1 és S_2 közül valamelyik legalább 1000 kell, hogy legyen, ezért az *A* vagy *B* pont megfelel.

32.

Ha a négy pont közül három egy egyenesre esik, akkor az állítás nyilvánvaló. Tegyük fel ezért, hogy a négy pont konvex burka vagy négyszög, vagy pedig olyan háromszög, melynek a negyedik pont a belsejében van.

Ha a konvex burok négyszög, akkor annak van olyan belső szöge, amely a derékszögnél nem kisebb. Legyenek a csúcsok (az adott pontok) *A*, *B*, *C*, *D* és $ADC\sphericalangle \geqslant 90°$. Vegyük fel az A_1 és C_1 pontokat a *DA* illetve *DC* oldalon úgy, hogy $DA_1 = 1$ és $DC_1 = 1$. Ekkor



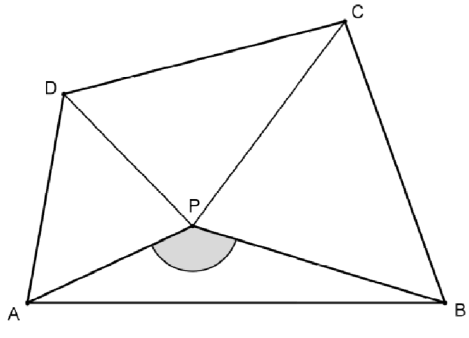
$$AC \geqslant A_1C_1 \geqslant 2\sin\frac{\delta}{2} \geqslant 2\sin 45° = \sqrt{2}.$$

Egyenlőség áll fenn pl. egységnyi oldalú négyzet esetén.

Ha a konvex burok az *ABC* háromszög, a negyedik pont pedig a háromszög belsejében lévő *D* pont, akkor összekötve a csúcsokkal a *D*-nél keletkező szögek közül legalább az egyik $120°$. Tegyük fel, hogy ez az $ADB\sphericalangle$. Mivel az összekötő szakaszok hossza legalább 1, ezért $AB \geqslant \sqrt{3} > \sqrt{2}$.

33.

Tegyük fel indirekt módon, hogy az *ABCD* konvex négyszög bármely *P* belső pontjára: $PA, PB, PC, PD \geqslant 17$. A *P* pontnál lévő négy szög közül az egyik legalább derékszög, mondjuk $APB\sphericalangle$. Ekkor pl. a koszinusz-tétel miatt



$$AB^2 \geqslant PA^2 + PB^2,$$

viszont

$$AB^2 < 24^2 = 576, PA^2 + PB^2 \geqslant 2 \cdot 17^2 = 578,$$

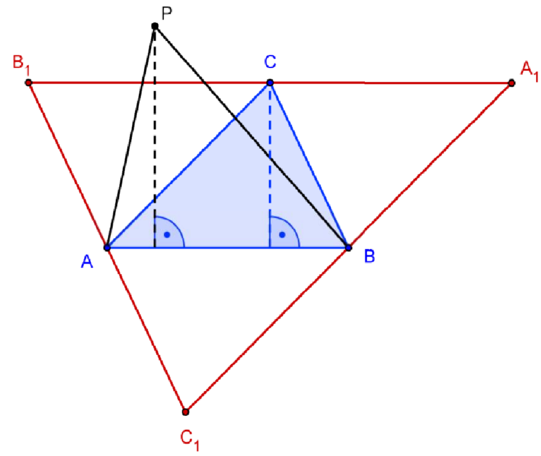
ami ellentmondás. Van tehát olyan csúcsa a négyszögnek amihez *P* közelebb van 17 egységnél.

34.

Nem igaz. Tekintsünk egy olyan derékszögű háromszöget, amelynek a befogói 20000 és 0,0001 egység hosszúak. Ekkor a háromszög területe 1 területegység. Tegyük fel, hogy szétvágható a feladatban említett módon, akkor a belőle összerakott négyzet területe is 1, ezért a négyzet oldala 1 egység hosszú. Jelöljünk ki a 20000 egység hosszú befogón 999 belső pontot úgy, hogy a befogó két végpontjával együtt 1000 egyenlő hosszú darabra osszák fel. A skatulya-elv miatt ezen 1001 darab pont között biztosan lesz kettő, amelyek a szétvágást követően azonos darabon lesznek. E két pont között a távolság azonban legalább 20, miközben a feltevésünk szerint létező négyzet két pontja közötti távolság legfeljebb $\sqrt{2}$ lehet. Ellentmondásra jutottunk.

