

**„Vegyük észre...” feladatok megoldása „észrevétlenül”**

Az 50. Rátz László Vándorgyűlésen (Kecskemét) dr. Csorba Ferenc (Győr) nagyon élvezetes előadást tartott a Kvant feladataiból. Az előadására főképpen algebrai feladatokat válogatott. Ott az egyik feladat kapcsán háromszor is elhangzott a „vegyük észre...” kezdetű mondat. Elmondása szerint ennek a feladatnak a Kvant-ban sem jelent meg más megoldása.

Az említett feladat egy sorozat  $n$ -edik elemének zárt alakban való megadása volt. A vándorgyűlésem megbeszélte sorozatok a következők (az eredeti sorozatok képzési szabályát kicsit megváltoztattam a magyar jelöléseknek megfelelően, de ez a változtatás nem érinti a lényegét):

$$1. \text{ feladat} \quad a_n = \frac{n-1}{n}(a_{n-1} + 1) \quad n \geq 2 \quad \text{és} \quad a_1 = 0$$

$$2. \text{ feladat} \quad a_n = \frac{n(n-1)}{(n+2)(n+1)}(a_{n-1} + 1) \quad n \geq 2 \quad \text{és} \quad a_1 = 0$$

$$3. \text{ feladat} \quad a_n = \frac{(n+1)n(n-1)}{(n+4)(n+3)(n+2)}(a_{n-1} + 1) \quad n \geq 2 \quad \text{és} \quad a_1 = 0$$

Mindhárom esetben a megoldás menete az elemek kiszámolása volt egy darabig, majd a „vegyük észre, hogy ezek az elemek teljesítik a következő összefüggést...” és végül teljes indukciós befejezés következett. Minden feladatot elkezdünk most is így megoldani, majd befejezzük más módon.

**1. feladat megoldása**

Számítsuk ki sorban az elemeket:

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + 1) = \frac{1}{2}(0 + 1) = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{2}{3}(a_2 + 1) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1 = \frac{2}{2}$$

$$a_4 = \frac{3}{4}(a_3 + 1) = \frac{3}{4}(1 + 1) = \frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{3}{2}$$

Kialakul az a sejtés, hogy

$$a_n = \frac{n-1}{2}$$

Ez az összefüggés még megsejthető, de most oldjuk meg sejtések nélkül!

Rendezzük át a sorozat képzési szabályát a következő módon:

$$a_n = \frac{n-1}{n}(a_{n-1} + 1)$$

$$na_n = (n-1)a_{n-1} + (n-1)$$

Írjuk fel a sorozat előző elemeit is ezen a módon:

$$\begin{aligned}na_n &= (n-1)a_{n-1} + (n-1) \\(n-1)a_{n-1} &= (n-2)a_{n-2} + (n-2) \\(n-2)a_{n-2} &= (n-3)a_{n-3} + (n-3) \\&\dots \\3a_3 &= 2a_2 + 2 \\2a_2 &= a_1 + 1\end{aligned}$$

Adjuk össze az egyenleteket. Vegyük figyelembe, hogy vannak megegyező tagok a két oldalon:

$$\begin{aligned}na_n + (n-1)a_{n-1} + \dots + 2a_2 &= (n-1)a_{n-1} + \dots + 2a_2 + a_1 + (n-1) + (n-2) + \dots + 1 \\na_n &= a_1 + [1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)]\end{aligned}$$

azaz

$$na_n = a_1 + [1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)] = a_1 + \frac{n(n-1)}{2}$$

mivel a sorozat első eleme  $a_1 = 0$ , ezért

$$\begin{aligned}na_n &= \frac{n(n-1)}{2} \\a_n &= \frac{n-1}{2}\end{aligned}$$

És ezt szerettük volna bizonyítani.

