Algebrai egyenlőtlenségek versenyeken

Dr. Kiss Géza, Budapest

Néhány helyettesítési módszer és a Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenség speciális esetének alkalmazása bizonyítási feladatokban

Ismert, hogy sok egyenlőtlenség bizonyítása egyszerűsíthető egy ügyes helyettesítéssel, amelyben adott, vagy feltehető, hogy $abc = 1$. A helyettesítés ekkor

$$a = \frac{x}{y};\ b = \frac{y}{z};\ c = \frac{z}{x}.$$

Más esetben is érdemes próbálkozni hasonló helyettesítéssel? Például, igen sok versenyfeladatban szerepel pozitív valós számokra a következő feltételek valamelyike:

$$xyz = x + y + z + 2 \text{, illetve } xy + yz + zx + 2xyz = 1.$$

Alkalmazzuk a meglepő

$$x = \frac{a+b}{c},\ y = \frac{b+c}{a},\ z = \frac{c+a}{b}$$

helyettesítést

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + 2 = \frac{a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + 2abc}{abc} =$$
$$\frac{c\left(a^2 + b^2 + 2ab\right) + c^2(a+b) + ab(a+b)}{abc} = \frac{(a+b)\left(ca + cb + c^2 + ab\right)}{abc} =$$
$$= \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}.$$

Vagyis ezzel a helyettesítéssel automatikusan teljesül az is, hogy

$$xyz = x + y + z + 2\,.$$

Ha ennek reciprokait vesszük, akkor viszont éppen a másik alak,

$$xy + yz + zx + 2xyz = 1$$

lesz igaz.

A másik irányban is érdemes részletesen megnézni ezt az összefüggést.
Először ekvivalens átalakításokkal megmutatjuk, hogy mit is jelent pontosan

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}=1.$$

A beszorzás után:

$$1+y+z+yz+1+x+z+xz+1+x+y+xy=1+x+y+z+xy+yz+zx+xyz.$$

Ezt rendezve látjuk, hogy ez ekvivalens az $xyz=x+y+z+2$ összefüggéssel.
Legyen most

$$a=\frac{1}{1+x}, b=\frac{1}{1+y},\ c=\frac{1}{1+z},$$

vagyis teljesüljön az is, hogy $a+b+c=1$.

E két előző megállapítás alapján pl. $x=\frac{1-a}{a}=\frac{b+c}{a}$.

Hasonlóan $y=\frac{c+a}{b},\ z=\frac{a+b}{c}$.

Tehát, amennyiben $a+b+c=1$, a feltétel fennállása esetén ez a helyettesítés alkalmazható.

1. feladat

(Nesbitt) Bizonyítsuk, hogy tetszőleges a, b, c pozitív valós számokra

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$

A sok-sok ismert megoldás közül most kettőt szeretnék kiemelni, ez a kettő tulajdonképpen átfogja az egész előadás mondandóját.

Megoldás I:

A baloldal szerkezete miatt „normalizálhatunk”, feltehetjük, hogy $a+b+c=1$.
Alkalmazhatjuk az előbbi mágikus helyettesítést. Elegendő belátni tehát, hogy

$$x, y, z>0,\ xy+yz+zx+2xyz=1 \text{ esetén } x+y+z\geq\frac{3}{2}.$$

Indirekt tegyük fel, hogy $x+y+z<\frac{3}{2}$.

Ekkor $xy+yz+zx\leq x^2+y^2+z^2$ alapján és az indirekt feltételből

$$xy+yz+zx\le\frac{(x+y+z)^2}{3}<\frac{3}{4}.$$

Felhasználva továbbá a számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenséget

$$2xyz\le 2\frac{(x+y+z)^3}{3}<\frac{1}{4}.$$

E kettőből $xy+yz+zx+2xyz<\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1,$ ellentmondás.

Nézzünk ennek a helyettesítésnek az alkalmazására még egy példát!

2. feladat

Tudjuk, hogy $x, y, z>0$ és $xyz=x+y+z+2$. Mutassuk meg, hogy

$$2\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right)\le x+y+z+6$$

Megoldás:

Először próbáljuk meg kicsit átírni a bizonyítandó egyenlőtlenség jobboldalát.
A kétszeres szorzatok helyett beírjuk:

$$2\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right)=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2-x-y-z.$$

Ezzel a bizonyítandó egyenlőtlenség átírható

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2\le 2x+2y+2z+6.$$

A gyökvonást elvégezve a bizonyítandó egyenlőtlenség

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\le\sqrt{2(x+y+z+3)}.$$

A szokatlannak tűnő helyettesítés most is segít!

