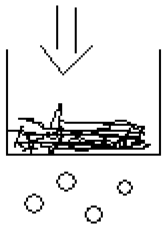
Véletlen gráfok

Példák:

Kávéra vizet öntünk és alul kifolyik a víz:

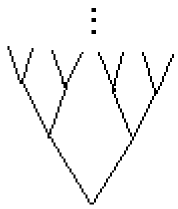


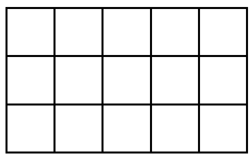
Olaj vagy víz átszívárgása egy kőzetrétegen:

Mind az olaj, mind a víz bekerül egy rendszerbe, mely makroszinten nem írható le, mikroszinten azonban a folyadék valamilyen véletlen tényezők alapján juthat keresztül a a kőzet, illetve a kávé részecskéi között. Az ilyen rendszereknek próbálunk meg modellt találni.

Kiindulás:

Alapgráf: $m \times n$-es vagy végtelen négyzetrács, rács, végtelen fa…



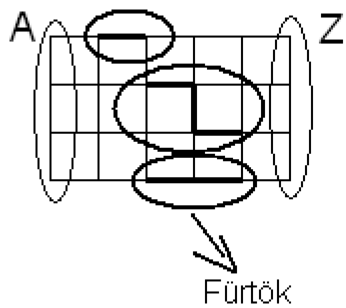


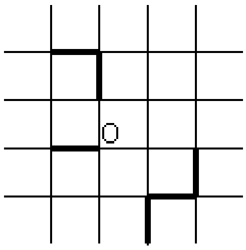
Csinálunk belőle véletlen gráfot (perkolációt):
- Veszünk egy érmét, amely P valószínűséggel lesz fej.
- Feldobjuk az érmét minden él esetében és ha fej, akkor az adott él nyitott él.
- Az által, hogy az él nyitottá válik, azon az úton a folyadék keresztül áramolhat az őt körülvevő részecskék között.

Ezáltal biztosítjuk a gráf bejárhatóságának véletlenszerűségét.

Definíció: A perkoláció *fürtjein* a gráf nyitott élekből álló részgráfjának azon összefüggő részgráfjait értjük, melyek nem bővíthetőek.

Kérdések:
- Át lehet-e jutni A-ból Z-be nyílt éleken keresztül?
- Végtelen gráf perkolációjában van-e végtelen fürt?

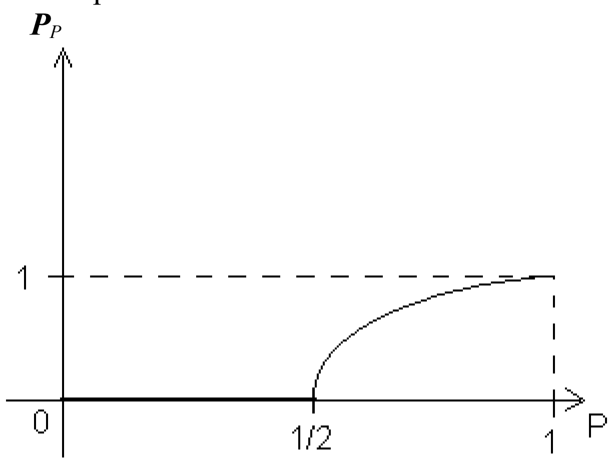




Megjegyzés: Az nyilvánvaló, hogy bármilyen $P < 1$ valószínűség mellett pozitív valószínűséggel *nincsen* O-ból induló végtelen fürt. Hiszen mivel O fokszáma véges, ezért pozitív valószínűséggel nincsen O-ból induló nyílt él.

Jelölés: $\boldsymbol{P}_P$ jelöli, hogy P valószínűségű érme mellett milyen valószínűséggel van O-ból induló végtelen fürt a perkolációban.

Ha P kicsi, akkor csak elvétve találok éleket, tehát $\mathbf{P}_P$ egy darabig nulla, utána valahogy így néz ki a függvény. Ha felrajzoljuk $\mathbf{P}_P$-t P függvényében, akkor kb. ilyen ábrát kapunk:

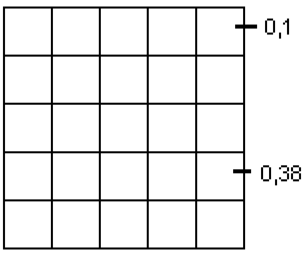


Tétel: $\boldsymbol{P}_P$ P-nek monoton növő függvénye.