## 2. feladat megoldása

Számítsuk ki sorban az elemeket:

$$\begin{aligned}a_1 &= 0 \\a_2 &= \frac{2 \cdot 1}{4 \cdot 3}(a_1 + 1) = \frac{2}{12}(0 + 1) = \frac{1}{6} \\a_3 &= \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 4}(a_2 + 1) = \frac{6}{20}\left(\frac{1}{6} + 1\right) = \frac{6}{20} \cdot \frac{7}{6} = \frac{7}{20} \\a_4 &= \frac{4 \cdot 3}{6 \cdot 5}(a_3 + 1) = \frac{12}{30}\left(\frac{7}{20} + 1\right) = \frac{2}{5} \cdot \frac{27}{20} = \frac{27}{50}\end{aligned}$$

Kialakul az a sejtés, hogy

$$a_n = \frac{(n-1)(2n+1)}{10(n+1)}$$

Itt már vannak kételyeim azzal kapcsolatban, hogy hogyan lehet ezt észrevenni. Oldjuk meg sejtések nélkül a feladatot!

Rendezzük át a sorozat képzési szabályát a következő módon:

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{n(n-1)}{(n+2)(n+1)}(a_{n-1} + 1) \\(n+2)(n+1)a_n &= n(n-1)a_{n-1} + n(n-1)\end{aligned}$$

Szorozzuk végig mind a két oldalt  $(n+1)n$ -nel, ami nyilván nem nulla. Azért ezt a kifejezést választottuk, hogy a rekurziós összefüggésünkben az index léptetése után egyforma együtthatók jöjjenek létre a két oldalon.

$$(n+2)(n+1)^2 na_n = (n+1)n^2(n-1)a_{n-1} + n^2(n^2-1)$$

A jobb oldal második tagját kifejtve

$$(n+2)(n+1)^2 na_n = (n+1)n^2(n-1)a_{n-1} + n^4 - n^2$$

Írjuk fel a sorozat előző elemeit is ezen a módon:

$$(n+2)(n+1)^2 na_n = (n+1)n^2(n-1)a_{n-1} + n^4 - n^2$$

$$(n+1)n^2(n-1)a_{n-1} = n(n-1)^2(n-2)a_{n-2} + (n-1)^4 - (n-1)^2$$

$$n(n-1)^2(n-2)a_{n-2} = (n-1)(n-2)^2(n-3)a_{n-3} + (n-2)^4 - (n-2)^2$$

.....

$$5 \cdot 4^2 \cdot 3a_3 = 4 \cdot 3^2 \cdot 2a_2 + 3^4 - 3^2$$

$$4 \cdot 3^2 \cdot 2a_2 = 3 \cdot 2^2 \cdot 1a_1 + 2^4 - 2^2$$

Adjuk össze az egyenleteket. Vegyük figyelembe, hogy vannak megegyező tagok a két oldalon:

$$(n+2)(n+1)^2 na_n = 12a_1 + \sum_{i=2}^n i^4 - \sum_{i=2}^n i^2 = 12a_1 + \sum_{i=1}^n i^4 - \sum_{i=1}^n i^2$$

azaz

$$\begin{aligned} (n+2)(n+1)^2 na_n &= 12a_1 + \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \\ &= 12a_1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \left[ \frac{3n^2+3n-1}{5} - 1 \right] = 12a_1 + \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-6)}{30} = \\ &= 12a_1 + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(2n+1)}{10} \end{aligned}$$

mivel a sorozat első eleme  $a_1 = 0$ , ezért

$$\begin{aligned} (n+2)(n+1)^2 na_n &= \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(2n+1)}{10} \\ a_n &= \frac{(n-1)(2n+1)}{10(n+1)} \end{aligned}$$

És ezt szeretnénk volna bizonyítani.

### 3. feladat megoldása

Számítsuk ki sorban az elemeket:

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4} (a_1 + 1) = \frac{1}{20} (0 + 1) = \frac{1}{20}$$

$$a_3 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{7 \cdot 6 \cdot 5} (a_2 + 1) = \frac{4}{35} \left( \frac{1}{20} + 1 \right) = \frac{4}{35} \cdot \frac{21}{20} = \frac{3}{25}$$

$$a_4 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{8 \cdot 7 \cdot 6} (a_3 + 1) = \frac{5}{28} \left( \frac{3}{25} + 1 \right) = \frac{5}{28} \cdot \frac{28}{25} = \frac{1}{5}$$

Kialakul az a sejtés, hogy

$$a_n = \frac{(n-1)n}{10(n+2)}$$

Itt is vannak kételyeim azzal kapcsolatban, hogy hogyan lehet ezt észrevenni. Oldjuk meg sejtések nélkül a feladatot!