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}}+\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}}\le\sqrt{2\left(\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+3\right)}.$$

Most a jobboldal kezelhetőbb formában is írható:

$$\left(\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+3\right)=\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{c}{c}+\frac{a}{a}+\frac{b}{b}=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Alkalmazzuk a többszörösen átírt alakra a Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}}+\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}}=\sqrt{a+b}\,\frac{1}{\sqrt{c}}+\sqrt{a+b}\,\frac{1}{\sqrt{c}}+\sqrt{a+b}\,\frac{1}{\sqrt{c}}\le$$
$$\le\sqrt{(a+b+b+c+c+a)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}=\sqrt{2\left(\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+3\right)}.$$

Hasonló módszerrel sikerrel próbálkozhatunk a következő feladatnál is.

3. feladat

Igazoljuk, hogy tetszőleges pozitív valós számokra

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\le 8.$$

Megoldás:

A törteket egyszerűsítve rendre a^2, b^2, c^2-tel az egyenlőtlenség átalakítható

$$\frac{\left(2+\frac{b+c}{a}\right)^2}{2+\left(\frac{b+c}{a}\right)^2}+\frac{\left(2+\frac{c+a}{b}\right)^2}{2+\left(\frac{c+a}{b}\right)^2}+\frac{\left(2+\frac{a+b}{c}\right)^2}{2+\left(\frac{a+b}{c}\right)^2}\le 8.$$

Az egyenlőtlenségben a nevező és a számláló azonos „dimenziójú”, így feltehetjük, hogy $a+b+c=1$. Alkalmazzuk az előbbi helyettesítést. A bizonyítandó egyenlőtlenség

$$\frac{(2+x)^2}{2+x^2}+\frac{(2+y)^2}{2+y^2}+\frac{(2+z)^2}{2+z^2}\le 8$$

és azt is tudjuk, hogy $xyz=x+y+z+2$.

Most azonos átalakításokkal

$$\frac{2x+1}{2+x^2}+\frac{2x+1}{2+x^2}+\frac{2x+1}{2+x^2}\le\frac{5}{2},$$

majd átrendezve és bővítve

$$\frac{(x-1)^2}{2+x^2}+\frac{(x-1)^2}{2+x^2}+\frac{(x-1)^2}{2+x^2}\ge\frac{1}{2}.$$

Ebben az utolsó formában már jól használható a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség:

$$\frac{(x-1)^2}{2+x^2}+\frac{(x-1)^2}{2+x^2}+\frac{(x-1)^2}{2+x^2}\ge\frac{(x+y+z-3)^2}{x^2+y^2+z^2+6}\ge\frac{1}{2}.$$

Az utóbbi a bizonyítandó átrendezésével

$$2(x+y+z-3)^2\ge x^2+y^2+z^2+6=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)+6\,.$$

Most néhány egyszerű esetben alkalmazzuk a számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenséget.

$$x=\frac{b+c}{a}\ge 2\frac{\sqrt{bc}}{a},\ y\ge\frac{\sqrt{ca}}{b},\ z\ge\frac{\sqrt{ab}}{c}$$

és ezek szorzásával: $xyz\ge 8$.

Ezt is felhasználva

$$xy+yz+zy\ge 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}\ge 3\cdot 4=12\ \text{ és }\ x+y+z\ge 3\sqrt[3]{xyz}\ge 6.$$

Ezekkel a becslésekkel már sikerrel bizonyíthatjuk az egyenlőtlenséget, legyen az egyszerűség kedvéért $s=x+y+z$.

$$2(s-3)^2\ge s^2-2\cdot 12+6\ge s^2-2(xy+yz+zx)+6.$$

Rendezzük a most már csak egy ismeretlent tartalmazó egyenlőtlenséget:

$$s^2-12s+36=(s-6)^2\ge 0.$$

Az egyenlőség esetét is látjuk, ha $x=y=z=2$.

Mielőtt rátérünk a másik kiemelendő módszerre kicsit tekintsük át a Cachy-Schwarz-egyenlőtlenség tulajdonságait egy feladaton keresztül.

