

Segítenek az egyszerűbb esetek
Róka Sándor, Nyíregyháza

1. feladat

Igaz-e, hogy 1111122222 két szomszédos egész szám szorzata?

Megoldás:

A feladat jó példa arra a problémahelyzetre, amikor nehezen látjuk át a megoldandó feladatot, s helyette egyszerűbb esetet vizsgálunk.

Mi az egyszerűbb eset? 12, 1122, 111222, ...

$12 = 3 \cdot 4$, $1122 = 33 \cdot 34$, $111222 = 333 \cdot 334$, innen már sejthető a válasz, a megoldás:

$1111122222 = 33333 \cdot 33334$.

Ezt könnyű ellenőrizni írásbeli szorzással. Azonban hiába a kommutativitás, nem mindegy, hogy a $33333 \cdot 33334$, vagy a $33334 \cdot 33333$ szorzatot számítjuk.

$$\begin{array}{r} 33334 \cdot 33333 \\ 100002 \\ 100002 \\ 100002 \\ 100002 \\ 100002 \\ 100002 \\ \hline 111122222 \end{array}$$

Az írásbeli szorzás mutatja, hogy valóban helyes a szorzás, tehát 1111122222 két szomszédos egész szám szorzata.

2. feladat

Van-e olyan négyzetszám, amely számnak első 9 számjegye 123456789, utolsó 9 számjegye pedig 987654321?

Megoldás:

Nézzük az egyszerűbb eseteket! Van-e olyan négyzetszám, melynek első két számjegye 12, utolsó két számjegye 21? Tudjuk, hogy van, ilyen a $121 = 11^2$. Vajon melyik a következő eset, az a négyzetszám, amelynek első három jegye 123, utolsó három jegye 321? Ez a szám várhatóan a 12321, és valóban: $12321 = 111^2$. Nem kell nagy fantázia megsejteni a választ a feladat kérdésére: Van olyan négyzetszám, amely számnak első 9 számjegye 123456789, utolsó 9 számjegye pedig 987654321, és ez a szám a $1234567898765421 = 111111111^2$. Sejtésünket igazán könnyű ellenőrizni írásbeli szorzással, hiszen a részszorzatok mindegyike $1 \cdot 1 = 1$.

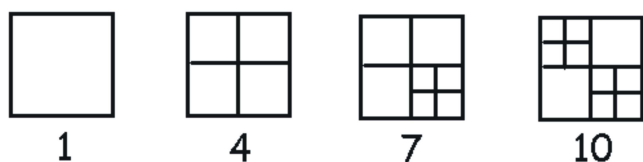
$$\begin{array}{r} 111111111 \cdot 111111111 \\ 111111111 \\ 111111111 \\ 111111111 \\ 111111111 \\ 111111111 \\ 111111111 \\ 111111111 \\ 111111111 \\ 111111111 \\ 111111111 \\ 111111111 \\ 111111111 \\ 111111111 \\ \hline 12345678987654321 \end{array}$$

3. feladat

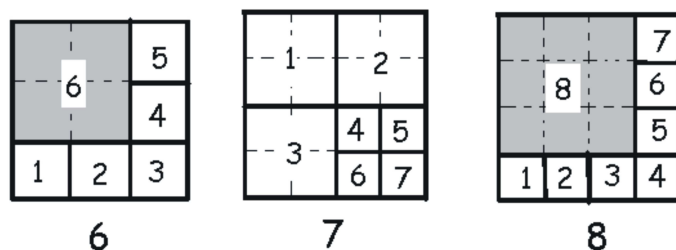
Igaz-e, hogy egy négyzet feldarabolható 2010 darab négyzetre?

Megoldás:

Nézzünk meg egyszerűbb eseteket! Egy négyzetet fel tudunk osztani 4 kisebb négyzetre. Ha a 4 négyzet valamelyikét ugyancsak felosztom 4 még kisebb négyzetre, akkor 4 újat kapok, és 1 eltűnik, mert feldaraboltam. Tehát $4 - 1 = 3$ -mal nőtt a négyzetek száma. Így folytatva 3-asával tudjuk növelni a négyzetek számát. Ily módon minden harmadik számra elvégezhető a darabolás: az 1, 4, 7, 10, 13, 16, ... számokra.