Rendezzük át a sorozat képzési szabályát a következő módon:

$$a_n = \frac{(n+1)n(n-1)}{(n+4)(n+3)(n+2)}(a_{n-1} + 1)$$

$$(n+4)(n+3)(n+2)a_n = (n+1)n(n-1)a_{n-1} + (n+1)n(n-1)$$

Szorozzuk végig mind a két oldalt  $(n+3)(n+2)^2(n+1)^2n$ -nel, ami nyilván nem nulla. Azért ezt a kifejezést választottuk, hogy a rekurziós összefüggésünkben az index léptetése után egyforma együtthatók jöjjenek létre a két oldalon

$$(n+4)(n+3)^2(n+2)^3(n+1)^2na_n =$$

$$= (n+3)(n+2)^2(n+1)^3n^2(n-1)a_{n-1} + (n+3)(n+2)^2(n+1)^3n^2(n-1)$$

A jobb oldal második tagját kifejtve

$$(n+4)(n+3)^2(n+2)^3(n+1)^2na_n =$$

$$= (n+3)(n+2)^2(n+1)^3n^2(n-1)a_{n-1} +$$

$$+n^9 + 9n^8 + 30n^7 + 42n^6 + 9n^5 - 39n^4 - 40n^3 - 12n^2$$

Írjuk fel a sorozat előző elemeit is ezen a módon:

$$(n+4)(n+3)^2(n+2)^3(n+1)^2na_n =$$

$$= (n+3)(n+2)^2(n+1)^3n^2(n-1)a_{n-1} +$$

$$+n^9 + 9n^8 + 30n^7 + 42n^6 + 9n^5 - 39n^4 - 40n^3 - 12n^2$$

$$(n+3)(n+2)^2(n+1)^3n^2(n-1)a_{n-1} =$$

$$= (n+2)(n+1)^2n^3(n-1)^2(n-2)a_{n-2} +$$

$$+(n-1)^9 + 9(n-1)^8 + 30(n-1)^7 + 42(n-1)^6 + 9(n-1)^5 - 39(n-1)^4 - 40(n-1)^3 - 12(n-1)^2$$

.....

$$7 \cdot 6^2 \cdot 5^3 \cdot 4^2 \cdot 3a_3 = 6 \cdot 5^2 \cdot 4^3 \cdot 3^2 \cdot 2a_2 + 3^9 + 9 \cdot 3^8 + 30 \cdot 3^7 + 42 \cdot 3^6 + 9 \cdot 3^5 - 39 \cdot 3^4 - 40 \cdot 3^3 - 12 \cdot 3^2$$

$$6 \cdot 5^2 \cdot 4^3 \cdot 3^2 \cdot 2a_2 = 5 \cdot 4^2 \cdot 3^3 \cdot 2^2 \cdot 1a_1 + 2^9 + 9 \cdot 2^8 + 30 \cdot 2^7 + 42 \cdot 2^6 + 9 \cdot 2^5 - 39 \cdot 2^4 - 40 \cdot 2^3 - 12 \cdot 2^2$$

Adjuk össze az egyenleteket. Vegyük figyelembe, hogy vannak megegyező tagok a két oldalon:

$$(n+4)(n+3)^2(n+2)^3(n+1)^2na_n = 8640a_1 +$$

$$\sum_{i=2}^n i^9 + 9 \sum_{i=2}^n i^8 + 30 \sum_{i=2}^n i^7 + 42 \sum_{i=2}^n i^6 + 9 \sum_{i=2}^n i^5 - 39 \sum_{i=2}^n i^4 - 40 \sum_{i=2}^n i^3 - 12 \sum_{i=2}^n i^2$$

