Számelméleti érdekességek

dr. Kosztolányi József, Szeged

A számelmélet bővelkedik olyan kérdésekben, problémákban, összefüggésekben, amelyek elemi módszerekkel megközelíthetők. Bizonyos szép és érdekes összefüggések a tanulókkal közösen „felfedezhetők”, a tapasztalatokból adódó sejtések pedig közösen bizonyíthatók. A tanítási tapasztalatok azt mutatják, hogy az ilyen jellegű „közös kutatás” nagyon motiváló és hatékony tehetséggondozási forma.
Az előadás során néhány ilyen „közös kutatásra” is alkalmas számelméleti problémát mutatok be.

I. Prímszámok, összetett számok, négyzetszámok és egy szép összefüggés

I.1. Két kérdés a *Goldbach-sejtéshez* kapcsolódóan

Christian Goldbach (1690-1764) egy 1742-ben Eulerhez írt levelében tapasztalatai alapján a következő ***sejtést*** fogalmazta meg:

Bármely 2-nél nagyobb páros szám előáll két prímszám összegeként.

Ez ma is a matematika egyik „legnépszerűbb” megoldatlan problémája. Némi matematikatörténeti bevezető után feltehető a diákoknak következő két kérdés:

(1) Mely pozitív páros számok állnak elő két páros összetett szám összegeként?
(2) Mely pozitív páros számok állnak elő két páratlan összetett szám összegeként?

Megoldás:

Az (1) kérdés nagyon egyszerű, viszont a (2) kérdés már igényel némi vizsgálódást.

(1) Könnyen látható, hogy 2, 4 és 6 nem áll elő, viszont $8=4+4$; $10=4+6$; $12=6+6=4+8$. Ezek alapján általánosíthatunk: Ha $n\geq 8$ páros szám, akkor $n=4+(n-4)$ egy megfelelő előállítás.

(2) Szisztematikus próbálkozással a következőket kapjuk:
Nem kapunk megfelelő felbontást 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 esetén, de $18=9+9$.
Nincs jó felbontás 20 és 22 esetén, de $24=9+15$.
26-ra és 28-ra nincs megfelelő felbontás, de $30=9+21$.

***Tapasztalat, sejtés*:** 18-tól kezdve a 6-tal osztható páros számokra van jó felbontás.
A sejtés ***bizonyítása***: A konkrét példákból kiindulva *n* felírható a következőképpen:

$$n = 6k = 9 + 3 \cdot (2k - 3).$$

A második tag összetett szám, ha $2k - 3 > 1$, azaz ha $k > 2$, $n > 12$.
Ezzel a sejtést bebizonyítottuk.

Az eddigi tapasztalatok befolyásolják a további vizsgálódások módszerét.

Nevezetesen:

1. A páros számokat 6-os maradékaik alapján célszerű csoportosítani, és ezeket a csoportokat célszerűnek tűnik külön vizsgálni.

2. A felbontás egyik tagja alkalmas konkrét szám lehet az egyes csoportokon belül. (6-tal osztható páros számok esetén ez a konkrét szám a 9.)

Ezek alapján, konkrét esetek vizsgálata után megfogalmazhatók az általános sejtések a másik két csoportra (maradékosztályra) is:

Ha $n = 6k + 2$, akkor egy felbontás megvalósítható a következőképpen:

$$n = 6k + 2 = 35 + 3 \cdot (2k - 11).$$

Ez megfelel, ha $2k - 11 > 1$, azaz ha $k > 6$, $n > 38$. Tehát 44-től kezdve minden 6-tal osztva 2 maradékot adó páros számra van megfelelő felbontás.

Ha $n = 6k + 4$, akkor egy lehetséges felbontás:

$$n = 6k + 4 = 25 + 3 \cdot (2k - 7).$$

Ez megfelel, ha $2k - 7 > 1$, azaz ha $k > 4$, $n > 28$. Ez azt jelenti, hogy 34-től kezdve minden 6-tal osztva 4 maradékot adó páros számra van megfelelő felbontás.

***Összefoglalva*:** Ha *n* 38-nál nagyobb páros szám, akkor felbontható két páratlan összetett szám összegére. A 40-nél kisebb páros számok közül a következőkre van jó felbontás: 18, 24, 30, 34, 36.