Daraboljunk fel egy négyzetet három egymás utáni számra. Az ábrák mutatják, hogyan lehet feldarabolni egy négyzetet 6, 7, 8 kisebb négyzetre.



Ahogy láttuk, ha egy feldarabolásban résztvevő valamelyik négyzetet 4 kisebbre daraboljuk, akkor a négyzetek száma 3-mal nő.

Így egy négyzetet a 6 darabról indulva feldarabolhatunk 6, 9, 12, 15, ... négyzetre.

A 8 darabról indulva feldarabolhatjuk a négyzetet 8, 11, 14, 17, ... négyzetre.

Összegezzünk! A 6, 7, 8 darabos felosztásokról indulva, hármásával lépkedve a következő számokra tudjuk elvégezni a négyzet négyzetre darabolását.

6	9	12	15	18	21	24	27	30	...
7	10	13	16	19	22	25	28	31	...
8	11	14	17	20	23	26	29	32	...

Ezeken a listákon minden 5-nél nagyobb szám szerepel, tehát a 2010 is. Beláttuk, hogy egy négyzet feldarabolható 2010 kisebb négyzetre.

4. feladat

Egy pizzát 6 egyenes vágással legfeljebb hány részre oszthatjuk?

Megoldás:

Egy vágás 2 részre osztja a pizzát, ha minden újabb vágás kettévágná a korábbi darabok mindegyikét, akkor az egymást követő hat vágás után rendre 2, 4, 8, 16, 32, 64 darab pizza-szeletünk lenne.

A szeletek konvexek, ezért már a harmadik vágással sem tudjuk az eddigi darabok mindegyikét kettévágni.

Azonban minden új egyenes (azaz vágás) ha átmetsz egy korábbi egyenest, akkor annak a túlsó partján levő tartományt két részre vágja. Tehát minden új vágásnak olyannak kell lennie, hogy átvágja az összes korábbi egyenest. Ekkor az új vágás 1-gyel több új szeletet eredményez, mint amennyi vágás volt addig.

Vágások száma	1	2	3	4	5	6
A keletkező szeletek maximális száma	2	4	7	11	16	22

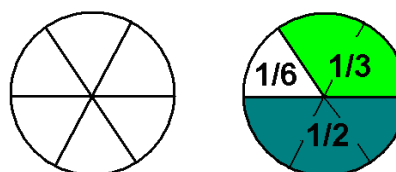
6 vágással legfeljebb 22 részre darabolhatjuk a pizzát.

5. feladat

Lehet-e 2010 különböző természetes szám reciprokának összege 1?

Megoldás:

Két különböző természetes szám reciprokának összege nem lehet 1.
Három különböző természetes szám reciprokának összege már lehet 1, gondoljunk a sajtos dobozra!



Vajon lehet-e négy különböző természetes szám reciprokának összege 1?

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1, \quad \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

azaz

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} \right) = 1.$$

Lehet-e öt különböző természetes szám reciprokának összege 1? Az előző ötlet segít.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1, \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24},$$

azaz

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = 1.$$

Látható, hogy ezt így folytatva megkapható 2010 különböző természetes szám, melyek reciprokának összege 1.

6. feladat

Hányféleképp lehet kiolvasni a KANIZSA szót a táblázatban, ha mindig szomszédos betűkre lépünk?

K	A	N	I
A	N	I	Z
N	I	Z	S
I	Z	S	A

Megoldás:

Ne egyből a végeredményre keressük a választ, hanem nézzük meg a korábbi állapotokat. Ha tudjuk, hogy hány út vezet az egyik, és a másik *S* betűig, akkor azok összege megadja, hányféle úton juthatunk az *S* betű után következő *A* betűig. A táblázat bármelyik mezőjére az előtte levő, illetve a fölötté levő mezőről juthatunk (ha van fölötté, illetve előtte mező). Beírom a táblázat mezőibe, hogy oda hány út vezet, ha a bal felső sarokból indulunk. A kitöltést is úgy tudom elvégezni, hogy a bal felső sarokból indulva írom be a mezőkbe a számokat.