A bizonyításhoz a csatolás módszerét alkalmazzuk, mely során úgy állítunk elő véletlen perkolációkat, hogy azok „egymásra épülnek”. Minden nagyobb P-hez tartozó perkoláció tartalmazza majd az összes kisebb P-hez tartozó perkolációt.

A_P: P valószínüségű érme mellett az az esemény, hogy a perkolációban van végtelen fürt.

Megvalósítjuk a perkolációt kettő különböző P valószínűségre egyszerre:



Minden élre írunk egy $x(e)$ számot a [0,1] intervallumból úgy, hogy $x(e)$ egyenletes eloszlású ezen az intervallumon.

P_1 valószínűséghez tartozó perkoláció azon élek összessége, melyekre $x(e)$ nem nagyobb mint P_1.

P_2 valószínűséghez tartozó perkoláció azon élek összessége, melyekre x(e) nem nagyobb mint P_2.

Ha P_1 nem nagyobb, mint P_2, akkor P_2-höz tartozó perkoláció tartalmazza a P_1-hez tartozó perkoláció minden élét. Így ha van a P_1-hez tartozó perkolációban végtelen fürt, akkor P_2-höz tartozó perkolációban is van, vagyis:
$\mathbf{P}(A_{P1}) \leq \mathbf{P}(A_{P2})$, mert A_{P1}-ből következik A_{P2}. Tehát $\mathbf{P}_P$ monoton.

Definíció: P_c kritikus perkoláció valószínűség, ha minden $P < P_c$-re $\mathbf{P}(A_P) = 0$ és minden $P > P_c$-re $\mathbf{P}(A_P) > 0$.

Hamasley tétele (1960): A négyzetrácson $1/2 \leq P_c$.
Kesten tétele (1980): A négyzetrácson $P_c = 1/2$.

Kolmogorov féle 0-1 szabály:

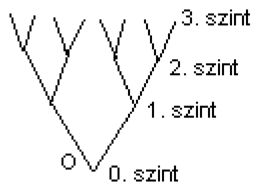
Definíció: Legyenek $A_1, A_2, A_3\ldots$ független események és tegyük fel, hogy a B esemény függ az A_i eseményektől. B-t definíció szerint **stabilnak** nevezzük, ha nem változik semelyik véges sok A_i megváltoztatásával. Például:

A_i: Az i. él nyitott a perkolációban.
- B: Van végtelen fürt a perkolációban.
- B: Végtelen sok végtelen fürt van a perkolációban.
- Nem ilyen: B': Kettő végtelen fürt van a perkolációban.

A Kolmogorov-féle 0-1 szabály azt mondja ki, hogy minden stabil esemény valószínűsége 0 vagy 1.

Tétel: Ha $P < 1/2$, akkor a bináris fa perkolációjában 0 valószínűséggel van végtelen fürt.

Bizonyítás:



Legyen Z_n az a valószínűségi változó, amely azt mondja meg, hogy az n. szinten hány csúcsot köt össze nyílt élekből álló út O-val és jelölje $\mathbf{E}(Z_n)$ az Z_n várható értékét.

$Z_I = 1$
Világos, hogy

$\mathbf{E}(Z_I) = 0\cdot(1-P)^2 + 1\cdot 2P(1-P) + 2\cdot P^2 = 2P.$

Másrészt ha X_1 az egyik, X_2 a másik ágon lévő megfelelő csúcsok számát jelző valószínűségi változó, akkor $Z_1 = X_1 + X_2$, így $\mathbf{E}(Z_1) = \mathbf{E}(X_1) + \mathbf{E}(X_2) = 2P$.
Mivel X_1 és X_2 szerepe teljesen szimmetrikus, ezért várható értékük egyenlő. Következésképp $\mathbf{E}(X_1) = \mathbf{E}(X_2) = P$.

Nyilvánvaló a következő is:
Ha Z_1 értéke z, azaz egy adott esetben az 1. szint z darab pontját köti össze nyílt él O-val, akkor $\mathbf{E}(Z_2) = 2P\cdot z$. Tehát $\mathbf{E}(Z_2) = \mathbf{E}(Z_1)\cdot 2P$.