35.

Az adott pontok a síkon véges sok háromszöget határoznak meg. Nézzük ezek közül azt, amelynek a területe maximális nagyságú. (Vagy a maximális területűek egyikét, ha több ilyen is van.) Legyen ez az ABC háromszög. Tekintsük a síkon azt az $A_1B_1C_1$ háromszöget, amelynek az ABC háromszög az ún. középvonal háromszöge. Mivel ABC a pontok által meghatározott maximális területű háromszög volt, így az adott pontok mindegyike rajta van az $A_1B_1C_1$ háromszöglapon. (Ábra!) Ezt a középvonalak négy egybevágó háromszögre bontják, melyek mindegyike legfeljebb 1 területű. A skatulya-elv miatt, mivel $4 \cdot 499 < 1997$, ezért lesz e négy háromszöglap között olyan, amely az adott pontok közül legalább 500-at tartalmaz.



36.

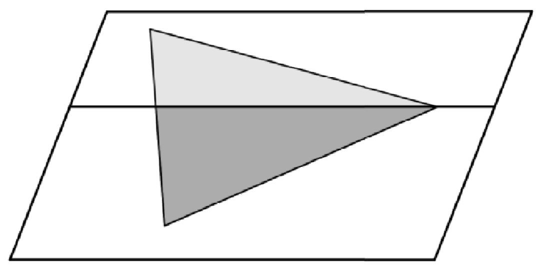
Osszuk fel a négyzetet az oldalaival párhuzamos egyenesekkel 50 darab egybevágó, $0{,}2 \times 0{,}1$ -es méretezésű téglalapra. A skatulya-elv miatt lesz olyan téglalap, melyre az adott pontok közül három illeszkedik. Felhasználjuk azt az ismert állítást (bizonyítását lásd alább), hogy egy paralelogrammába írt háromszög területe legfeljebb a paralelogramma területének fele. Az említett három pontot kiválasztva, az általuk meghatározott háromszög területe legfeljebb

$$\frac{1}{2} \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}1^2 = 0{,}01,$$

ami bizonyítja a feladat állítását. A felhasznált állítás bizonyítása.

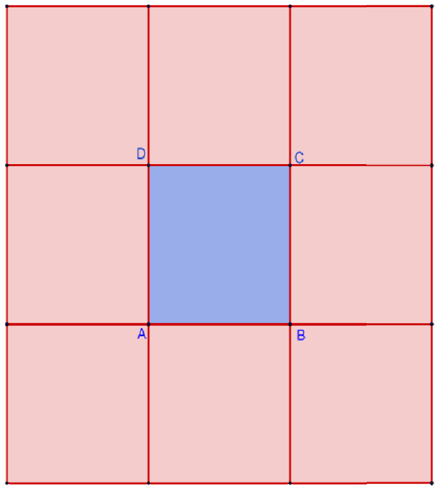
a) Ha a háromszög két csúcsa rajta van a paralelogramma ugyanazon oldalán, vagy valamely oldaltól ugyanakkora távolságra van, akkor a területképletek miatt azonnal készen vagyunk.

b) Ellenkező esetben válasszuk ki az egyik oldalt, és húzzunk párhuzamost a tőle mért távolság szerinti középső ponton keresztül ezzel az oldallal. Így két paralelogrammára bontjuk az eredetit, valamint két háromszögre a pontok által meghatározott háromszöget. Vegyük észre, hogy a két kisebb háromszög és az őket tartalmazó paralelogrammák az a) pontban említett helyzetben vannak, így visszavezettük arra a b) helyzetet.



37.

Könnyű látni, hogy 8 darab vele érintkező egységnégyzet létezik. Belátjuk, hogy ennél több nem létezhet. Tekintsük az egységnyi oldalú $ABCD$ négyzet köré írt 8 egység kerületű $EFGH$ négyzetet, melynek oldalegyenesei $\frac{1}{2}$ távolságra vannak az $ABCD$ megfelelő oldalegyeneseitől. Megmutatjuk, hogy egy, az $ABCD$ négyzettel érintkező négyzet ennek a kerületéből legalább egységnyi hosszú részt lefed. Ebből már állításunk adódik. Ha az érintkező négyzetnek van közös oldalszakasza az $ABCD$ négyzettel, vagy az $EFGH$ négyzet kerülete két szemközti oldalát is metszi, akkor világos a legalább egységnyi hosszúságú rész lefedése.