4. feladat

Bizonyítsuk be, hogy pozitív valós számok véges $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sorozata akkor és csak akkor mértani sorozat, ha

$$\left(a_0^2 + a_1^2 + \ldots + a_{n-1}^2\right)\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right) = \left(a_0 a_1 + a_1 a_2 + \ldots + a_{n-1} a_n\right)^2$$

Megoldás:

Ha vesszük az $\underline{x}\left(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\right)$ és $\underline{y}\left(a_1, a_2, \ldots, a_n\right)$ vektorokat és ezekre felírjuk a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenséget, akkor kapjuk, hogy

$$\left(a_0^2 + a_1^2 + \ldots + a_{n-1}^2\right)\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right) \geq \left(a_0 a_1 + a_1 a_2 + \ldots + a_{n-1} a_n\right)^2$$

Egyenlőség pedig pontosan akkor lép fel, ha a két vektor párhuzamos, ráadásul egyező irányú is, hiszen most a koordináták pozitív számok. Ez pontosan azt jelenti, hogy

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{a_2}{a_1} = \ldots = \frac{a_n}{a_{n-1}}.$$

Ez a pozitív hányados a sorozat kvóciense.

A Cauchy-Schwarz-féle egyenlőtlenség nagyon hatékony segédeszköz az algebrai egyenlőtlenségek bizonyítása során. Általános használata azonban nagy odafigyelést és begyakorlottságot igényel. Sok esetben igen nehéz meglátni, és technikailag kivitelezni az alkalmazását. Ezért is gondolom nagyon fontosnak és szerencsésnek a következő specializációt.

5. feladat

(Titu-lemma) Legyenek $a_{1,}\ a_2, \ldots,\ a_n$ továbbá $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ pozitív valós számok. Ekkor teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$\frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{x_n} \geq \frac{\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right)^2}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}.$$

1. bizonyítás:

Az első bizonyítás megmutatja, hogy a lemma a CBS-egyenlőtlenség egy speciális esete. Alkalmazzuk a CBS-egyenlőtlenséget a következő számokra:

$$\frac{a_1}{\sqrt{x_1}},\ \frac{a_2}{\sqrt{x_2}},\ \ldots,\ \frac{a_n}{\sqrt{x_n}}$$

egyfelől, illetve $\sqrt{x_1},\ \sqrt{x_2},\ \ldots,\ \sqrt{x_n}$ másfelől.

$$\left[\left(\frac{a_1}{\sqrt{x_1}}\right)^2+\left(\frac{a_2}{\sqrt{x_2}}\right)^2+\ldots+\left(\frac{a_n}{\sqrt{x_n}}\right)^2\right]\cdot\left[\left(\sqrt{x_1}\right)^2+\left(\sqrt{x_2}\right)^2+\ldots+\left(\sqrt{x_n}\right)^2\right]\geq$$

$$\geq\left[\frac{a_1}{\sqrt{x_1}}\sqrt{x_1}+\frac{a_2}{\sqrt{x_2}}\sqrt{x_2}+\ldots+\frac{a_n}{\sqrt{x_n}}\sqrt{x_n}\right]^2=\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right)^2$$

A baloldalon elvégezve a négyzetre emeléseket és mindkét oldalt $\left(x_1+x_2+\ldots+x_n\right)$-nel osztva éppen a bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk.
A megoldásból az is kiderül, hogy mikor teljesül az egyenlőség:

$$\frac{a_1}{x_1}=\frac{a_2}{x_2}=\ldots=\frac{a_n}{x_n}.$$

2. bizonyítás:

Az állítást $n=2$-re algebrai átalakításokkal bizonyítjuk.

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\geq\frac{\left(a+b\right)^2}{x+y}.$$

Szorozzuk meg az egyenlőtlenség mindkét oldalát $xy\left(x+y\right)$-nal, és végezzük el a műveleteket.

$$a^2xy+a^2y^2+b^2x^2+b^2xy\geq a^2xy+2abxy+b^2xy.$$

Rendezés után a kapott kifejezés teljes négyzet:

$$a^2y^2-2abxy+b^2x^2\geq 0.$$

$$\left(ay-bx\right)^2\geq 0.$$

Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk az eredeti egyenlőtlenség is igaz és az egyenlőség pontosan $ay = bx \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y}$ esetén következik be. Az állítás ezután n-re vonatkozó teljes indukcióval igazolható.

Elsőként vegyük újra elő a Nesbitt-egyenlőtlenséget és arra adjunk egy másik megoldást.

Megoldás II. (Nesbitt):

Bővítsük a törteket rendre a, b, c-vel.és használjuk a Titu-lemmát!

$$\frac{a^2}{ab+ca} + \frac{b^2}{bc+ab} + \frac{c^2}{ca+bc} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} .$$

A baloldalról látjuk be, hogy legalább $\frac{3}{2}$.

