111 FELADAT ALGEBRAI EGYENLŐTLENSÉGEKRE

Vegyes feladatok különböző megoldási módszerekre

MEGOLDÁSOK

1.

a) Vegyük észre, hogy

$$\frac{k}{(k+1)!}=\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!},$$

így

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{2006}{2007!}=\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{2006!}-\frac{1}{2007!}=1-\frac{1}{2007!}<1.$$

b) Vegyük észre, hogy

$$1+\frac{1}{k\left(k+2\right)}=\frac{k^2+2k+1}{k\left(k+2\right)}=\frac{\left(k+1\right)^2}{k\left(k+2\right)},$$

ezért a bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldalán álló kifejezést átalakítva:

$$\frac{2^2\cdot3^2\cdot4^2\cdot\ldots\cdot2007^2\cdot2008^2}{2\cdot3^2\cdot4^2\cdot\ldots\cdot2007^2\cdot2008\cdot2009}=\frac{2\cdot2008}{2009}<2.$$

c) Tudjuk, hogy

$$1+2+\ldots+n=\frac{n\left(n+1\right)}{2},$$

ezért

$$\frac{1}{1+2+\ldots+n}=\frac{2}{n\left(n+1\right)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),$$

így a bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldalán szereplő összeg:

$$1+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2006}-\frac{1}{2007}+\frac{1}{2007}-\frac{1}{2008}\right)=1+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2008}\right)<2.$$

2.

a) Jelöljük a bal oldalon szereplő szorzatot a-val és tekintsük az alábbi szorzatokat:

$$b=\frac{8001}{8000}\cdot\frac{7998}{7997}\cdot\frac{7995}{7994}\cdot\ldots\cdot\frac{1005}{1004}\cdot\frac{1002}{1001},\ c=\frac{8002}{8001}\cdot\frac{7999}{7998}\cdot\frac{7996}{7995}\cdot\ldots\cdot\frac{1006}{1005}\cdot\frac{1003}{1002}.$$

Mivel

$$\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}$$

nagyobb n-re kisebb értéket ad, ha n pozitív egész, így könnyű látni, hogy $a > b > c$. Szorozzuk össze az a, b, c kifejezéseket! Kapjuk, hogy

$$a^3 > abc = \frac{8002}{1000} > 8,$$

ahonnan nyomban adódik az állítás.

b) Legyen $n = 2007$ és tekintsük az

$$S_n = \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) + \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \ldots + \frac{1}{3n}\right) + \left(\frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \ldots + \frac{1}{4n}\right)$$

összeget!

Vegyük észre, hogy

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} < \frac{n}{n+1} < 1,$$

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \ldots + \frac{1}{3n} < \frac{n}{2n+1} < \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \ldots + \frac{1}{4n} < \frac{n}{3n+1} < \frac{1}{3}.$$

A megfelelő oldalak összeadása után adódik, hogy

$$\frac{13}{12} < S_n < \frac{11}{6}.$$

c) Legyen

$$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{99}{100},$$

ekkor

$$\frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3^2-1}{4^2} \cdot \ldots \cdot \frac{99^2-1}{100^2} < x^2 < \frac{1^2}{2^2-1} \cdot \frac{3^2}{4^2-1} \cdot \ldots \cdot \frac{99^2}{100^2-1},$$

$$\frac{1}{2^2} \cdot \frac{4 \cdot 2}{4^2} \cdot \frac{6 \cdot 4}{6^2} \cdot \ldots \cdot \frac{100 \cdot 98}{100^2} < x^2 < \frac{1}{3 \cdot 1} \cdot \frac{3^2}{5 \cdot 3} \cdot \frac{5^2}{7 \cdot 5} \cdot \ldots \cdot \frac{99^2}{101 \cdot 99},$$

$$\frac{1}{200} < x^2 < \frac{1}{101},$$

$$\frac{1}{15} < \frac{1}{\sqrt{200}} < x < \frac{1}{\sqrt{101}} < \frac{1}{10}.$$

3.

Tekintsük az alábbiakat:

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}}=\sqrt{k}\cdot\frac{1}{(k+1)k}=\sqrt{k}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\sqrt{k}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)=\left(1+\sqrt{\frac{k}{k+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)<$$

$$<2\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right).$$

Így akkor

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}<2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=2\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)<2.$$

4.