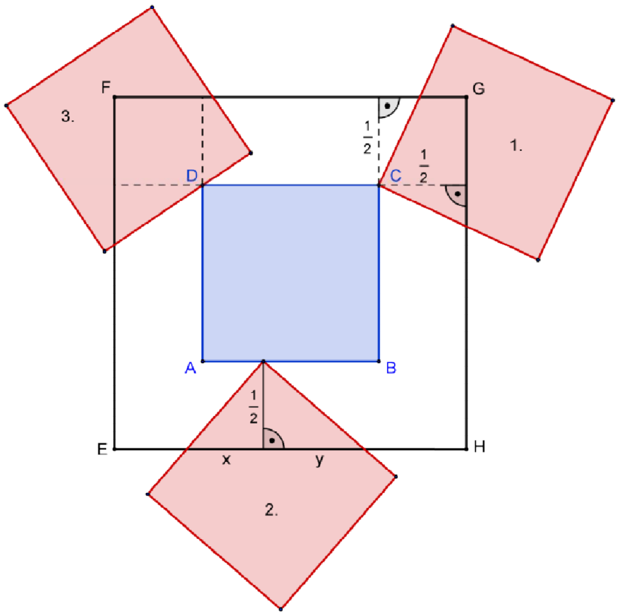
Vegyük sorba a további lehetőségeket (ábra).
Az 1. helyzetben a két egybevágó derékszögű háromszög miatt éppen egységnyi a lefedett kerületrész. A 2. helyzetben a magasságtétel miatt

$$xy = \frac{1}{4},$$

ezért a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget alkalmazva:

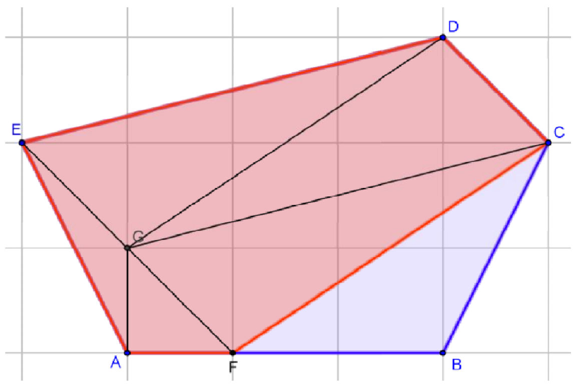
$$x + y = x + \frac{1}{4x} \geqslant 2\sqrt{x\frac{1}{4x}} = 1.$$

A 3. helyzetben az állítás nyomban leolvasható.

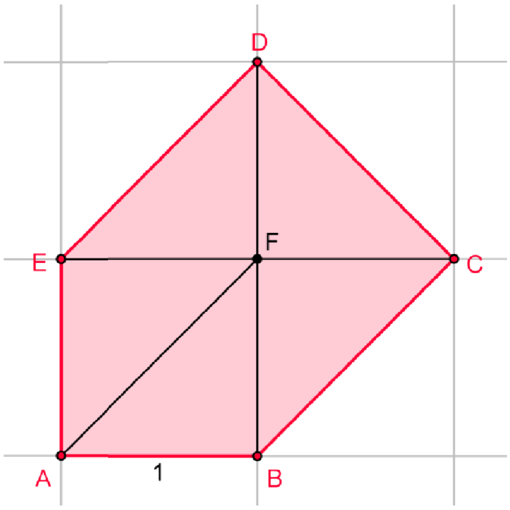


38.

Ha a konvex rácsötszög kerületén a csúcsokon kívül is van rácspont, akkor található olyan konvex rácsötszög az eredeti rácsötszögön belül, melynek területe kisebb, a csúcsai pedig rácspontok (ábra). Mivel véges sok rácspont van az eredeti konvex ötszöglapon, ezért véges sok lépésben olyan, az eredeti ötszöglapon fekvő konvex rácsötszöghöz juthatunk, amelynek a kerületén a csúcsokon kívül nincsen rácspont. Tekintsük ezt az ötszöget.
A csúcsokat a koordináták paritása alapján 4 osztályba lehet sorolni: $(ps;ps), (ps;ptl), (ptl;ps), (ptl;ptl)$. Mivel ötszögről van szó, ezért lesz két csúcs, amelyik azonos osztályba tartozik. Legyenek ezek E és F. Világos, hogy akkor az EF szakasz G felezési pontja rácspont lesz. Mivel a fentiekben mondottak miatt E és F nem