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca,$$
$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \geq 3(ab + bc + ca),$$
$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca),$$
$$\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \geq \frac{3}{2}.$$

Azt is látjuk, hogy egyenlőség akkor és csak akkor, ha $a = b = c$.
A következő két feladat OKTV versenyek feladata volt, illetve több fórumon is megtalálható. Schultz János is hivatkozik ezekre cikkében. A két feladat közül a másodikat oldjuk meg ezzel is megmutatva, hogy célszerű ezt a kis állítást külön lemmaként nyilvántartani.

6. feladat

Mutassuk meg, hogy ha $a, b, c, d > 0$ akkor

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2 .$$

7. feladat

Mutassuk meg, hogy ha $a, b, c, d, e, f > 0$ akkor

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+e}+\frac{d}{e+f}+\frac{e}{f+a}+\frac{f}{a+b}\geq 3\,.$$

Megoldás:

Bővítsük itt is mindegyik törtet a saját számlálójával.

$$\frac{a^2}{a(b+c)}+\frac{b^2}{b(c+d)}+\frac{c^2}{c(d+e)}+\frac{d^2}{d(e+f)}+\frac{e^2}{e(f+a)}+\frac{f^2}{f(a+b)}\geq 3$$

Most alkalmazzuk a baloldalra a Titu-lemmát, ezzel a bizonyítandó egyenlőtlenség

$$\frac{\left(a+b+c+d+e+f\right)^2}{ab+ac+bc+bd+cd+ce+de+df+ef+ae+af+bf}\geq 3.$$

A nevező három szorzat összegére bontható

$$\frac{\left(a+b+c+d+e+f\right)^2}{\left(a+d\right)\left(b+e\right)+\left(b+e\right)\left(f+c\right)+\left(f+c\right)\left(a+d\right)}\geq 3.$$

Most $x=a+d,\ y=b+e,\ z=f+c$ helyettesítéssel A Nesbitt-egynlőtlenség második bizonyításánál is szereplő , ismert

$$\frac{\left(x+y+z\right)^2}{xy+yz+zx}\geq 3$$

adódik, ahonnan az egyenlőség esetére $x=y=z,$ illetve $a=b=c=d=e=f$.
Ez a három feladat utal egy olyan sejtésre, hogy a baloldali ismeretlenek számát 1-gyel növelve a jobboldal minden esetben $\frac{1}{2}$-del növekszik.
Ez a híres Shapiro-egyenlőtlenség.

Ennek három esetét már láttuk, sőt két eset bizonyítva is van. A szimmetrikus szerkezet alapján teljesen meglepő, hogy ez az állítás általában nem igaz. (!)
Az eredeti problémát Shapiro az American Mathematical Monthly-ban tűzte ki 1954-ben.

Kiderült, hogy az eredeti állítás páros n-ekre $n \leq 12$ -ig, páratlanokra $n \leq 23$ -ig igaz. A teljes megoldást egy Drinfel'd nevű ukrán nemzetiségű matematikus adta meg 1971-ben, 17 éves korában. Eszerint tetszőleges n-re csak

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_n+x_1}+\frac{x_n}{x_1+x_2} \geq \gamma\frac{n}{2}$$

teljesül, ahol $\gamma \approx 9891...$ irracionális konstans.

8. feladat

(Péter Rózsa Verseny) a, b, c pozitív valós számok összege 1. Igazoljuk a következő egyenlőtlenséget:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a} < 1.$$

Megoldás:

Az alsó becslést a Titu-lemmával azonnal kapjuk.

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a+b+b+c+c+a} = \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)} = \frac{1}{2}.$$

A felső becsléshez csökkentsük a nevezőket:

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a} < \frac{a^2}{a}+\frac{b^2}{b}+\frac{c^2}{c} = a+b+c = 1.$$

A felső becslésnél egyenlőséget nem kaphatunk, de az 1-et tetszőlegesen meg tudjuk közelíteni.

9. feladat

(OKTV döntő, 2001) Bizonyítsuk be, hogy az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív valós számokra teljesül az

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\ldots+\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_n^2}{a_n+a_1} \geq \frac{1}{2}\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right)$$

egyenlőtlenség!

Látjuk, hogy Titu-lemmával ez egy ujjgyakorlat.

Alkalmazzuk most az előbb bizonyított Titu-lemmát egy nehéz KöMaL feladat megoldására.