1	1	1	1
1	2	3	4
1	3	6	10
1	4	10	20

A KANIZSA szó 20-féleképpen olvasható ki.

7. feladat

Hányféleképp lehet felmenni a 10. lépcsőfokra, ha egy lépésben 1 vagy 2 lépcsőfokot lépünk?

Megoldás:

Nézzük meg a korábbi lépcsőfokokat, hányféleképp lehet felmenni arra, ha egy lépésben 1 vagy 2 lépcsőfokot lépünk?

Lépcsőfokok száma	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A lépcsőfokra vezető utak száma	1	2	3	5						

Az első lépcsőfokra 1-et lépve 1-féleképp juthatunk fel.

A második lépcsőfokra vagy két 1-es lépéssel, vagy egy „hosszúlépéssel” juthatunk, azaz 2-féleképp.

A 3. lépcsőfokra vivő utak: $1+1+1=1+2=2+1=3$, tehát 3-féleképp juthatunk oda.

A 4. lépcsőre $4=1+1+1+1=1+1+2=1+2+1=2+1+1=2+2$ felbontások szerint 5-féleképp juthatunk.

Az esetek összeszámlálását ne így folytassuk, mert az egyre számolósabb. Az eddig számolt utak száma 1, 2, 3, 5. Vajon melyik szám a következő az 1, 2, 3, 5, ... sorozatban?

Felfedezhetjük a szabályt. Ha nehéz, akkor még kiszámoljuk, hogy az 5. lépcsőre 8-féleképp juthatunk, és akkor már könnyebb az 1, 2, 3, 5, 8, ... sorozatot folytatni.

Mindig az utolsó két szám összege adja a következő számot. (Fibonacci-sorozat) Ezután könnyű kitölteni a táblázatot.

Lépcsőfokok száma	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A lépcsőfokra vezető utak száma	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

Valóban helyes ez a sorozatképzési szabály az utak számlálásánál? Miért?

Az 5. lépcsőre vagy a 4. lépcsőről egy lépcsőfokot lépve jutunk fel (ez 5-féle út, mert a negyedik lépcsőre 5-féle út vezet), vagy egy hosszúlépéssel fejezzük be az utat, amikor a 3. lépcsőről lépünk fel 2 lépcsőfokot (ez 3-féle út). Másképp nem juthatunk az 5. lépcsőre, és a számításba vett 5-féle és 3-féle út egymástól különböző, emiatt az 5. lépcsőre $3+5=8$ -féle út vezet.

Bármely lépcsőre vagy az előzőről 1-et lépve, vagy az azelőttiről 2-t lépve juthatunk. Ezért az odavivő utak száma az előző két lépcsőfokra vezető utak számának összege.

Fontos tanulság: Ezt a feladatot, és a következő két feladatot is érdemes megoldani olyan úton, amikor nem számoljuk ki a korábbi esetekre a választ. Az a megoldás is érdekes, és tanulságos összehasonlítani azt itt leírt megoldásokkal, és akkor láthatjuk, hogy a rekurzió felismerése sokkal gyorsabban vezet eredményre.

8. feladat

Hányféleképp lehet lefedni egy 2×10 -es téglalapot 1×2 -es dominókkal?

Megoldás:

Hányféleképp lehet lefedni a 2×1 -es, 2×2 -es, 2×3 -as, ..., 2×10 -es téglalapot 1×2 -es dominókkal?

$2 \times n$ -es téglalap, $n =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A lefedések száma	1	2	3	5						

Könnyű megszámolni, hányféleképp tudjuk lefedni a 2×1 -es, 2×2 -es, 2×3 -as, 2×4 -es téglalapot 1×2 -es dominókkal. Sejthető, hogy a következő n -re a lefedések száma az előző két esetben kapott értékek összege. Ez valóban így van, mert például a 2×5 -ös téglalap fedései kétféleképp: vagy egy álló dominó követi a 2×4 -es téglalapot

fedését, vagy két egymáson levő fekvő dominó következik a 2×3 -as téglalap után. Tehát a 2×5 -ös téglalap fedéseinek száma annyi, mint a 2×3 -as és a 2×4 -es téglalap fedéseinek együttes száma.