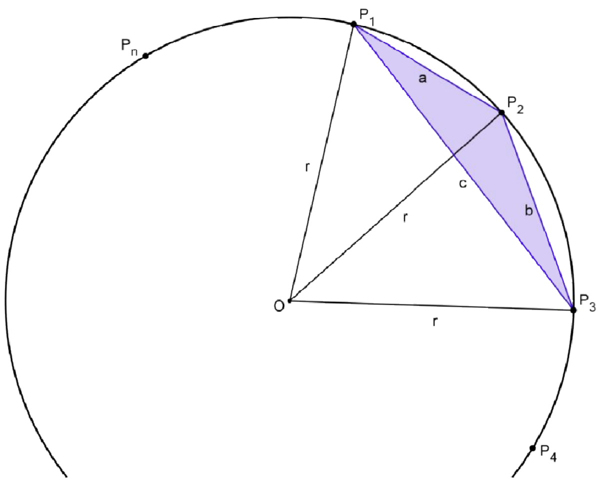
lehetnek az ötszög szomszédos csúcsai, ezért G belső rácspont lesz. Ismeretes, hogy egy rácsháromszög területének mérőszáma mindig egy egész szám fele, ezért legalább 0,5 területegység a területe. A G pontot az ötszög csúcsaival összekötve 5 rácsháromszögre bonthatjuk a konvex ötszöget, amelynek a területe a korábban mondottak miatt legalább $5 \cdot 0{,}5 = 2{,}5$ területegység lesz. A minimum elérhető, melyre példát mutat az alábbi ábra.



39.

Mivel $r > 1$ és $2\pi > 6$, ezért feltehetjük, hogy $n \geqslant 7$. A rácspontokat számozzuk meg az óramutató járásának megfelelően: $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

Tekintsük a $P_1P_3, P_2P_4, \ldots, P_nP_2$ íveket. Ezek a körvonalat duplán fedik le, így van köztük olyan, pl. $\widehat{P_1P_3}$, melynek hossza legfeljebb $\frac{4\pi r}{n}$. Nézzük most a $P_1P_2P_3$ háromszöget. Ennek területe rögzített P_1 és P_3 pontok esetén akkor maximális, ha P_2 a $\widehat{P_1P_3}$ ív felezési pontja. Mivel az r sugarú körben egy konvex α középponti szöghöz tartozó húr hossza $2r\sin\frac{\alpha}{2}$, ezért ismert területképlet miatt:



$$T_{P_1P_2P_3} = \frac{abc}{4r} \leqslant \frac{2r\sin\frac{\pi}{n} \cdot 2r\sin\frac{\pi}{n} \cdot 2r\sin\frac{2\pi}{n}}{4r}.$$

Ismeretes, hogy ha $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, akkor $\sin\alpha \leqslant \alpha$, ezért

$$T_{P_1P_2P_3} \leqslant \frac{2r\frac{\pi}{n} \cdot 2r\frac{\pi}{n} \cdot 2r\frac{2\pi}{n}}{4r} = \frac{4r^2\pi^3}{n^3}.$$

Mivel egy rácsháromszög területe legalább $\frac{1}{2}$, így

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{4r^2\pi^3}{n^3} \Leftrightarrow n \leqslant 2\pi\sqrt[3]{r^2}.$$

Ezt kellett igazolnunk.

40.
Fel fogjuk használni azt az egyszerűen belátható tényt, hogy a rácsháromszögek területe egy egész szám fele. Most igazoljuk, hogy egy adott körlap által lefedett háromszögek területei közül a szabályos háromszög területe lesz a maximális. Világos, hogy elegendő olyan háromszögekkel foglalkoznunk, amelyek csúcsai az adott kör kerületi pontjai. Legyen r a köré írt kör sugara, a, b és c pedig az oldalak hossza. A háromszög trigonometriájából közismert összefüggéseket alkalmazva:

$$T = \frac{ab\sin\gamma}{2} = \frac{2r\sin\alpha \cdot 2r\sin\beta \cdot \sin\gamma}{2} = 2r^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget alkalmazva:

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \leqslant \left(\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{3}\right)^3.$$

Mivel a $[0;\pi]$ intervallumban a szinusz függvény Jensen-konkáv, ezért a Jensen-egyenlőtlenséget alkalmazva:

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leqslant 3\sin\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} = 3\frac{\sqrt{3}}{2},$$

ezért

$$T \leqslant 2r^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{4}r^2.$$

Egyenlőség pedig pontosan akkor teljesül, ha $\alpha = \beta = \gamma$, azaz a háromszög szabályos. Ezzel állításunkat igazoltuk.
Mivel a feladatban szereplő kör sugara $r = 2006$ egység, ezért a körlap által lefedett rácsháromszögek területének mérőszáma legfeljebb

$$\left[\frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot 2006^2\right] = 5227376.$$

Legelső megjegyzésünk miatt így legfeljebb $2 \cdot 5227376 = 10454752$ különböző területmérőszám lehetséges. Az adott 400 darab rácspont összesen

$$\binom{400}{3} = 10586800$$

rácsháromszöget határoz meg, így a skatulya-elv miatt a területeik mérőszámai között lennie kell két egyenlőnek. Ezt kellett igazolnunk.

41.
Írjunk minden oldalra befelé olyan téglalapokat, amelyeknek a sokszöggel nem közös oldala *t*/*k* hosszúságú. Ha sokszög oldalhosszúságai $a_1, a_2, \ldots, a_n$, akkor ezeknek a téglalapoknak a területösszege:

$$a_1\frac{t}{k} + a_2\frac{t}{k} + \ldots + a_n\frac{t}{k} = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\frac{t}{k} = t,$$

vagyis éppen a sokszög területe. Mivel az egyes csúcsoknál lévő belső szögek konvexek, így lesznek a sokszög belsejében a téglalapok által többszörösen lefedett részek, ezért lesz olyan pont is a sokszög belsejében, amely nincs lefedve. Egy ilyen pont, mint a *t*/*k* sugarú kör középpontja megfelel, hiszen minden oldaltól távolabb van, mint *t*/*k*.

42.
Tegyük fel indirekt módon, hogy bármely két szőnyeg kevesebb, mint 1/9 arányban fedi át egymást. Gondolatban egymás után lerakva a szőnyegeket nézzük meg, hogy mennyi lefedetlen részt foglalnak el. Az első 9/9 részt. A második több, mint 8/9 részt, a harmadik több, mint 7/9 részt, s.í.t., végül a kilencedik több, mint 1/9 részt. Mivel

$$\frac{9}{9}+\frac{8}{9}+\frac{7}{9}+\ldots+\frac{1}{9}=\frac{45}{9}=5,$$

így a kilenc szőnyeg több, mint 5 területegységnyi helyet fog így elfoglalni a lefedetlen részeket tekintve, ami ellentmondásra vezet.

43.
Tegyük fel, hogy adott a síkon *n* darab különböző pont és *D* jelöli a közöttük fellépő legnagyobb, *d* pedig a legkisebb távolságot. Írjunk a pontok köré $\frac{d}{2}$ sugarú körlapokat! Ezek a körök nem metszhetik egymást, az általuk lefedett terület pedig $\frac{n\pi d^2}{4}$. Másrészt ezeknek a köröknek rajta kell lenniük az egyik adott pont köré írt $D+\frac{d}{2}$ sugarú körlapon, ezért

$$\frac{n\pi d^2}{4}<\pi(D+\frac{d}{2})^2,$$
$$\frac{d\sqrt{n}}{2}<D+\frac{d}{2},$$

ahonnan

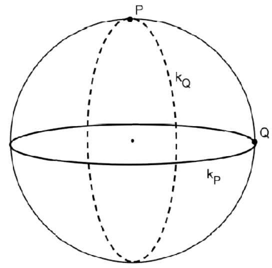
$$(*)\quad \frac{D}{d}>\frac{\sqrt{n}-1}{2}.$$

Mivel a feladatban $n=225=15^2, D\leqslant 21, d\geqslant 3$, ezért a (*) egyenlőtlenség nem teljesülhet, hiszen

$$\frac{D}{d}\leqslant 7.$$

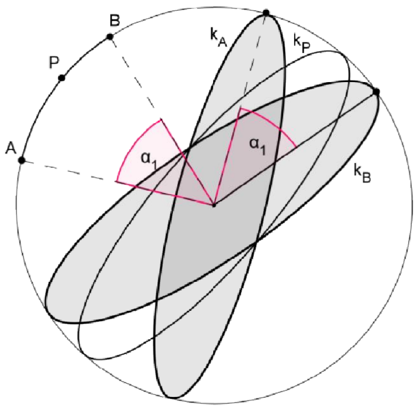
Ellentmondásra jutottunk. Tehát nem adhatók meg a pontok a feladatban leírt módon.