Ugyanígy kapjuk általában, hogy $\mathbf{E}(Z_{k+1}) = \mathbf{E}(Z_k)\cdot 2P$, tehát $\mathbf{E}(Z_k) = (2P)^k$.

Ebből kiszámolhatjuk az O-val összekötött csúcsok számának várható értékét. Ha Y jelöli azt a valószínűségi változót, amely az O-val összekötött csúcsok számát adja meg, akkor $Y = \sum Z_i$, vagyis

$\mathbf{E}(Y) = \sum \mathbf{E}(Z_i) = \sum (2P)^i = a,$

ahol az összegzés 0-tól végtelenig értendő.

Ha $P < 1/2$, akkor a $\sum_{1\leq i\leq n} (2P)^i$ sorozat konvergens, tehát a $\sum (2P)^i$ végtelen sor összege véges, értéke a = $1/(1-2P)$.
Ha $1/2 \leq P$, akkor a $\{(2P)^i\}$ végtelen sor tagjainak összege végtelen. Így
- ha $P < 1/2$, akkor $\mathbf{E}(Y) < \infty$.
- ha $P \geq 1/2$, akkor $\mathbf{E}(Y) = \infty$.

Emiatt ha $P < 1/2$, akkor 1 a valószínűsége, hogy Y véges, vagyis 1 a valószínűsége, hogy nincs O-hoz kapcsolódó végtelen fürt.
($P = 1/2$ esetén $\mathbf{E}(Y) = \infty$, és 1 a valószínűsége, hogy Y véges)

Ebből a bizonyításból azonban még nem derül ki, hogy mi a helyzet, ha P ≥ 1/2. Hogy ezt megtudjuk, bevezetünk egy új jelölést:

Definíció: Jelölje q_k annak a valószínűségét, hogy O nincs összekötve a k-adik szinttel!

Ekkor világosak a következők:

$q_0 = 0$, $q_1 = (1-P)^2$ és

$q_2 =$	$(1-P)^2$	+	$2P(1-P)q_1$	+	$P^2q_1^2$
0. és 1. szint között:	0 nyitott él		1 nyitott él		2 nyitott él.

Nyilvánvaló, hogy hasonló összefüggés van bármely két szomszédos szint között, így

$q_3 = (1-P)^2 + 2P(1-P)q_2 + P^2q_2^2$

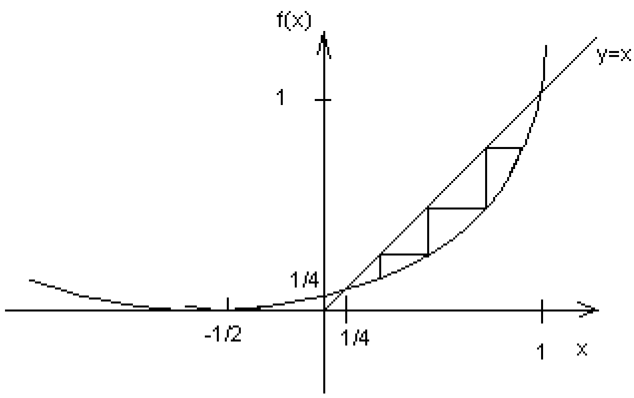
és általában, bevezetve az

$f(x) = (1-P)^2 + 2P(1-P)x + P^2x^2$

jelölést $q_{k+1} = f(q_k)$.

Ez egy iteráció, amelynek fixpontja kielégíti az $x = f(x)$ egyenletet. (Megjegyezzük, hogy a mi függvényünk, vagyis bináris fa esetén a függvény másodfokú, az egyik fixpont $x = 1$ és a másik a gyökök és együtthatók közötti összefüggésből azonnal számolható. De az általános esetben, tehát ha más perkolációról van szó, akkor már nincs ilyen könnyű dolgunk. Ezért bemutatjuk azt az eljárás, ami általánosabban is megy.)

Ábrázoljuk az $x-y$ koordinátarendszerben az $y = f(x)$ függvényt. (Alább látható P = 2/3 esetén.)