10. feladat

Az a, b, c pozitív valós számokra $ab+bc+ca=\frac{1}{3}$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{a}{a^2-bc+1}+\frac{b}{b^2-ca+1}+\frac{c}{c^2-ab+1}\geq\frac{1}{a+b+c}.$$

Megoldás:

(Huszár Kristóf, Schultz János megoldása)
Alakítsuk át a megadott feltétel alapján sorra a baloldali törteket. A feltételből $-bc=ab+ca-\frac{1}{3}$. Ezt beírva az első törtbe és a törtet a-val bővítve:

$$\frac{a}{a^2-bc+1}=\frac{a}{a^2+ab+ca+\frac{2}{3}}=\frac{a^2}{a^2(a+b+c)+\frac{2}{3}a}.$$

Ugyanezt az átalakítást elvégezhetjük mindhárom baloldali törtnél, így a baloldali teljes kifejezés:

$$\frac{a^2}{a^2(a+b+c)+\frac{2}{3}a}+\frac{b^2}{b^2(a+b+c)+\frac{2}{3}b}+\frac{c^2}{c^2(a+b+c)+\frac{2}{3}c}.$$

Most alkalmazzuk a Titu-lemmát három tört összegének alsó becsléséhez:

$$\frac{a^2}{a^2(a+b+c)+\frac{2}{3}a}+\frac{b^2}{b^2(a+b+c)+\frac{2}{3}b}+\frac{c^2}{c^2(a+b+c)+\frac{2}{3}c}\geq$$
$$\geq\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)+\frac{2}{3}(a+b+c)}.$$

Most egyszerűsíthetünk a jobboldalon $\left(a+b+c\right)$-vel és a feltételből $2ab+2bc+2ca=\frac{2}{3}$-ot is beírhatjuk. Így a jobboldal:

$$\frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2+\frac{2}{3}}=\frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}=\frac{a+b+c}{\left(a+b+c\right)^2}=\frac{1}{a+b+c}.$$

Ezzel az állítást igazoltuk. Egyenlőség akkor és csak akkor, ha

$$\frac{a}{a^2\left(a+b+c\right)+\frac{2}{3}a}=\frac{b}{b^2\left(a+b+c\right)+\frac{2}{3}b}=\frac{c}{c^2\left(a+b+c\right)+\frac{2}{3}c},$$

$$\frac{1}{a\left(a+b+c\right)+\frac{2}{3}}=\frac{1}{b\left(a+b+c\right)+\frac{2}{3}}=\frac{1}{c\left(a+b+c\right)+\frac{2}{3}},$$

$$a(a+b+c)+\frac{2}{3}=b(a+b+c)+\frac{2}{3}=c(a+b+c)+\frac{2}{3},$$

$$a=b=c.$$

11. feladat

Igazoljuk, hogy minden olyan $x,\ y,z>1$ számhármasra, amelyre $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2,$

$$\sqrt{x+y+z}\geq\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}.$$

Alkalmazzuk a Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenséget a szokásos formában:

$$1\cdot\sqrt{x-1}+1\cdot\sqrt{y-1}+1\cdot\sqrt{z-1}\leq\sqrt{3\left(x+y+z-3\right)}.$$

elegendő tehát belátni, hogy

$$\sqrt{3(x+y+z-3)}\leq\sqrt{x+y+z}.$$

Ezt átrendezve $x+y+z\leq\frac{9}{2}$ alakban kapjuk a bizonyítandó állítást. Ez viszont sajnos nem igaz, mert az eredeti feltételnél alkalmazva a számtani és harmonikus közép közötti egyenlőtlenséget éppen a fordított állítás adódik. Ez gyakori probléma (és hiba) az egyenlőtlenségek bizonyításánál. Ilyen esetben finomabb becslésre van szükség.

Megoldás I.:

Alkalmazzuk ravaszabb módon a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenséget!

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{\frac{x-1}{a}}+\sqrt{b}\cdot\sqrt{\frac{y-1}{b}}.+\sqrt{c}\cdot\sqrt{\frac{z-1}{c}}\le$$
$$\le\sqrt{(a+b+c)\left(\frac{x-1}{a}+\frac{y-1}{b}+\frac{z-1}{c}\right)}$$

Itt a, b, c tetszőleges pozitív valós számok. Ha vetünk egy pillantást az eredeti egyenlőtlenségre akkor látjuk, hogy valószínűleg az a célszerű, ha ebben az esetben az $a+b+c$ az $x+y+z$ megfelelője és ugyanakkor a másik tényező pontosan 1. Az első garantálható azzal, hogy $a=x, b=y, c=z.$ A másodikhoz alakítsuk egy kicsit a törtek összegé és használjuk fel a feladat eredeti feltételeit:

$$\frac{x-1}{x}+\frac{y-1}{y}+\frac{z-1}{z}=3-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=3-2=1.$$

Ezzel az állítást igazoltuk.