A részletekkel nem untatva az olvasót kapjuk, hogy:

$$(n+4)(n+3)^2(n+2)^3(n+1)^2na_n = 8640a_1 + \frac{(n-1)n^2(n+1)^2(n+2)^2(n+3)^2(n+4)}{10}$$

mivel a sorozat első eleme  $a_1 = 0$ , ezért

$$(n+4)(n+3)^2(n+2)^3(n+1)^2na_n = \frac{(n-1)n^2(n+1)^2(n+2)^2(n+3)^2(n+4)}{10}$$

$$(n+2)a_n = \frac{(n-1)n}{10}$$

$$a_n = \frac{(n-1)n}{10(n+2)}$$

És ezt szerettük volna bizonyítani.

A nyár folyamán ismét kezembe került Dr. Lajkó Károly a 49. Rátz László Vándorgyűlésen (Debrecen) elhangzott előadásán készített jegyzetem és ott is láttam hasonló feladatok megoldását. A feladat a debreceni egyetemen kiadott jegyzetben is megtalálható. Ebből a jegyzetből származnak a következő feladatok, melyek közül a 49. RLV-n is elhangzott a 4. feladat és itt is így oldották meg a feladatokat:

$$4. \text{ feladat} \quad a_n + a_{n-1} = (n-1)^2 \quad \text{és} \quad a_{20} = 94$$

$$5. \text{ feladat} \quad a_n = \left(1 - \frac{1}{n-1}\right)^2 a_{n-1} + \frac{1}{n-1} \quad n \geq 2 \quad a_1 = A$$

$$6. \text{ feladat} \quad a_n = 1 - \frac{n-1}{n} a_{n-1} \quad n \geq 2 \quad a_1 = 1$$

$$7. \text{ feladat} \quad a_n = -\frac{1}{n} a_{n-1} + \frac{n-2}{n-1} a_{n-2} \quad n \geq 3 \quad a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}$$

#### 4. feladat megoldása

Számítsunk ki elemeket, használjuk a képzési szabályt:

$$a_2 + a_1 = 1^2 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 1 - a_1$$

$$a_3 + a_2 = 2^2 \quad \Rightarrow \quad a_3 = 4 - a_2 = 4 - (1 - a_1) = 3 + a_1$$

$$a_4 + a_3 = 3^2 \quad \Rightarrow \quad a_4 = 9 - a_3 = 9 - (3 + a_1) = 6 - a_1$$

$$a_5 + a_4 = 4^2 \quad \Rightarrow \quad a_5 = 16 - a_4 = 16 - (6 - a_1) = 10 + a_1$$

Vegyük észre, hogy az elemek megadásakor megjelenő számok „szépek”, azaz

$$1 = 1$$

$$3 = 1 + 2$$

$$6 = 1 + 2 + 3$$

$$10 = 1 + 2 + 3 + 4$$

Sejtés, hogy a sorozat  $n$ . elemét ki lehet számítani a következő módon:

$$a_n = (-1)^{n+1} a_1 + (1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)) = (-1)^{n+1} a_1 + \frac{(n-1)n}{2}$$

Ez az összefüggés még megsejthető, de most oldjuk meg sejtések nélkül!

Írjuk fel a sorozat képzési szabályát egymás után következő két elemre:

$$a_n + a_{n-1} = (n-1)^2 \quad n \geq 3$$

$$a_{n-1} + a_{n-2} = (n-2)^2$$

Vonjuk ki az első egyenletből a másodikat és rendezzük

$$a_n - a_{n-2} = (n-1)^2 - (n-2)^2 = 2n - 3$$

$$a_n = a_{n-2} + 2(n-2) + 1$$

Írjuk fel ezt az összefüggést egymás után kettesével következő elemekre:

$$a_n = a_{n-2} + 2(n-2) + 1$$

$$a_{n-2} = a_{n-4} + 2(n-4) + 1$$

$$a_{n-4} = a_{n-6} + 2(n-6) + 1$$

....