I.2. Egy összetett számokhoz rendelhető összegről

Ismert tény, hogy bármely összetett szám legalább kétféleképpen írható fel szorzat alakban, azaz ha n összetett szám, akkor $n = ab = cd$, ahol ab és cd különböző szorzat előállítások (1 és n is megengedett tényezők). Képezzük minden összetett n-re és minden ilyen „kettős felírásra” az $S = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ összeget.

Feladat:

Lehet-e valamely pozitív összetett n számra, és annak „kettős felírására” ez az összeg prím?

Megoldás:

A sejtés megfogalmazásához érdemes néhány konkrét esetben kiszámolni a megfelelő S összegeket.

n	$ab = cd$	$S = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$
4	$1\cdot 4 = 2\cdot 2$	**25**
6	$1\cdot 6 = 2\cdot 3$	**50**
8	$1\cdot 8 = 2\cdot 4$	**85**
9	$1\cdot 9 = 3\cdot 3$	**100**
10	$1\cdot 10 = 2\cdot 5$	**130**
12	$1\cdot 12 = 2\cdot 6$ $1\cdot 12 = 3\cdot 4$ $3\cdot 4 = 2\cdot 6$	**185** **170** **65**
14	$1\cdot 14 = 2\cdot 7$	**250**
231	$1\cdot 231 = 3\cdot 77$ $1\cdot 231 = 7\cdot 33$ $1\cdot 231 = 11\cdot 21$ $3\cdot 77 = 7\cdot 33$ $3\cdot 77 = 11\cdot 21$ $7\cdot 33 = 11\cdot 21$	**59300** **54500** **53924** **7076** **6500** **1700**

Tapasztalat, sejtés: S mindig összetett szám lesz.
A sejtés ***bizonyítása***: Ha $n = ab = cd$, akkor c osztója az ab szorzatnak. Ez azt jelenti, hogy vannak olyan k, l, p, q pozitív egészek, hogy $c = k \cdot l$, $a = k \cdot p$ és $b = l \cdot q$. Ezekkel

$$d = \frac{ab}{c} = \frac{(kp)\cdot(lq)}{kl} = p \cdot q .$$

Így

$$S = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = k^2 p^2 + l^2 q^2 + k^2 l^2 + p^2 q^2 =$$
$$= p^2\left(k^2 + q^2\right) + l^2\left(k^2 + q^2\right) = \left(p^2 + l^2\right)\left(k^2 + q^2\right)$$

Mivel k, l, p, q pozitív egészek, ezért S szorzat alakjának mindkét tényezője 1-nél nagyobb, azaz S összetett szám.

Megjegyzés:

A bizonyítás technikája minden további nélkül alkalmazható arra az esetre is, amikor a tényezők k-adik (k tetszőleges pozitív egész) hatványainak összegét vesszük, vagyis az $S_k = a^k + b^k + c^k + d^k$ összeg is mindig összetett szám.

További lehetséges kérdések:

1. Adott n összetett szám esetén hogyan adható meg az n-hez rendelt S összegek száma?

2. A táblázatban sok az 5-tel osztható összeg. Van-e minden összetett n esetén n-hez tartozó 5-tel osztható S összeg?

Egy „részválasz” a 2. kérdésre:
Ha n páros összetett szám, akkor van hozzá 5-tel osztható S összeg.

Bizonyítás:

Ha $n = 2k = 1\cdot\left(2k\right) = 2 \cdot k$, akkor

$$S = 1^2 + 2^2 + k^2 + \left(2k\right)^2 = 5\cdot\left(k^2 + 1\right).$$

I.3. Pozitív egész számok előállítása különböző négyzetszámok összegeként

Elemi módon, bár nem könnyen bizonyítható (bizonyítását lásd pl. [1] 244-251. oldalain) a következő *tétel*:

Bármely pozitív egész szám előáll legfeljebb négy pozitív négyzetszám összegeként.