Jelölje q az $f(x) = x$ egyenlet legkisebb megoldását a [0,1]-en. A képből úgy tűnik, hogy ha $k\to\infty$, akkor $q_k \to q$, azaz $\lim q_k = q$. Ha ez igaz, akkor annak a valószínűsége, hogy van olyan szint, ahova nem jutunk el: $q = 1 - \mathbf{P}(A_P)$.

A függvény így néz ki, hiszen
- f konvex,
- $f(0) = (1 - P)^2 > 0$ ($0 < P < 1$-re),
- $f(1) = 1$.

Tekintsük most az f függvény deriváltját:

$f'(x) = 2P(1 - P) + 2P^2x$,

és $f'(1) = 2P(1 - P) + 2P^2 = 2P = \mathbf{E}(Z_1)$, vagyis $P \leq 1/2$ esetén $f'(1) \leq 1$. Ez azt jelenti, hogy az $y = x$ egyenes először az $(1|1)$ pontban metszi a görbét, azaz $q = 1$. Ha tehát $2P \leq 1$, $P \leq 1/2$, akkor 1 valószínűséggel nincs origóból induló ∞ fürt.

Ha viszont $2P > 1$, akkor az $(1|1)$ pont előtt is van metszéspont, tehát $q < 1$. Ez azt jelenti, hogy pozitív valószínüséggel van origóból induló végtelen fürt.

Megmutatjuk, hogy utóbbi esetben, tehát ha $P > 1/2$, akkor 1 valószínüséggel van a perkolációban végtelen fürt.

Bizonyítás:

Vizsgáljuk annak az esélyét, hogy a k. szinten van egy végtelen fürt legmélyebb csúcsa. A fentiek alapján ez a fürt pozitív q valószínűséggel a 0. szintről indul, azaz $1 - q$ valószínűséggel a 0. szintről nem indul végtelen fürt. Jelöljük t_k-val annak valószínűségét, hogy az első k szintről, azaz a 0.,1., …, $k - 1$. szintről nem indul ilyen fürt. Ezek szerint $t_1 = 1 - q$ valószínűséggel nem indul végtelen fürt a 0. szintről. De ezen belül legalább q valószínűséggel indul az 1. szintről, hiszen az 1. szinten ketté vágva a fát 2 az eredeti bináris fával megegyező fát kapunk. Általában is igaz, hogy legalább qt_k valószínüséggel indul végtelen fürt a k. emeletről, hiszen az első szinteket elhagyva véges sok, az eredeti bináris fával megegyező fát kapunk, s már ezek egyikén is q valószínűséggel indul végtelen fürt a 0. szintről. Tehát $t_{k+1} \leq t_k - qt_k = (1 - q)t_k$. Mivel $t_1 = 1 - q$, ezért azt kapjuk, hogy $t_k \leq (1 - q)^k$.
Annak a valószínűsége tehát, hogy nem indul végtelen fürt az első k szintről kisebb mint $(1 - q)^n$, és ha $q > 0$, akkor $n \to \infty$, $\lim (1 - x)^n = 0$, ez pedig éppen azt jelenti, hogy 0 valószínűséggel nincs a perkolációban végtelen fürt.

Mi történik a „3 felé ágazó fán”? Mi történik a síkon? Mi történik végtelen négyzetrácson?

Tekintsük például az $n \times 2n$-es négyzetrácsot, és legyen $V_{n,2n}$ az az esemény, hogy átjuthatunk az egyik n hosszú oldalról a másik n hosszú oldalra.
Kérdés: Ha ismeretünk van a perkolációról nx2n-es rács esetén, nyújt-e ez számunkra információt például a $2n \times 4n$-es négyzetrácsra?

Sejtés: $V_{n,2n} \approx V_{2n,4n}$, ha $P \to 1/2$ és $n \to \infty$. Vagyis ha elég nagy a téglalap alakú rács, akkor minden hasonló alakú rácsra a valószínűség körülbelül ugyanakkora. Ezt még nem sikerült bizonyítani.