Adjuk össze az egyenleteket. Vegyük figyelembe, hogy vannak megegyező tagok a két oldalon:

$$a_n = a_x + 2[(n-2) + (n-4) + (n-6) + \dots] + (1+1+1+\dots)$$

ahol  $x$  értéke 1 vagy 2 aszerint, hogy  $n$  páros vagy páratlan szám-e.

Legyen  $n = 2k$  alakú, ekkor

$$\begin{aligned} a_n &= a_{2k} = a_2 + 2[(2k-2) + (2k-4) + (2k-6) + \dots + 2] + (1+1+1+\dots) = \\ &= a_2 + 4[(k-1) + (k-2) + (k-3) + \dots + 1] + (k-1) = a_2 + 4 \frac{k(k-1)}{2} + (k-1) = \\ &= a_2 + 2k(k-1) + (k-1) = 1 - a_1 + 2k^2 - 2k + k - 1 = -a_1 + 2k^2 - k = \\ &= -a_1 + \frac{4k^2 - 2k}{2} = -a_1 + \frac{n^2 - n}{2} = -a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

Legyen  $n = 2k+1$  alakú, ekkor

$$\begin{aligned} a_n &= a_{2k+1} = a_1 + 2[(2k-1) + (2k-3) + (2k-5) + \dots + 1] + (1+1+1+\dots) = \\ &= a_1 + 4[k + (k-1) + \dots + 1] - k = a_1 + 4 \frac{k(k+1)}{2} - k = \\ &= a_1 + 2k(k+1) - k = a_1 + 2k^2 + k = a_1 + \frac{4k^2 + 2k}{2} = a_1 + \frac{(2k+1)2k}{2} = a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

Kaptuk tehát, hogy

$$a_n = \begin{cases} -a_1 + \frac{n(n-1)}{2} & n = 2k \\ a_1 + \frac{n(n-1)}{2} & n = 2k+1 \end{cases}$$

Összefoglalva a paritás szerint kapott végeredményeket

$$a_n = (-1)^{n+1} a_1 + \frac{n(n-1)}{2}$$

És ezt szeretnénk volna bizonyítani.

Most már könnyen meg tudjuk határozni az első elemet, felhasználva a megadott adatot:

$$a_{20} = 94 = (-1)^{21} a_1 + \frac{20(20-1)}{2} = -a_1 + 190 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 96$$

Tehát a keresett sorozat

$$a_n = (-1)^{n+1} \cdot 96 + \frac{n(n-1)}{2}$$

## 5. feladat megoldása

Számítsunk ki elemeket, használjuk a képzési szabályt:

$$a_2 = \left(1 - \frac{1}{1}\right)^2 A + \frac{1}{1} = 1 \quad \text{Ez a kezdőértéktől független érték!}$$

$$a_3 = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$a_4 = \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{3} = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$a_5 = \left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{9}{16} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$$

Kialakul az a sejtés, hogy

$$a_n = \frac{n}{2(n-1)} \quad n \geq 2$$

Ez az összefüggés könnyen megsejthető. De oldjuk meg sejtés nélkül.

Rendezzük át a sorozat képzési szabályát a következő módon:

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n-1}\right)^2 a_{n-1} + \frac{1}{n-1} \quad n \geq 2$$

$$a_n = \frac{(n-2)^2}{(n-1)^2} a_{n-1} + \frac{1}{n-1}$$

$$(n-1)^2 a_n = (n-2)^2 a_{n-1} + (n-1)$$

Írjuk fel a sorozat előző elemeit is ezen a módon:

$$(n-1)^2 a_n = (n-2)^2 a_{n-1} + (n-1)$$

$$(n-2)^2 a_{n-1} = (n-3)^2 a_{n-2} + (n-2)$$

...

$$2^2 a_3 = 1^2 a_2 + 2$$

$$1^2 a_2 = 0^2 a_1 + 1$$

Adjuk össze az egyenleteket. Vegyük figyelembe, hogy vannak megegyező tagok a két oldalon:

$$(n-1)^2 a_n = 0^2 a_1 + (1 + 2 + 3 + \dots + (n-1))$$

$$(n-1)^2 a_n = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$a_n = \frac{n}{2(n-1)}$$

És ezt szeretnénk volna bizonyítani.