Mindkét esetben azt fogjuk felhasználni, hogy

$$|x|+|y|\geq|x+y|,$$

ami az ún. háromszög-egyenlőtlenség és négyzetre emeléssel egyszerűen igazolható. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha x és y azonos előjelű.
Tekintsük a számegyenesen azokat a helyeket, ahol az abszolút-érték jeleken belüli kifejezés értéke 0 és ennek megfelelően végezzük az alábbi becsléseket:

a)

$$f(x)=|x+1|+|2-x|+|x|\geq|x+1+2-x|+|x|=3+|x|\geq 3,$$

továbbá egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $x=0$, ez a minimum helye.

b)

$$g(x)=|x+1|+|7-x|+|x-2|+|3-x|\geq|x+1+7-x|+|x-2+3-x|=8+1=9,$$

továbbá egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $-1\leq x\leq 7$ és $2\leq x\leq 3$, azaz $2\leq x\leq 3$, így ezek mindannyian minimum helyek.

Megjegyzés:

A fent leírt módon kereshető meg az

$$f(x)=|x-a_1|+|x-a_2|+\ldots+|x-a_n|$$

függvény minimuma, ahol az a_i -k adott valós számok. Páratlan n-re az a) esettel, páros n-re pedig a b) esettel analóg eredmény adódik.

5.

Jelöljük a számokat a-val és b-vel, ahol $a>0, b>0$. A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt

$$\frac{(a+b)^2}{4} \geq ab > a+b,$$

ahonnan

$$(a+b)^2 > 4(a+b) \Leftrightarrow a+b>4.$$

6.*

a) Fel fogjuk használni azt a könnyen igazolható állítást, hogy $x, y>0$ esetén

$$4 \leq (x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right).$$

Innen

$$\frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right).$$

Vegyük észre, hogy akkor

$$\frac{ab}{a+b+2c} = \frac{ab}{a+c+b+c} \leq \frac{ab}{4}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}\right),$$
$$\frac{bc}{b+c+2a} \leq \frac{bc}{4}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+a}\right),$$
$$\frac{ca}{c+a+2b} \leq \frac{ca}{4}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+a}\right).$$

Összeadva a három egyenlőtlenséget kapjuk a bizonyítandó állítást. Egyenlőség pontosan $a=b=c$ esetén áll fenn.

b) Az a) részben látott egyenlőtlenséget alkalmazva:

$$\frac{4}{x+y} \leq \frac{1}{x}+\frac{1}{y},$$

így

$$\frac{4a}{b+c} \leq \frac{a}{b}+\frac{b}{c},$$
$$\frac{4b}{c+a} \leq \frac{b}{c}+\frac{b}{a},$$
$$\frac{4c}{a+b} \leq \frac{c}{a}+\frac{c}{b}.$$

Összeadva a három egyenlőtlenséget kapjuk a bizonyítandó állítást. Egyenlőség pontosan $a=b=c$ esetén áll fenn.

7.*

a) Jelöljük az a_i számok közül a legnagyobbat a-val és legyen

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n},$$

ekkor

$$\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n} - A_n^2 \le aA_n - A_n^2 = \frac{a^2}{4} - \left(\frac{a}{2} - A_n\right)^2 \le \frac{a^2}{4},$$

hiszen $a_i^2 \le aa_i$. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha egyrészt $a_i^2 = aa_i$, azaz minden i-re $a_i = 0$ vagy $a_i = a$, másrészt $A_n = a/2$. Ez kétféleképpen lehetséges: minden a_i 0-val egyenlő, vagy n páros és $n/2$ darab a_i 0-val, $n/2$ darab pedig a-val egyenlő, ahol $a > 0$.

b) A bizonyítandó írható

$$\frac{\sqrt{a_1 a_n} + \sqrt{a_1 a_n} + a_2 + ... + a_{n-1}}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$$

alakban. Ez pedig a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt igaz.