$2xn$ -es téglalap, $n =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A lefedések száma	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

A 2×10 -es téglalapot 89-féleképpen lehet lefedni 1×2 -es dominókkal.

9. feladat

Hányféleképp rakhatunk sorba 10 golyót, ha piros és kék golyókból válogatunk, és piros golyók nem kerülhetnek egymás mellé?

Megoldás:

Számoljuk ki, hányféleképp rakhatunk sorba 1, 2, 3, 4, ..., 10 golyót, ha piros és kék golyókból válogatunk, és piros golyók nem kerülhetnek egymás mellé.

Golyók száma	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Sorrendek száma	2	3	5							

1 golyó esetén két lehetőség van P (piros) vagy K (kék).

2 golyó esetén a lehetőségek: PK, KP, KK.

3 golyó esetén a sorrendek: KKK, PKK, KPK, KKP, PKP.

Keressük a választ más úton 4 golyó esetén. Vagy 2 golyó után teszünk KP golyókat, vagy 3 golyó után egy K golyót. Ha az a 2, illetve 3 golyó teljesítette a feltételt, akkor azokat így 4 golyóra kiegészítve, ezek is teljesítik a feltételt. Ha 4 golyónak egy alkalmas sorrendjét nézem, az vagy kékre, vagy pirosra végződik. Ha kékre végződik, akkor azt a golyót elvéve marad 3 golyó, ha pirosra végződik, akkor előtte kék van, vegyük el a KP golyókat, és marad 2 golyó. Láthatjuk, hogy annyi megfelelő sorrendje van 4 golyónak, amennyi 2 golyónak és 3 golyónak együttesen. A hasonló szabály 4 helyett több golyóra is érvényes. Ezt használva gyorsan kitölthető a táblázat.

Golyók száma	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Sorrendek száma	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

144-féleképpen rakhatunk sorba 10 golyót, ha piros és kék golyókból válogatunk, és piros golyók nem kerülhetnek egymás mellé.

10. feladat

(*Pletykás hölgyek*) 10 idős hölgy mindegyike tud egy - egy pletykát, azonban koruk miatt nehezükre esik a személyes találkozás, csak telefonon tudnak beszélni egymással. A pletykákat szeretnék egymás között elterjeszteni, lehetőleg kevés telefonhívással. Egy beszélgetés során kicserélik a pletykákat egymás között. (Egy beszélgetés során ketten beszélgetnek egymással, nincs konferencia üzemmód.) Szervezd meg a telefonhívások sorrendjét úgy, hogy minél kevesebb hívásra kerüljön sor!

Megoldás:

Ha mindenki mindenkivel beszél, akkor mindenki ismerni fogja az összes pletykát. Ez 45 telefonhívást jelent. Ez egy pazarló eljárás.

Ha az egyik hölgy sorra felhívja a többieket, akkor ő megtudja az összes pletykát, ez 9 telefonhívás. Ezután újra visszahívja a többieket – sőt az előző körben utoljára felhívott partnert nem kell másodjára felhívni –, és akkor mindenki ismerni fogja az összes pletykát. Ez $9+8=17$ telefonhívást jelent. A 45 hívást lecsökkentettük 17-re. Vajon lehet-e ezen még javítani?

Nézzünk meg egyszerűbb esetet! 4 hölgy esetén az utóbbi eljárás $3+2=5$ telefonhívást jelent. Megoldható-e 4 hívással? Igen! A 4 hölgy *A*, *B*, *C*, *D*. A hívások: *AB* (*A* és *B* beszélget), *CD*, majd *AC* és *BD*.