A tételben szereplő előállítás úgy értendő, hogy megenged azonos tagokat is. (Például $7 = 4 + 1 + 1 + 1$.) Szigorítsunk a feltételen, követeljük meg, hogy az előállítás tagjai páronként különböző négyzetszámok legyenek, azaz vizsgáljuk a következő kérdést:

Mely pozitív egész számok állnak elő legalább két, páronként különböző négyzetszám összegeként?

Megoldás:

Itt bizony kezdetben számolgatni kell. Első nekifutásra nézzük az első 60 pozitív egész számot.

Nem áll elő a megfelelő módon:

1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 15, 16, 18, 19, 22, 23, 24, 27, 28, 31, 32, 33, 36, 43, 44, 47, 48, 60.

Ez 28 darab szám a hatvanból.

A megfelelő számok egy előállításukkal együtt:

$5 = 1 + 4$; $10 = 1 + 9$; $13 = 4 + 9$; $14 = 1 + 4 + 9$; $17 = 1 + 16$; $20 = 4 + 16$; $21 = 1 + 4 + 16$; $25 = 9 + 16$; $26 = 1 + 9 + 16$; $29 = 4 + 25$; $30 = 1 + 4 + 25$; $34 = 9 + 25$; $35 = 1 + 9 + 25$; $37 = 1 + 36$; $38 = 4 + 9 + 25$; $39 = 1 + 4 + 9 + 25$; $40 = 4 + 36$; $41 = 1 + 4 + 36$; $42 = 1 + 16 + 25$; $45 = 4 + 16 + 25$; $46 = 1 + 4 + 16 + 25$; $49 = 4 + 9 + 36$; $50 = 1 + 4 + 9 + 36$; $51 = 1 + 9 + 16 + 25$; $52 = 16 + 36$; $53 = 1 + 16 + 36$; $54 = 1 + 4 + 49$; $55 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25$; $56 = 4 + 16 + 36$; $57 = 1 + 4 + 16 + 36$; $58 = 9 + 49$; $59 = 1 + 9 + 49$.

Az első 60 „adat” alapján a következő megállapítások tehetők, és bizonyíthatók:

(1) Ha k előáll a megfelelő módon, akkor $4k$ és $4k + 1$ is előáll.

***Bizonyítás*:**

Ha $k = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_m^2$, akkor $4k = (2a_1)^2 + (2a_2)^2 + ... + (2a_m)^2$ és

$$4k + 1 = (2a_1)^2 + (2a_2)^2 + ... + (2a_m)^2 + 1 .$$

(2) Ha *k* előáll a megfelelő módon, akkor $4k + 10$ is előáll.

***Bizonyítás*:**

Ha $k = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_m^2$, akkor $4k + 10 = (2a_1)^2 + (2a_2)^2 + ... + (2a_m)^2 + 1 + 9$.

(3) Ha *k* előáll a megfelelő módon, akkor $4k + 35$ is előáll.

***Bizonyítás*:**

Ha $k = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_m^2$, akkor

$$4k + 35 = (2a_1)^2 + (2a_2)^2 + ... + (2a_m)^2 + 1 + 9 + 25 .$$

A 60 utáni pozitív egészeket vizsgálva az előző „adaghoz” képest kevesebb nem felbontható számot találtunk (második nekifutásra 200-ig néztük meg a számokat a diákokkal), ezek:

64, 67, 72, 76, 92, 96, 108, 112, 128.

Meglepő és bíztató, hogy 129-től 200-ig mindegyik szám felbontható. Harmadik adagként 1000-ig vizsgáltuk meg a számokat és nem találtunk felbonthatatlan számot. A számolások során természetesen felhasználtuk a már bizonyított észrevételeket. Ezek segítségével már bizonyítani is tudjuk, hogy 128 a legnagyobb felbonthatatlan szám. Belátjuk ugyanis a következőt:

Ha az *n* pozitív egész számra teljesül, hogy $(n+1)$-től $(4n+35)$-ig minden egész szám előáll páronként különböző négyzetszámok összegeként, akkor bármely *n*-nél nagyobb egész szám előáll a kívánt módon.

***Bizonyítás*:**

Ad abszurdum tegyük fel, hogy van olyan $4n+35$ -nél nagyobb egész szám, amely nem áll elő a megfelelő módon, és legyen *k* ezek között a legkisebb. Legyen $k=4q+r$, ahol $0\le r\le 3$. Mivel $k\ge 4n+36$, ezért $n+9\le q<k$.