c) Feltehetjük, hogy $a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_n \ge 0$. Ekkor $i < j$ esetén

$$|a_i - a_j| = a_i - a_j \Rightarrow |a_1 - a_k| + |a_k - a_n| = a_1 - a_n$$

következésképpen

$$\sum_{i<j} |a_i - a_j| \ge (n-1)(a_1 - a_n) \ .$$

Világos az is, hogy

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \ge a_n \ ,$$

így elegendő megmutatni, hogy

$$a_n + \frac{1}{n}(n-1)(a_1 - a_n) \ge \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \ ,$$

azaz

$$na_n + (n-1)(a_1 - a_n) \ge a_1 + a_2 + ... + a_n,$$

$$a_n + (n-1)a_1 \ge a_1 + a_2 + ... + a_n.$$

Ez a mondottak miatt teljesül, így a feladatot megoldottuk.

8.

Vegyük észre, hogy

$$f(x)=\left(x^2+3x\right)^2+2\left(x^2+3x\right)=\left(x^2+3x\right)\left(x^2+3x+2\right)=\left(x^2+3x+1\right)^2-1\geq -1\,.$$

Ebből világos, hogy $f(x)$ minimális értéke -1, melyet ott vesz fel, ahol

$$x^2+3x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}\,.$$

9.
Vezessük be az $y=2u$ és $z=3v$ helyettesítéseket, ekkor az

$$x^2+u^2+v^2=1$$

feltétel mellet kell megkeresni az $x^2+4u^2+9v^2$ kifejezés szélső értékeit. Mivel

$$x^2+4u^2+9v^2=1+3u^2+8v^2=1+3u^2+8\left(1-x^2-u^2\right)=9-5u^2-8x^2\,,$$

így azonnal leolvasható, hogy a minimum értéke 1, a maximum értéke pedig 9. Minimális akkor lesz, ha $u=v=0$, $|x|=1$, maximális pedig akkor, ha $u=x=0$, $|v|=1$.

10.
Vegyük észre, hogy

$$(x+y)^4\leq (x-y)^4+(x+y)^4=2\left(x^4+y^4+6x^2y^2\right),$$

így

$$K\leq 6\left(a^4+b^4+c^4+d^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2a^2d^2+2b^2c^2+2b^2d^2+2c^2d^2\right)=6\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2=6$$

K maximális értéke tehát 6, melyet akkor vesz fel, ha $a=b=c=d=\frac{1}{2}$ vagy $-\frac{1}{2}$.

11.
Nyilvánvaló, hogy

$$0<a,b,c,d<1.$$

Elvégezve a műveleteket:

$$ab+cd+ad+ac+bc+bd-abc-abd-acd-bcd+abcd\leq\frac{5}{16}+abcd\,,$$

$$ab(1-c-d)+cd(1-a-b)+(a+b)(c+d)\leq\frac{5}{16}\,,$$

$$ab(a+b)+cd(c+d)+(a+b)(c+d)\leq\frac{5}{16}\,,$$

hiszen $a+b+c+d=1$.
Könnyű látni, hogy

$$ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2, \qquad cd \le \left(\frac{c+d}{2}\right)^2.$$

Legyen $a+b=x$ és $c+d=y$, ekkor $x+y=1$, továbbá elegendő igazolnunk, hogy

$$\frac{x^3+y^3}{4}+xy \le \frac{5}{16}.$$

Mivel

$$x^3+y^3=(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right),$$

Így

$$\frac{x^2-xy+y^2}{4}+xy \le \frac{5}{16},$$

$$(x+y)^2+xy \le \frac{5}{4},$$

$$xy \le \frac{1}{4}=\left(\frac{x+y}{2}\right)^2,$$

ami igaz. Visszafelé haladva világos, hogy akkor az eredeti egyenlőtlenség is teljesülni fog és egyenlőség pontosan akkor ál fenn, ha $a=b=c=d=\frac{1}{4}$.