Tehát 1-gyel még csökkenthető volt a hívások száma. Tudunk javítani 10 hölgy esetén is, 17 telefonhívás helyett megoldható 16 hívással is. (Kevesebbel nem lehet. Ezt nem bizonyítjuk.) Nem könnyű ezt megtalálni. Próbálkozhatunk azzal, hogyan lehet 5 hölgy esetén 6 hívással megoldani a problémát. (És 6 hölgy esetén 8; 7 hölgy esetén 10; 8 hölgy esetén 12; 9 hölgy esetén 14; 10 hölgy esetén pedig 16 hívással.) Az eljárás a következő. A hölgyek közül kijelölünk egy 4 fős „vezetőséget”. Vegyük azt az esetet, hogy 10-en vannak. A vezetőségből valaki felhívja az összes többi hölgyet, ez 6 hívás, és ekkor ő ismerni fogja annak a 6 hölgynek a pletykáit. Ezután a vezetőség a 4 főre adott algoritmus szerint 4 hívással kicseréli egymás között a

pletykákat. Ekkor a 4 hölgy mindegyike ismerni fogja mind a 10 pletykát. Most a vezetőség egyik tagja sorra felhívja a többi 6 hölgyet, így azok is ismerni fogják mind a 10 pletykát. Ez összesen $6 + 4 + 6 = 16$ telefonhívás.

11. feladat

(*Oroszlánsziget.*) Egy lakatlan szigetre kitétek 21 oroszlánt. A szigeten semmilyen élelem sincs. Ezek az oroszlánok nagyon intelligensek, és ezt mindannyian tudják is egymásról. Egy napon ledobnak nekik egy adag húst, amit nem oszthatnak el, csak egy oroszlán eheti meg az egészet. Igen ám, de a hús altatót tartalmaz, aki megeszi, elalszik, és a többiek prédájává válhat, mert egy alvó oroszlán ugyanolyan számukra, mint egy adag altató élelmiszer.

Az oroszlánok inkább éhen halnak, minthogy más megegye őket, amikor alszanak. Mit fognak csinálni az oroszlánok: megeszi valamelyik a húst vagy sem?

Megoldás:

Hogyan gondolkodik egy intelligens oroszlán? „Én csak akkor ehetem meg a húst, ha biztosan tudom, hogy utána engem nem fognak megenni. Ha egyedül lennék, egyértelmű, hogy megehetem. Ha ketten lennénk, akkor nem ehetem meg, mert a másik azonnal felfal. Tehát, ha ketten vagyunk, akkor az olyan helyzet, hogy nem esszük meg a húst. Ebből az következik, hogy ha hárman lennénk, akkor egyvalaki megeheti a húst, mert tudja, hogy utána ketten maradnak, és nem eszik meg őt. És így tovább: ha négyen vagyunk, akkor megint nem ehetjük meg a húst, mert hárman maradnak és megeszik az alvót.”

Tehát az oroszlánok számának párosságától függ, hogy megeszi-e valaki a húst, vagy nem.

12. feladat

(*Kegyetlen kalózok*) 10 kalóz 100 aranyat zsákmányolt, amit a következő módon kívánnak elosztani: a legkegyetlenebb kalóz előterjeszti, ki mennyi aranyat kapjon. Ezután szavaznak (az előterjesztő is), és ha a javaslat legalább 50%-os támogatást kap, akkor annak megfelelően osztják el az aranyakat. Titkos a szavazás, mindenki írásban adja le a voksát. Ha a javaslatot leszavazzák, akkor büntetésképpen a szerencsétlen javaslatért, vízbe dobják az előterjesztőt, és a következő legkegyetlenebb kalóz áll elő a maga javaslatával.

Tudjuk, hogy a kalózok végtelenül intelligensek, vérszomjuknál csak kapzsiségük nagyobb, továbbá nincs két egyformán kegyetlen kalóz. A kalózok előtt ismert, hogy kegyetlenségük alapján milyen a sorrend közöttük.

Hány aranyat tarthat meg a legkegyetlenebb kalóz?