Ha $r=0$ vagy $r=1$, akkor mivel *k* minimális és $n+9\le q<k$, ezért *q* előáll a kívánt módon, ami (1) alapján azt jelenti, hogy *k* is előáll. Ez viszont ellentmondás.

Ha $r=2$, akkor $k=4q+2=4(q-2)+10$, és $n+7\le q-2<k$, ami (2) alapján azt jelenti, hogy *k* előáll a kívánt módon. Ismét ellentmondásra jutottunk.

Ha $r=3$, akkor $k=4q+3=4(q-8)+35$, és $n+1\le q-8<k$, ez az eset pedig (3) alapján vezet ellentmondásra.

Megjegyzés:

Bizonyítható, hogy bármely $n\ge 2$ esetén valahonnan kezdve bármely pozitív egész szám előáll legalább két különböző *n*-edik hatvány összegeként.

I.4. Egy meglepő és szép összefüggés

Adrien-Marie Legendre (1752-1833) ismert, egyszerűen bizonyítható *tételéből* indulunk ki.

Ha p prímszám, n pedig pozitív egész szám, akkor $n!$ *prímtényezős felbontásában a p hatványkitevője:*

$$m_p^{(n)}=\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\dots \ .$$

Tetszőleges pozitív egész *n* számhoz tekintsük $m_2^{(n)}$ -t, és legyen g_n az *n* kettes számrendszerbeli alakjában az 1-esek száma. Számítsuk ki néhány *n* értékre $m_2^{(n)}$ -t és g_n -t. Ezek összegéül meglepő eredményt kapunk.

n	$m_2^{(n)}$	g_n	$m_2^{(n)}+g_n$
6	4	2	**6**
15	11	4	**15**
23	19	4	**23**
47	42	5	**47**
84	81	3	**84**
161	158	3	**161**
492	486	6	**492**
1023	1013	10	**1023**
2011	2002	9	**2011**

***Tapasztalat, sejtés*:** $m_2^{(n)}+g_n=n$.

A sejtés ***bizonyítása***: Legyen n tetszőleges, de rögzített pozitív egész, és legyen n kettes számrendszerbeli alakja

$$n=a_0+a_1\cdot 2+a_2\cdot 2^2+\ldots+a_k\cdot 2^k,$$

ahol $a_i\in\{0;\ 1\}$.

Ezzel a kettes számrendszerbeli felírással az egészrész definíciója alapján

$$\left[\frac{n}{2}\right]=\left[\frac{a_0}{2}+a_1+a_2\cdot 2+\ldots+a_k\cdot 2^{k-1}\right]=a_1+a_2\cdot 2+\ldots+a_k\cdot 2^{k-1}.$$

Általában, ha $0<r\le k$, akkor

$$\left[\frac{n}{2^r}\right]=\left[\frac{a_0+a_1\cdot 2+\ldots+a_{r-1}\cdot 2^{r-1}}{2^r}+a_r+a_{r+1}\cdot 2+\ldots+a_k\cdot 2^{k-r}\right]=$$
$$=a_r+a_{r+1}\cdot 2+\ldots+a_k\cdot 2^{k-r}$$

ugyanis

$$a_0+a_1\cdot 2+\ldots+a_{r-1}\cdot 2^{r-1}\le 1+2+\ldots+2^{r-1}=2^r-1<2^r.$$

$m_2^{(n)}$ meghatározásához írjuk fel egymás alá az egészrészeket, és összegezzünk oszloponként.

$$\left[\frac{n}{2}\right] = a_1 + 2a_2 + 2^2 a_3 + \ldots + 2^{k-1} a_k$$
$$\left[\frac{n}{2^2}\right] = a_2 + 2a_3 + \ldots + 2^{k-2} a_k$$
$$\left[\frac{n}{2^3}\right] = a_3 + \ldots + 2^{k-3} a_k$$
$$\ldots$$
$$\left[\frac{n}{2^k}\right] = a_k$$