## 6. feladat megoldása

Számítsunk ki elemeket, használjuk a képzési szabályt:

$$a_2 = 1 - \frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = 1 - \frac{2}{3}a_2 = 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

$$a_4 = 1 - \frac{3}{4} \cdot a_3 = 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$

$$a_5 = 1 - \frac{4}{5} \cdot a_4 = 1 - \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{5}$$

Kialakul az a sejtés, hogy

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n = 2k \\ \frac{n+1}{2n}, & n = 2k+1 \end{cases}$$

Ez az összefüggés könnyen megsejthető. Oldjuk meg sejtések nélkül a feladatot!

Rendezzük át a sorozat képzési szabályát a következő módon:

$$a_n = 1 - \frac{n-1}{n}a_{n-1} \quad n \geq 2$$

$$na_n = n - (n-1)a_{n-1}$$

$$na_n + (n-1)a_{n-1} = n$$

Írjuk fel ezt az összefüggést egymás után következő 2 elemre:

$$na_n + (n-1)a_{n-1} = n$$

$$(n-1)a_{n-1} + (n-2)a_{n-2} = n-1$$

Majd vonjuk ki egymásból ezt a két sort

$$na_n - (n-2)a_{n-2} = 1$$

$$na_n = (n-2)a_{n-2} + 1$$

A kapott összefüggést írjuk fel minden második elemre

$$na_n = (n-2)a_{n-2} + 1$$

$$(n-2)a_{n-2} = (n-4)a_{n-4} + 1$$

...

$$(i+2)a_{i+2} = ia_i + 1 \quad i \in \{1;2\}$$

Adjuk össze az egyenleteket. Vegyük figyelembe, hogy vannak megegyező tagok a két oldalon:

$$na_n = \begin{cases} 2a_2 + \frac{n-2}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{n-2}{2} = \frac{n}{2} & n = 2k \\ a_1 + \frac{n-3}{2} = 1 + \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2} & n = 2k+1 \end{cases}$$

azaz

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & n = 2k \\ \frac{n+1}{2n} & n = 2k+1 \end{cases}$$

És ezt szerettük volna bizonyítani.



7. feladat megoldása

$$a_n = -\frac{1}{n}a_{n-1} + \frac{n-2}{n-1}a_{n-2} \quad n \geq 3 \quad a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}$$

Számítsunk ki elemeket, használjuk a képzési szabályt:

$$a_3 = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$a_4 = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{12} + \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

$$a_5 = -\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{20} + \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$$

Kialakul az a sejtés, hogy

$$a_n = \frac{1}{n}$$

Ez az összefüggés könnyen megsejthető. Oldjuk meg sejtések nélkül a feladatot!

Rendezzük át a sorozat képzési szabályát a következő módon:

$$a_n = -\frac{1}{n}a_{n-1} + \frac{n-2}{n-1}a_{n-2} \quad / \cdot n(n-1) \neq 0$$

$$n(n-1)a_n = -(n-1)a_{n-1} + n(n-2)a_{n-2}$$

Vezessünk be egy új sorozatot a következő módon:

$$b_n = na_n$$

$$b_1 = 1 \cdot a_1 = 1$$

$$b_2 = 2 \cdot a_2 = 1$$

Ekkor erre a sorozatra

$$(n-1)[na_n] = -[(n-1)a_{n-1}] + n[(n-2)a_{n-2}]$$

$$(n-1)b_n = -b_{n-1} + nb_{n-2}$$

Alakítsuk most ezt egy kicsit:

$$(n-1)b_n = -b_{n-1} + nb_{n-2}$$

$$(n-1)b_n = (n-1)b_{n-1} - nb_{n-1} + nb_{n-2}$$

$$(n-1)b_n - (n-1)b_{n-1} = -nb_{n-1} + nb_{n-2}$$

$$(n-1)(b_n - b_{n-1}) = -n(b_{n-1} - b_{n-2})$$

Ha  $b_{n-1} = b_{n-2}$ , akkor az utolsó alakból következik, hogy

$$(n-1)(b_n - b_{n-1}) = -n(b_{n-1} - b_{n-2}) = 0$$

Azaz  $b_n = b_{n-1}$  és innentől már a további elemekre  $b_i = b_{n-1}$ ,  $\forall i > n-1$ .