44.
Az egységgömb felületének valamely P pontjához rendeljünk hozzá egy főkört úgy, mintha P lenne az északi sark, a főkör pedig az egyenlítő. Jelölje a P ponthoz ilyen módon rendelt főkört k_P. Vegyük észre, hogy



$$Q\in k_P \Leftrightarrow P\in k_Q.$$

Jelölje az adott ívek hosszát, egyúttal a hozzájuk tartozó középponti szögeket $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$.
Legyen az α_1 ív két végpontja A és B, a hozzájuk a fentebb leírt módon rendelt főkörök pedig k_A és k_B. Ha P az AB ív valamely pontja, akkor k_P az AB ív által meghatározott két gömbkétszög által kijelölt felületen fekszik. Ezeknek a gömbkétszögeknek a szöge szintén α_1. Mivel egy α szögű gömbkétszög felszíne $2\alpha r^2$, ezért az AB ívhez tartozó felületdarab a gömbön: $2\cdot 2\alpha_1=4\alpha_1$.



Tudjuk, hogy

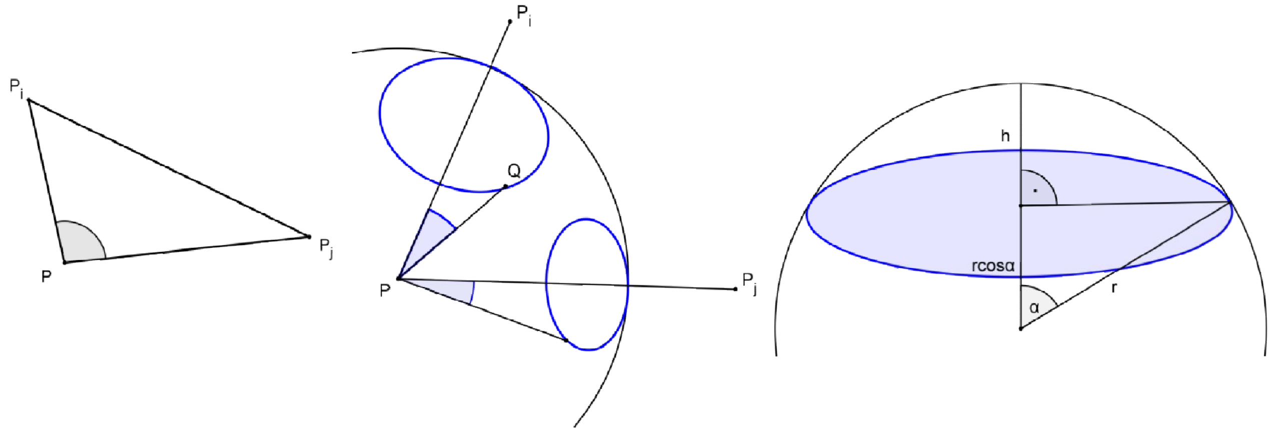
$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n<\pi,$$

így akkor

$$4(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)<4\pi=A_{gömb}.$$

Ez azt jelenti, hogy az egységgömb felszínén van olyan X pont, hogy X nincs rajta egyik kijelölt ívhez tartozó két gömbkétszögön sem. Tekintsük az X-hez tartozó k_X főkört! Ez nem metszheti egyik kijelölt ívet sem, mivel akkor az M metszésponthoz tartozó k_M főkör átmenne X-en, amit kizártunk. A k_X főkörre fektetett sík megfelelő.

45.
Mivel egy háromszögben nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van és megfordítva, ezért $P_iP_j > P_iP$ miatt $P_iPP_j > 60°$. Tekintsük a P középpontú, egységsugarú gömbfelületet! Minden i-re értelmezzünk ezen a gömbfelületen egy gömbsüveget oly módon, hogy egy adott i-re a gömbsüveget a gömbfelületnek azon a Q pontjai alkossák, melyekre $P_iPQ \leqslant 30°$. Ekkor ezek a gömbsüvegek diszjunktak lesznek.