Felhasználva, hogy $1 + 2 + \ldots + 2^{r-1} = 2^r - 1$, a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} m_2^{(n)} &= a_1 + a_2(1+2) + a_3\left(1+2+2^2\right) + \ldots + a_k\left(1+2+\ldots+2^{k-1}\right) = \\ &= a_1(2-1) + a_2\left(2^2-1\right) + a_3\left(2^3-1\right) + \ldots + a_k\left(2^k-1\right) = \\ &= a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + \ldots + a_k \cdot 2^k - \left(a_0 + a_1 + \ldots + a_k\right) \\ &= n - \left(a_0 + a_1 + \ldots + a_k\right) = n - g_n \end{aligned}$$

Ezzel beláttuk ezt a cseppet sem kézenfekvő összefüggést.

II. Osztók száma, osztók összege, és a tökéletes szám fogalmának általánosítási lehetőségei

II.1. Az osztók számáról és az osztók összegéről

Jelölje $d(n)$ az *n* pozitív egész szám pozitív osztóinak számát, és $S(n)$ az *n* pozitív osztóinak összegét. $d(n)$ és $S(n)$ multiplikatív számelméleti függvények, azaz ha *a* és *b* relatív prím pozitív egészek, akkor $d(a \cdot b) = d(a) \cdot d(b)$ és $S(a \cdot b) = S(a) \cdot S(b)$. A multiplikativitást felhasználva $d(n)$ és $S(n)$ értéke meghatározható az *n* prímtényezős felbontásából.

Ha $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, akkor

$$d(n) = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1),$$

és

$$S(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}.$$

Ha $d(n)$ prím, akkor $S(n)$ lehet prím is, összetett is. Ezt jól mutatják a következő példák: Ha $n=2$, akkor $d(2)=2$ és $S(2)=3$, viszont ha $n=7$, akkor $d(7)=2$ és $S(7)=8$.
A másik irány izgalmasabb, ugyanis konkrét példák azt mutatják, hogy ha $S(n)$ prím, akkor $d(n)$ is prím.

n	$S(n)$	$d(n)$
2	3	2
4	7	3
9	13	3
16	31	5
25	31	3
2401	2801	5

***Tapasztalat, sejtés*:** Ha $S(n)$ prím, akkor $d(n)$ is prím.

Bizonyítás:

Vizsgáljuk meg előbb, hogy milyen pozitív egész *n* esetén lehet $S(n)$ prím.
Ha $n \geq 2$, akkor $S(n) \geq 3$, így ha *n*-nek van legalább két különböző prímosztója, akkor a multiplikativitásból adódóan $S(n)$ összetett szám. Ahhoz tehát, hogy $S(n)$ prím legyen szükséges, hogy $n = p^k$ teljesüljön, ahol *p* prím, *k* pozitív egész szám. Ekkor

$$S(n) = \frac{p^{k+1}-1}{p-1}.$$

Ebből az alakból nehézkesnek tűnik eldönteni, hogy $S(n)$ mikor prím, ezért kontrapozícióval bizonyítunk. A kontrapozíciós bizonyítás az indirekt bizonyítások egyik formája, amelynek logikai sémája: $(A \to B) \Leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$.

Tegyük fel, hogy $n = p^k$ és $d(n)$ összetett szám ($\neg B$). Ez azt jelenti, hogy vannak olyan a és b 1-nél nagyobb pozitív egészek, hogy $d(n) = ab$. Másrészt $d(n) = d\left(p^k\right) = k+1$, így

$$k+1 = ab .$$

Ezzel

$$S(n) = \frac{p^{k+1}-1}{p-1} = \frac{p^{ab}-1}{p-1} = \frac{\left(p^a\right)^b - 1}{p^a - 1} \cdot \frac{p^a - 1}{p-1} .$$

Mivel a és b 1-nél nagyobb pozitív egészek, ezért a jobb oldal mindkét tényezője 1-nél nagyobb, vagyis $S(n)$ összetett szám ($\neg A$).
Ezzel bebizonyítottuk a sejtést.