Adjunk erre egy másik, az eddigi ötletektől és a tárgyalástól azért nagyon nem eltérő úton, nagyon szellemes megoldást.

Megoldás II.:

A feltétel kínál egy másik helyettesítési lehetőséget.

$$a=\frac{1}{x},\ b=\frac{1}{y},\ c=\frac{1}{z}.$$

A bizonyítandó egyenlőtlenség:

$$\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\ge\sqrt{\frac{1-a}{a}}+\sqrt{\frac{1-b}{b}}+\sqrt{\frac{1-c}{c}}.$$

A feltétel így $a+b+c=2,$ vagyis $\frac{a+b+c}{2}=1.$ Írjuk most be ezt a kifejezést a jobboldali gyökök alá és alkalmazzuk a Cauchy-Schwarz-féle egyenlőtlenséget..

$$\sqrt{\frac{\frac{a+b+c}{2}-a}{a}}+\sqrt{\frac{\frac{a+b+c}{2}-b}{b}}+\sqrt{\frac{\frac{a+b+c}{2}-c}{c}}\le\sqrt{\left(3\frac{a+b+c}{2}-a-b-c\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}$$

Itt a felső becslésben az első tényező $\frac{a+b+c}{2}=1.$

Ennél a módszernél egyes szituációkban az a, b, c választásával sokféle folytatás lehetséges. Ez is egy másik Titu-lemma lehetne.

Végül, hogy a szokásos megoldási eljárásainkat is tiszteljük még két érdekes feladatot szeretnék tárgyalni.

12. feladat

Legyenek x, y, z olyan pozitív valós számok, amelyekre $x+y+z=xyz.$ Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\le\frac{3}{2}.$$

Csak megemlítem, hogy amennyiben járatosak vagyunk a trigonometriában, a feltétel alapján azonnal kínálkozik a tangenses helyettesítés, amely persze pontosan kezelve a feltételeket és megvizsgálva, hogy az egyenlőségből következik-e, hogy a három hegyesszög összege $\pi,$ adódik a bizonyítás.

Megoldás.:

Most inkább ismét helyettesítünk.

$$a=\frac{1}{x},\ b=\frac{1}{y},\ c=\frac{1}{z}.$$

A feltétel átírható

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{abc},$$

vagyis

$$ab+bc+ca=1.$$

Írjuk át az első tagot a helyettesítéssel és írjunk az 1 helyébe $(ab+bc+ca)$ -t. Ezzel homogén lesz a gyök alatti kifejezés. Ezután alkalmazzuk a számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenséget.

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{a}{\sqrt{a^2+ab+bc+ca}}=$$
$$=a\frac{\sqrt{(a+b)(a+c)}}{(a+b)(a+c)}\le\frac{a}{2}\left(\frac{a+b+a+c}{(a+b)(a+c)}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c}\right)$$

Ezt mindhárom törtre elvégezve és összeadva éppen a bizonyítandó állítást kapjuk.

13. feladat

Legyenek az a,b,c olyan pozitív valós számok, amelyekre teljesül, hogy

$$\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1}\ge 1.$$

Mutassuk meg, hogy $a+b+c\ge ab+bc+ca.$

Megoldás:

Alkalmazzuk a Cauchy-Swarz-egyenlőtlenséget külön-külön az egyes kifejezésekre.

$$(a+b+1)\left(a+b+c^2\right)\ge(a+b+c)^2.$$

Innen kifejezhető az első tört és hasonlóan a többiek is. A három törtet összeadva

$$\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1}\le\frac{a^2+b^2+c^2+2(a+b+c)}{(a+b+c)^2}.$$

Tudjuk, hogy ez legalább 1, ebből

$$ab+bc+ca\le a+b+c\ .$$

A megoldás menetéből látjuk, hogy egyenlőség akkor és csak akkor, ha

$$a=b=c=1.$$

Irodalom:

- Andrescu and Harazi: Note on Algebraic Inequalities (internet)
- Hojoo Lee: Topics in inequalities (internet)
- http//en.vikipedia.com/wiki/Shapiro_inequality
- A.Khrabrov: Shapiro's inequality (internet)
- Problem Shortlist with solutions, IMO 2009
- Schultz János: „Jó az öreg a háznál…", Matematika Tanítása 2008/4