Megoldás:

Ha 2 kalóz van, akkor a legkegyetlenebb kalóz javaslata: (100, 0). Ez a javaslat nyilván megkapja a legalább 50%-os támogatást.

Ha 3 kalóz van, akkor a legkegyetlenebb kalóz javaslata: (99, 0, 1). Ezzel megnyeri a harmadik kalóz jóindulatát. Ugyanis, ha a harmadik nem fogadja el ezt a javaslatot, akkor az elsőt vízbe dobják, majd a második kalóz, mint előbb láttuk (2 kalóz esetén), elviszi a teljes zsákmányt, a harmadik már nem kaphat aranyat.

Ha 4 kalóz van, akkor a legkegyetlenebb kalóz javaslata: (99, 0, 1, 0). Ekkor a harmadik kalóz megszavazza ezt a javaslatot, így hozzájut 1 aranyhoz, különben (lásd az előbbi változatot!) nem kap semmit.

5 kalóz esetén a legkegyetlenebb kalóz javaslata: (98, 0, 1, 0, 1). A harmadik és az ötödik kalóz ezt jóváhagyja, hiszen különben a következő körben nekik már semmi sem jut.

6 kalóz esetén a legkegyetlenebb kalóz javaslata: (98, 0, 1, 0, 1, 0).

7 kalóz esetén a legkegyetlenebb kalóz javaslata: (97, 0, 1, 0, 1, 0, 1).

8 kalóz esetén a legkegyetlenebb kalóz javaslata: (97, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0).

9 kalóz esetén a legkegyetlenebb kalóz javaslata: (96, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1).

Végül 10 kalóz esetén a legkegyetlenebb kalóz javaslata: (96, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0).
Érdeemes átgondolni, mi a válasz, ha a kalózok száma 200 vagy annál több; vagy mi a válasz, ha a javaslat elfogadásához 50%-nál nagyobb támogatottság (vagy mondjuk legalább 2/3-os többség) kell.

Gyakorló feladatok

1. feladat

Van-e olyan 100-oldalú sokszög, amelynek mindegyik oldalát metszi egy alkalmasan felvett egyenes?

2. feladat

Melyek azok a négyjegyű számok, amelyeket megszorozva a tükörképével (a számjegyek fordított sorrendben való felírásával), a szorzat 3 darab 0 számjegyre végződik?

3. feladat

Hányféleképp lehet felmenni a 10. lépcsőfokra, ha egy lépésben 1 vagy 3 lépcsőfokot lépünk?

4. feladat

Hányféleképp lehet felmenni a 10. lépcsőfokra, ha egy lépésben 2 vagy 3 lépcsőfokot lépünk?

5. feladat

Hányféleképp lehet egy ötszemélyes padra fiúkat és lányokat ültetni úgy, hogy lány lány mellé ne ülhessen? (Most csak arra figyelünk, hogy hol ülnek a fiúk, és hol ülnek a lányok.)

Kérdés: Hogyan módosul az ültetések száma, ha az öt gyerek egy kerek asztal körül ül?

6. feladat

Hányféleképp lehet egy ötszintes házat lefesteni, ha a szinteket kékre vagy sárgára festhetjük, és nem lehet két egymás feletti szint sárga színű?

7. feladat

Hányféleképp lehet lefedni egy 3×10 -es táblát 1×3 -as dominókkal?

8. feladat

A tanár felír egy-egy 1-est a tábla két végére. Az első diák a két 1-es közé egy 2-est ír; ezután minden következő diák az éppen táblán lévő számok közé beírja azok összegét. (Pl. a második diák után az 1, 3, 2, 3, 1 számok szerepelnek a táblán, a harmadik után 1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 1 stb.) Mennyi lesz a táblán levő számok összege, ha összesen hat diák ment ki a táblához?

9. feladat

Egy szobában 10 szék van sorban egymás mellett. A székek kezdetben üresek. Időnként valaki bejön a szobába, leül egy üres székre, és ugyanekkor egyik szomszédja (ha van) föláll és kimegy. Legfeljebb hány szék lehet foglalt ebben a szobában megfelelő idő eltelte után?