II.2. Egy kérdés az n; $d(n)$; $d\left(d(n)\right)$; $d\left(d\left(d(n)\right)\right)$; ... sorozatokkal kapcsolatban

Közismert tétel, hogy $d(n)$ akkor és csak akkor páratlan, ha n négyzetszám. Ezt is felhasználjuk a következő kérdés megválaszolásához.

Mely 2-nél nem kisebb pozitív egész n számok esetén teljesül, hogy az

$$n;\ d(n);\ d\left(d(n)\right);\ d\left(d\left(d(n)\right)\right);\ \ldots$$

sorozatban nincs négyzetszám?

Megoldás:

Két megállapítás „első ránézésre” adódik:

1. A fenti tételből következik, hogy ha a sorozatnak a második tagtól kezdve valamelyik tagja páratlan, akkor az őt megelőző tag négyzetszám. Ebből adódik, hogy a második tagtól kezdve minden tag páros kell, hogy legyen.

2. Ha $n = p$ (p prímszám), akkor a sorozat: p; 2; 2; 2; ..., ez pedig megfelel a feltételnek.

Ezek után a kérdés már „csak” az, hogy összetett számmal kezdődhet-e a sorozat?

Ehhez először belátjuk, hogy az n; $d(n)$; $d(d(n))$; $d(d(d(n)))$; ... sorozat $n \geq 3$ esetén szigorúan csökkenő. Azt kell igazolnunk, hogy $d(n) < n$, ha $n \geq 3$.
Az osztó-komplementer osztó párok figyelembe vételével könnyen adódik, hogy $d(n) < 2\sqrt{n}$ minden pozitív egész n esetén. Ha $n \geq 5$, akkor $2\sqrt{n} < n$, valamint $d(3) < 3$, $d(4) < 4$. Ezzel beláttuk, hogy a sorozat bármely $n \geq 3$ esetén szigorúan csökkenő.
Mivel $d(n) \geq 2$ bármely $n \geq 2$ esetén, ezért a szigorú csökkenésből adódik, hogy $n \geq 3$ esetén valahonnan kezdve a sorozat tagjai 2-vel egyenlők. A második tagtól kezdve ez csak úgy lehetséges, ha az első elem prím. Ez igaz bármelyik helyen felbukkanó 2-esre is, azaz a sorozatban a balról nézve első 2-es előtt prímszám áll. Ha balról nézve az első 2-es a k-adik helyen található, és $k \geq 3$, akkor a sorozat $(k-1)$-edik tagja páratlan prím, amiből adódóan a fentiek figyelembe vételével a $(k-2)$-edik tag négyzetszám. Ez viszont azt jelenti, hogy a négyzetmentes sorozatok második tagja 2, első tagja pedig prím.
Összefoglalva: Pontosan a p; 2; 2; 2; ... sorozatok teljesítik a feltételt, ahol p prímszám.

II.3. A többszörösen tökéletes számokról

Közismert, hogy az n pozitív egész szám *tökéletes szám*, ha $S(n) = 2n$. Ezt a fogalmat *Mersenne* (1588-1648) általánosította.

***Definíció*:** Az n pozitív egész szám *k-szorosan tökéletes szám,* ha $S(n) = (k+1) \cdot n$, ahol k pozitív egész szám.

Példák: A 120 és a 672 kétszeresen tökéletes számok, ugyanis $S(120) = 3 \cdot 120 = 360$ és $S(672) = 3 \cdot 672 = 2016$.

A $2178540 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19$ háromszorosan tökéletes szám.
Jelölje T_k a k-szorosan tökéletes számok halmazát.

Megoldatlan problémák:

1. Az $\bigcup_{k \in \mathbf{N}^+} T_k$ halmaz véges vagy végtelen?

2. Van-e páratlan eleme az $\bigcup_{k \in \mathbf{N}^+} T_k$ halmaznak?

Jelenleg (?) $k = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$ esetére ismerünk *k*-szorosan tökéletes számokat. Elemi módon, $S(n)$ multiplikativitását felhasználva bizonyíthatók a következő *tételek*:

(1) Ha $n \in T_2$ és nem osztható 3-mal, akkor $3n \in T_3$.
(2) Ha $3n \in T_{4l-1}$ és *n* nem osztható 3-mal, akkor $n \in T_{3l-1}$.
(3) Ha $n \in T_2$ és osztható 3-mal, de nem osztható 5-tel és 9-cel, akkor $45n \in T_3$.
(4) Ha $n \in T_4$, akkor *n*-nek legalább hat különböző prímosztója van.