Mivel egy r sugarú gömbön lévő h magasságú gömbsüvegnek a gömbfelülettel közös része $2\pi rh$ nagyságú, ezért a fentebb értelmezett gömbsüvegekre:

$$2\pi rh = 2\pi r^2(1 - \cos\alpha) = 2\pi(1 - \cos 30°) = \pi(2 - \sqrt{3}).$$

A páronként diszjunkt gömbsüvegek felületeinek összege kisebb, mint a gömb felszíne, ezért

$$n \cdot \pi(2 - \sqrt{3}) < 4\pi \Leftrightarrow n < \frac{4}{2 - \sqrt{3}} = 4(2 + \sqrt{3}) < 8 + \sqrt{49} = 15.$$

Ezzel a bizonyítandó állítást igazoltuk.

46.
Burkoljuk be a téglatest falait belülről, valamint az egységkockák felületét kívülről egy olyan réteggel, amely tartalmazza mindazon egységnyi sugarú gömbök középpontjait, amelyek a téglatest valamely határoló lapjába, ill. az egységkockákba belemetszenek. Megmutatjuk, hogy ennek a rétegnek és az egységkockáknak az össztérfogata kisebb a téglatest térfogatánál. Ebből már következik, hogy a téglatest belsejében van olyan pont, amely nem tartozik a réteghez, azaz a köré írt egységnyi sugarú gömb a téglatestbe esik és nem metsz bele egyik kockába sem. A téglatest lapjait belülről nyilván egy egységnyi vastag réteggel kell burkolni. A fennmaradó rész egy kisebb téglatest, amelynek minden éle az eredetiénél két egységnyivel kisebb, azaz térfogata $4 \cdot 6 \cdot 8 = 192$. Egy egységkocka lapjaira szintén egy-egy egységnyi vastag réteget kell rátenni (azaz hat további egységkockát), az éleknél ezeket egy-egy egységnyi magasságú és egységnyi alapkörsugarú negyedhengerrel kell összekötni, végül a csúcsoknál egy-egy egységnyi sugarú nyolcadgömböt kell elhelyezni. A burkolás után kapott test tehát 7 egységkockából, 12 negyedhengerből és 8 nyolcadgömbből áll. Térfogata így $7 + 3\pi + \frac{4\pi}{3}$. A 9 egységkockára ez összesen $9\left(7 + 3\pi + \frac{4\pi}{3}\right) \approx 185{,}52$, ami valóban kisebb, mint 192.

47.

Tegyük fel indirekt módon, hogy bármely két pont távolsága legalább 0,7 egység. Tekintsük a pontok köré írt 0,35 egység sugarú gömböket! Ezek a gömbök közös belső pont nélküliek, valamint mindannyian benne vannak abban a 5,7 × 5,7 × 10,7-es téglatestben, melyet úgy kapunk, hogy az eredeti téglatest lapjait kívülről egy 0,35 egység vastag réteggel vonjuk be. A gömbök össztérfogata kisebb kell, hogy legyen, mint ennek az új téglatestnek a térfogata:

$$\frac{2001 \cdot 4\pi \cdot 0{,}35^3}{3} < 5{,}7 \cdot 5{,}7 \cdot 10{,}7.$$

Innen $\pi < 3{,}04$ adódik, ami nyilvánvaló ellentmondás. A kapott ellentmondás miatt van két olyan pont, melyek távolsága kisebb, mint 0,7 egység.

48.

Tegyük fel indirekt módon, hogy bármely két adott pont távolsága legalább 1. Írjunk minden pont köré $\frac{1}{2}$ sugarú gömböt! Ezek a gömbök közös belső pontot nem tartalmaznak, továbbá térfogataik összege kisebb, mint annak a 10 egység oldalú kockának a térfogata, melyet az eredeti kocka lapsíkjaitól $\frac{1}{2}$ távolságra lévő síkok határolnak. Tehát

$$\frac{1981 \cdot 4\pi(\frac{1}{2})^3}{3} = \frac{1981 \cdot \pi}{6} < 10^3 = 1000,$$

$$\pi < \frac{6000}{1981} \approx 3{,}03.$$

Ez azonban nem igaz, ezért feltevésünk megdőlt. Ebből adódik a bizonyítandó állítás.

49.