12.

a) Mivel $0 \le x_i \le 1$, így

$$x_i(1-x_i) \ge 0,$$
$$x_i \ge x_i^2,$$

ahonnan

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \ge \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Legyen $\sum_{i=1}^{n} x_i = a$, ekkor elegendő belátnunk, hogy

$$(a+1)^2 \ge 4a \Leftrightarrow (a-1)^2 \ge 0,$$

amely nyilvánvalóan igaz. Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a=1$, vagyis valamely $x_i=1$, minden másik pedig 0.

b) Induljunk ki a nyilvánvalóan igaz

$$\left(1-x^2\right)(1-y) \ge 0$$

egyenlőtlenségből! Rendezés után:

$$1+x^2y \geq x^2+y,$$

továbbá hasonlóan kaphatjuk, hogy

$$1+y^2z \geq y^2+z,$$

$$1+z^2x \geq z^2+x.$$

Összeadás után:

$$3+x^2y+y^2z+z^2x \geq x^2+y^2+z^2+x+y+z,$$

így elegendő igazolnunk, hogy

$$(\text{-}) \qquad x^2+y^2+z^2+x+y+z \geq 2x^3+2y^3+2z^3.$$

Mivel

$$x^2+x-2x^3 = x\left(x+1-2x^2\right) = x(1-x)(1+2x) \geq 0,$$

Ezért az analóg egyenlőtlenségek felírása, majd a kapottak megfelelő oldalainak összeadása után a (-) egyenlőtlenség adódik.
Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $x=y=z=1$, vagy pedig két változó értéke1, a harmadiké pedig 0.

Megjegyzés:
A megoldásokban szereplő ötlet jól használható minden olyan esetben, ahol a változók zárt intervallumok elemei.

13.
a)
Legyen

$$x_1+x_3+x_5+\ldots+x_{2007}=a, \qquad x_2+x_4+x_6+\ldots+x_{2006}=b.$$

Ekkor, felhasználva a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$S \leq ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Egyenlőséghez szükséges, hogy $a=b=\frac{1}{2}$ teljesüljön, ami pl. $x_1=x_2=\frac{1}{2}$ és $x_3=x_4=\ldots=x_{2007}=0$ esetén megvalósul, ezért kimondhatjuk, hogy S maximális értéke $\frac{1}{4}$.

b)*
Vegyük észre, hogy

$$S = x_1(1-x_2)+x_2(1-x_3)+...+x_{2008}(1-x_1),$$

ahol $0 \le x_i \le 1$ és $0 \le 1-x_j \le 1$. Ha $0 \le a \le 1$ és $0 \le b \le 1$, akkor

$$ab \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2},$$

felhasználva a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget, ezért

$$S \le \frac{x_1+x_2+...+x_{2008}+1-x_2+1-x_3+...+1-x_{2008}+1-x_1}{2} = 1004.$$

S maximális értéke 1004 lesz, amit pl. akkor vesz fel, ha $x_{2k+1}=1, x_{2k}=0$.

14.
Ha a jobb oldalon pontosan egy vagy három tényező negatív, akkor készen vagyunk. Két negatív tényező nem lehetséges, mert pl. $a+b-c<0$ és $-a+b+c<0$ esetén összeadás után $b<0$ adódna. Végül, ha a jobb oldalon mindhárom tényező pozitív, akkor

$$\begin{aligned} a^2 &\ge a^2-(b-c)^2 \ge 0,\\ b^2 &\ge b^2-(c-a)^2 \ge 0,\\ c^2 &\ge c^2-(a-b)^2 \ge 0, \end{aligned}$$

így a megfelelő oldalak összeszorzásával:

$$a^2b^2c^2 \ge (a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2,$$

ahonnan a bizonyítandó azonnal adódik. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha a három változó egyenlő.

15.*
Legyen $a=\frac{x}{y}, b=\frac{y}{z}, c=\frac{z}{x}$, ekkor az egyenlőtlenség átírható a következő alakba:

$$\left(\frac{x}{y}-1+\frac{z}{y}\right)\left(\frac{y}{z}-1+\frac{x}{z}\right)\left(\frac{z}{x}-1+\frac{y}{x}\right) \le 1 \Leftrightarrow (x-y+z)(y-z+x)(z-x+y) \le xyz,$$

ami éppen a 14. feladat állítása! Egyenlőség csakis akkor áll fenn, ha $a=b=c=1$.