(1)-et és (4)-et bizonyítjuk itt, (2) és (3) bizonyítása (1) bizonyításához hasonlóan történik.

***Bizonyítás*:**

(1) Mivel $n \in T_2$, ezért $S(n) = 3n$. *n* és 3 relatív prímek, ezért

$$S(3n) = S(3) \cdot S(n) = 4 \cdot S(n) = 4 \cdot (3n).$$

(4) Ha $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, akkor a feltétel:

$$\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1} = 5 \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}.$$

Osszunk *n*-nel:

$$\frac{p_1-\left(p_1^{\alpha_1}\right)^{-1}}{p_1-1} \cdot \frac{p_2-\left(p_2^{\alpha_2}\right)^{-1}}{p_2-1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_k-\left(p_k^{\alpha_k}\right)^{-1}}{p_k-1} = 5.$$

A bal oldalt felülről becsülhetjük, ha a tényezők számlálóinak második tagját elhagyjuk.

$$\frac{p_1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2}{p_2-1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_k}{p_k-1} > 5$$

Az egyenlőtlenség bal oldalának tényezői az $\left\{\frac{n}{n-1}\right\}$ szigorúan csökkenő sorozat tagjai, ezért a szorzat akkor a legnagyobb, ha az első *k* darab prímet vesszük a prímek növekvő sorozatából. Az első öt prím esetén

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{10} = \frac{77}{16} < 5,$$

ezért n-nek legalább hat különböző prímosztója van.

II.4. A „szuperbővelkedő” (superabundant) számokról

***Definíció*:** Az n pozitív egész szám *hiányos*, ha $S(n) < 2n$, és *bővelkedő*, ha $2n < S(n)$.

Példák: Minden prímhatvány hiányos, viszont a legalább kétszeresen tökéletes számok bővelkedők.

Definíció (*Erdős*, *Alaoglu*, 1944)**:** Az n pozitív egész szám *szuperbővelkedő*, ha

$$\frac{S(k)}{k} < \frac{S(n)}{n}$$

bármely $0 < k < n$ esetén.

Példák: A 2 és a 4 szuperbővelkedő, a 3 és az 5 viszont nem az.

A témakörrel kapcsolatos sok megoldatlan problémát figyelembe véve talán kicsit meglepő a következő *tétel*:

Végtelen sok szuperbővelkedő szám van.

***Bizonyítás*:**

Legyenek az n pozitív egész szám pozitív osztói $d_1 = 1$; d_2; ...; $d_k = n$. Ezzel

$$S(n) = \sum_{d_i|n} d_i = \sum_{d_i|n} \frac{n}{d_i},$$

ahonnan

$$\frac{S(n)}{n} = \sum_{d_i|n} \frac{1}{d_i}.$$

Legyen most $n = m!$. Világos, hogy ekkor

$$\frac{S(n)}{n} = \sum_{d_i|n} \frac{1}{d_i} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m}.$$

Mivel a harmonikus sor divergens, ezért az $\left\{\frac{S(n)}{n}\right\}$ sorozat nem korlátos felülről. Ebből viszont következik, hogy a sorozatnak végtelen sok olyan tagja van, amely az összes őt megelőző tagnál nagyobb, azaz végtelen sok szuperbővelkedő szám van.

Irodalom:

[1] Erdős Pál, Surányi János: *Válogatott fejezetek a számelméletből*, POLYGON, Szeged, 2004

[2] Megyesi László: *Bevezetés a számelméletbe*, POLYGON, Szeged, 1997

[3] Ross Honsberger: *Mathematical Gems*, MAA, 1973

[4] Ross Honsberger: *Mathematical Gems II*, MAA, 1976

[5] Ross Honsberger: *More Mathematical Morsels*, MAA, 1991

[6] Joseph D. E. Konhauser, Dan Velleman, StanWagon: *Which Way Did The Bicycle Go? (... and other intriguing mathematical mysteries)*, MAA, 1996