Tegyük fel, hogy K a légitársaság által adott felső korlát, és van egy bőröndünk, melynek az egyik csúcsából induló élek hossza a, b, c, továbbá $a + b + c > K$. Tételezzük fel, hogy ezt a bőröndöt be lehet csomagolni egy olyan bőröndbe, amelynél az egyik csúcsból induló élek hossza x, y, z. (Így akkor $K \geqslant x + y + z$.) Jelölje A_r ill. B_r a belső ill. külső bőröndtől legfeljebb r távolságra lévő pontok halmazát! E ponthalmazok térfogatát úgy kapjuk, hogy figyelembe vesszük magát a bőröndöt, a sarkoknál lévő nyolcadgömböket, az éleknél lévő negyedhengereket, valamint a lapokra helyezett r vastagságú, téglatestekből álló réteget. Ezért a térfogatok:

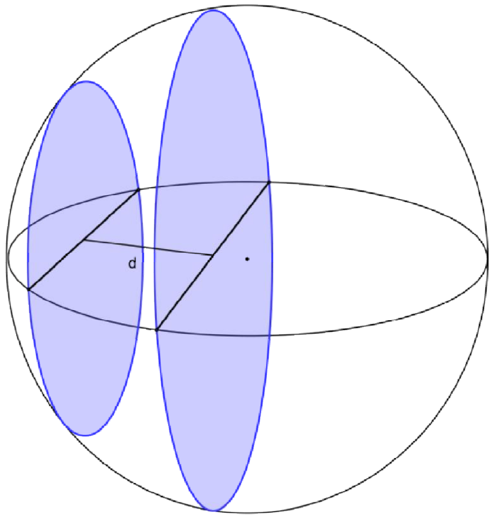
$$V(A_r) = abc + \frac{4\pi r^3}{3} + \pi r^2(a + b + c) + 2(ab + bc + ca)r,$$
$$V(B_r) = xyz + \frac{4\pi r^3}{3} + \pi r^2(x + y + z) + 2(xy + yz + zx)r.$$

Mivel nyilvánvaló, hogy $V(\;_r) \leqslant V(B_r)$, ezért ebből rendezés után:

$$0 \leqslant \pi(x + y + z - a - b - c)r^2 + 2(xy + yz + zx - ab - bc - ca)r + (xyz - abc).$$

Vegyük észre, hogy $x + y + z < a + b + c$ esetén a jobb oldalon álló r-ben másodfokú polinom főegyütthatója negatív lesz, ezért a polinomfüggvény grafikonja lefelé nyíló parabola. Ennek az r-ben másodfokú egyenlőtlenségnek azonban minden $r > 0$ esetén teljesülni kellene, ami ellentmondásra vezet. A kapott ellentmondás azt jelenti, hogy a kívánt csomagolás nem lehetséges.

50.



Vizsgáljuk meg, hogy hol lehet az 1mm sugarú kör középpontja. Egyrészt a középpontnak az eredeti körrel koncentrikus, 1 mm-rel kisebb, tehát 1999 mm sugarú körlapon kell lennie, másrészt az egyenesektől legalább 1 mm távolságra. Minden egyenesre illesszünk egy-egy 2 mm széles sávot, amelynek az adott egyenes a középpárhuzamosa. Elegendő megmutatnunk, hogy ezek a sávok nem fedik le teljesen az 1999 mm sugarú kört.

Belátjuk a következő állítást: ha párhuzamos egyenesek által határolt sávokkal lefedhető egy körlap, akkor a sávok szélességének összege legalább akkora, mint a kör átmérője.

Legyen$d_1, d_2, \dots, d_n$a sávok szélessége, a kör sugara pedig r. Tekintsük azt a gömböt, melynek középpontja és sugara a körével megegyező. Tekintsük a gömbfelületen azokat a gömböveket, amelyek merőleges vetületeként éppen a sávokat kapjuk! Belátható, hogy egy r sugarú gömbfelületen lévő, d szélességű gömböv felszíne$2\pi r d$.Ha a sávok lefedik a kört, akkor a gömbövek lefedik a gömbfelületet, ezért

$$2\pi r d_1 + 2\pi r d_2 + \dots + 2\pi r d_n \geqslant 4\pi r^2,$$
$$d_1 + d_2 + \dots + d_n \geqslant 2r.$$

Ezt akartuk igazolni.

Visszatérve a feladatra, mivel a kör átmérője 3998 mm, míg a sávok szélességeinek összege csak$1996 \cdot 2 = 3992$mm, ezért a sávok nem fedik le a kört, így elfér még egy 1 mm sugarú kör is az eredeti körlapon.