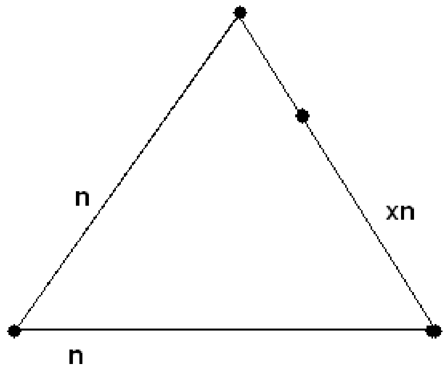
Tétel: Minden q-ra létezik olyan c_{1q} és c_{2q} konstans, hogy az $n \times qn$-es téglalapban legalább c_{1q}, de maximum c_{2q} eséllyel lehet az egyik oldalról a másikra át menni, ha $P = 1/2$.

A perkolációelmélet nemcsak ilyen négyzetrács-modelleket, hanem például hatszögrács modelleket is vizsgál.Itt a hatszögeket színezzük feketére vagy fehérre.

Ebben az esetben a fent említett esélyről ismert, hogy létezik limesze, ha n tart a végtelenhez.
Mindkét esetben azt tapasztalható, hogy az átjutás esélye a P valószínűségtől és az alapgráf alakjától függ, nem a nagyságától.

Fizikusok sejtik, hogy ez az esély q-nak valamyilyen bonyolult polinomiális függvénye.

Most tekintsünk egy másik alapgráfot, a téglalaphoz hasonlóan egy négyszöget:



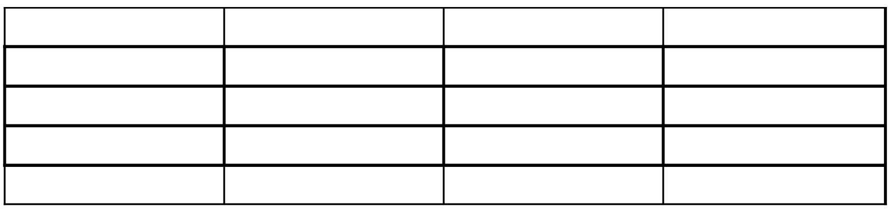
$P = \frac{1}{2}$

A négyszöget egy n oldalú szabályos háromszögből kaptuk. x 1-nél nem nagyobb nem negatív szám. Megkérdezzük a négyszög két szemközti oldala, az xn hosszúságú oldal és a vele szemközti oldal közti összeköttetés valószínűségét.
Sejtés: Ez a valószínűség x-hez tart. (Nem pontosan definiált az út a háromszögben, különböző módokon is lehet azt definiálni. Négyzetráccsal alkalmasan ki lehet bélelni.) Ez általában nincs bizonyítva.

Cardy sejtése, hogy ha a háromszöget hatszögráccsal „béleljük ki” és a hatszögek vagy nyíltak vagy zártak, akkor ez az esély, nagyjából x, ha $n \to \infty$. Szmirnov bizonyította 2000-ben, amiért Fields-érmet kapott.

Tétel: Egy n x (n + 1)-es négyzetrács esetén, ha $P = \frac{1}{2}$, ez az esély tart az $\frac{1}{2}$-hez.

Bizonyítás: Képzeljünk el egy házat, ebben a házban a gráf élei a falak, a falak között szobák vannak:



A kivastagított rész az eredeti 4x5-ös négyzetrács. Ezek a falak magukba foglalnak 8 szobát, az ábrán látható módon kiegészítjük még 4-4 szobával. A falakban az egér mozog, a szobákban a macska. Két eset lehetséges. Vagy az egér a kivastagított részen a falak elhagyása nélkül át tud menni a bal oldalról a jobb oldalra, vagy a macska a fenti 4 szobából az alsó négy szobába, fal keresztezése nélkül. Ezek közül pontosan egy teljesül.
A következő dolog, amit észre kell vennünk, hogy itt van egy rejtett szimmetria. Van a világnak egy olyan transzformációja, ami az egeret macskába, a macskát egérbe viszi. Kössük össze a szomszédos szobák közepét egymással! A macska akkor juthat le fentről az alsó négy szobába, ha a kapott ábrán az egér lejuthat a „behúzott falakon

keresztül", az eredeti gráf duálisában. Ezzel a lépéssel az eredeti ábra kilencven fokos elforgatottját kapjuk. E szimmetria azt mutatja, hogy a két esély egyenlő nagyságú (hiszen $P = \frac{1}{2}$ és így duálisban is $\frac{1}{2}$ eséllyel lesz egy él nyitott). Másrészt az első megállapítás miatt összegük egy, így mindkét esély $\frac{1}{2}$.