16.**
a)

A változók ciklikus cseréjével a bal oldalon lévő kifejezések egymásba mennek át, így feltehető, hogy $x \ge y \ge z$. Átalakítás után:

$$(x-y)\left[x^r(x-z)-y^r(y-z)\right]+z^r(x-z)(y-z)\ge 0.$$

Mivel $x^r \ge y^r$ és $x-z \ge y-z \ge 0$, ezért itt a bal oldalon mindkét tag nem negatív!
Egyenlőség pontosan akkor áll a mondott feltevés mellett, ha $x=y=z$ vagy $x=y, z=0$.
Fontos az a speciális eset, amikor $r=1$. Átrendezés után:

$$x^3+y^3+z^3+3xyz \ge x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y.$$

b)
A bizonyítandó írható a következő módon:

$$4a^3+4b^3+4c^3+15abc \ge (a+b+c)^3.$$

A köbre emelés elvégzése, majd rendezési lépések után:

$$a^3+b^3+c^3+3abc \ge a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2b+c^2a,$$

ami épp a Schur-egyenlőtlenség átrendezett alakja $r=1$ kitevő esetén!
Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a=b=c=\frac{1}{3}$, vagy két változó értéke $\frac{1}{2}$, a harmadiké pedig 0.

Megjegyzés:
A feladat megoldható a 28. feladat megoldásaiban leírt módszerek alkalmazásával is.

17.
Jelöljük a feladatban szereplő összeget S-sel. Nyilvánvaló, hogy

$$S > \frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1.$$

Másrészt $0<a<b$ és $c>0$ esetén

$$\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+c}.$$

Szorzás, majd rendezés után:

$$0<c(b-a),$$

amely nyilván igaz, így

$$S < \frac{a+c}{a+b+c} + \frac{b+a}{a+b+c} + \frac{c+b}{a+b+c} = 2 .$$

Egyik oldalon szereplő egyenlőtlenség sem élesíthető. Legyen pl. $b = xa$ és $c = x^2 a$, ahol $x > 0$, ekkor

$$S = \frac{2}{1+x} + \frac{x^2}{1+x^2} .$$

Ha $x \to 0$, akkor $S \to 2$, ha pedig $x \to \infty$, akkor $S \to 1$.

Megjegyzés:
A feladatban szereplő egyenlőtlenség könnyen általánosítható.

18.
Mivel $(a+b)^2 > a^2 + b^2$ és $(c+d)^2 = 2c^2 + 2d^2 - (c-d)^2 \le 2(c^2 + d^2)$, így

$$\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2} < \frac{2(a+b)^2}{(c+d)^2} = 2\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^2 < 2 \cdot 2^2 = 8 .$$

19.*
Az a) ill. b) rész bizonyítása szorosan összefügg!
b) Végezzük el a következő helyettesítéseket: $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$.
Ekkor pl.

$$\frac{a^2}{2a^2+bc} = \frac{1}{2+\frac{bc}{a^2}} = \frac{\frac{1}{bc}}{\frac{1}{a^2}+\frac{2}{bc}} = \frac{yz}{x^2+2yz} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x^2}{x^2+2yz}\right).$$

Az analóg összefüggések felírása és behelyettesítés után, rendezést követően a bizonyítandó:

$$1 \le \frac{x^2}{x^2+2yz} + \frac{y^2}{y^2+2zx} + \frac{z^2}{z^2+2xy} < 3 ,$$

ami épp az a) részben kitűzött egyenlőtlenség!
Mivel minden tört 1-nél kisebb, így a jobb oldali egyenlőtlenség nyilvánvaló.
A bal oldali egyenlőtlenség igazolásához vegyük észre, hogy pl.

$$2yz \le y^2 + z^2 \Leftrightarrow 0 \le (y-z)^2 ,$$

így

$$\frac{x^2}{x^2+2yz} \ge \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2} .$$

A másik két törtre a hasonló egyenlőtlenségek felírása, majd összegzés után adódik a bizonyítandó. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha

$$x = y = z \Leftrightarrow a = b = c.$$

20.