Esetünkben a sorozat első két eleme megegyezik, ezért minden elem megegyezik az első elemmel, tehát

$$b_n = 1 = na_n$$

$$a_n = \frac{1}{n}$$

És ezt szerettük volna bizonyítani.

Összefoglalva

Az említett feladatok zárt alakja az elemek felírásával és kiszámításával hol könnyebben, hol nehezebben megsejthető, majd a teljes indukció felhasználásával megoldhatók. Arra szerettem volna példát mutatni, hogy lehet másképpen is, mert nem minden esetben jön az ötlet, hogy milyen számokat is látok az elemek kiszámítása után. Segíthet a sorozat átrendezése oly módon, hogy a rekurziós összefüggés azonos együtthatókat eredményezzen az index léptetése után, ami lehetővé teszi a tagok eltüntetését, majd a zárt összefüggés megtalálását.

Természetesen ez sem csodamódszer és helyenként borzalmas (helyenként brutális) algebrai átalakítások elvégzését teszi szükségessé, mint itt a 3. feladat kapcsán látható is volt, ahol 10-ed fokú kifejezést kell szorzattá alakítani. Ám lehet, hogy a végeredménynek a 3. feladatban kapott

$$a_n = \frac{(n-1)n}{10(n+2)}$$

kifejezés helyett az egyszerűsítés elvégzése nélkül kapott

$$a_n = \frac{n^{10} + 15n^9 + 90n^8 + 270n^7 + 393n^6 + 135n^5 - 340n^4 - 420n^3 - 144n^2}{10(n+4)(n+3)^2(n+2)^3(n+1)^2n}$$

kifejezés is elfogható végeredménynek?

A feladatok megoldása során használt összefüggések

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n^2 + 3n^2 + n}{6}$$

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{2} = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4}$$

$$\sum_{i=1}^n i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} = \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30}$$

$$\sum_{i=1}^n i^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12} = \frac{2n^6 + 6n^5 + 5n^3 - n^2}{12}$$

$$\sum_{i=1}^n i^6 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)}{42} = \frac{6n^7 + 21n^6 + 21n^5 - 7n^3 + n}{42}$$

$$\sum_{i=1}^n i^7 = \frac{n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)}{24} = \frac{3n^8 + 12n^7 + 14n^6 - 7n^4 + 2n^2}{24}$$

$$\sum_{i=1}^n i^8 = \frac{n(n+1)(2n+1)(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3)}{90} = \frac{10n^9 + 45n^8 + 60n^7 - 42n^5 + 20n^3 - 3n}{90}$$

$$\sum_{i=1}^n i^9 = \frac{n^2(n+1)^2(n^2+n-1)(2n^4+4n^3-n^2-3n+3)}{20} = \frac{2n^{10} + 10n^9 + 15n^8 - 14n^6 + 10n^4 - 3n^2}{20}$$

Feladatok forrásai:

Matematikatanárok 50. Rácz László Vándorgyűlése, Bolyai János Matematikai Társulat, 2010 kiadványban található a következő feladatok, dr. Csorba Ferenc: Válogatás a Kvant feladataiból:

1. feladat: 6. oldal, 9/a feladat
2. feladat: 6. oldal, 9/b feladat
3. feladat: 6. oldal, 9/c feladat

A következő feladatok Dr. Lajkó Károly: Függvényegyenletek feladatokban DE Mat. Intézet Debrecen 2005 kiadványából származnak

4. feladat: 14. oldal, 1. feladat (AIME – 1994)
5. feladat: 15. oldal, 3. feladat
6. feladat: 16. oldal, 4. feladat
7. feladat: 18. oldal, 8. feladat