Vegyük észre, hogy pl.

$$\frac{2}{(a+1)^2 + b^2 + 1} = \frac{2}{a^2 + b^2 + 2a + 2} \le \frac{1}{ab + a + 1},$$

hiszen

$$a^2 + b^2 \ge 2ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \ge 0.$$

Legyen

$$a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x},$$

akkor

$$\frac{1}{ab + a + 1} = \frac{1}{\frac{x}{z} + \frac{x}{y} + 1} = \frac{yz}{xy + yz + zx}.$$

A másik két tört esetére is alkalmazva a gondolatmenetet készen vagyunk, hiszen a három tört összege 1 lesz. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a = b = c = 1$.

21.*

A feladat feltételeiből következik, hogy $0 \le x, y, z \le 1$.

A bal oldalon szereplő kifejezés becsléséhez először belátjuk, hogy $0 < a \le b$ és $c \ge 0$ esetén

$$\frac{a}{b} \le \frac{a+c}{b+c}.$$

Szorzás, majd rendezés után:

$$0 \le c(b-a),$$

amely nyilván igaz..

Alkalmazva a fenti egyenlőtlenséget:

$$\frac{1}{1+x} \le \frac{1+y+z}{1+x+y+z} = \frac{1+y+z}{2},$$

és hasonlóan

$$\frac{1}{1+y} \le \frac{1+x+z}{2},$$

$$\frac{1}{1+z} \le \frac{1+x+y}{2}.$$

Összegzéssel:

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}\le\frac{3+2(x+y+z)}{2}=\frac{5}{2}.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha két változó értéke 0, a harmadiké pedig 1. A másik egyenlőtlenség igazolásához vegyük észre, hogy $0\le x\le 1$ esetén

$$\frac{2-x}{2}\le\frac{1}{1+x^2}.$$

Rendezést követően:

$$(2-x)(1+x^2)\le 2,$$

$$2+2x^2-x-x^3\le 2,$$

$$-x(1-x)^2\le 0,$$

amely nyilván igaz. Ez alapján akkor teljesülnek a következők is:

$$\frac{2-y}{2}\le\frac{1}{1+y^2}\ \text{ és }\ \frac{2-z}{2}\le\frac{1}{1+z^2},$$

ahonnan

$$\frac{5}{2}=\frac{6-(x+y+z)}{2}\le\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{1+z^2}.$$

Könnyen leolvasható, hogy egyenlőség pontosan akkor áll fenn, mint az előző egyenlőtlenség esetében.

22.*

Jelölje $b_1,b_2,\ldots,b_n$ az a_i számok növekvő sorrendbe rendezett sorozatát! Ekkor

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}=\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\ldots+\frac{1}{b_n}$$

illetve

$$\frac{i}{a_1+a_2+\ldots+a_i}\le\frac{i}{b_1+b_2+\ldots+b_i}.$$

Elegendő megmutatni, hogy

$$(\text{-})\qquad \frac{1}{b_1}+\frac{2}{b_1+b_2}+\ldots+\frac{n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}<4\left(\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\ldots+\frac{1}{b_n}\right).$$

A bal oldalon lévő tagokat becsüljük felülről az alábbiak szerint:

$$\frac{2}{b_1+b_2} \le \frac{2}{b_1+b_1} = \frac{1}{b_1}$$

illetve $k \ge 2$ esetén

$$\frac{2k-1}{b_1+b_2+...+b_{2k-1}} < \frac{2k-1}{b_k+...+b_{2k-1}} \le \frac{2k-1}{kb_{k-1}} < \frac{2}{b_{k-1}},$$

$$\frac{2k}{b_1+b_2+...+b_{2k}} < \frac{2k}{b_{k+1}+...+b_{2k}} \le \frac{2k}{kb_k} = \frac{2}{b_k}.$$

Így akkor a (-) bal oldalán álló mennyiség kisebb lesz, mint

$$\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_1}+\frac{2}{b_1}+\frac{2}{b_2}+\frac{2}{b_2}+\frac{2}{b_3}+\frac{2}{b_3}+... = 4\left(\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\frac{1}{b_3}+...+\frac{1}{b_n}\right).$$

Ezzel a feladatot megoldottuk.

Megjegyzés:
Jóval erősebb eszközökkel belátható, hogy a 4 helyett a jobb oldalon 2-es szorzó mellett is érvényes az egyenlőtlenség, de 2-nél kisebb szám esetén már nem feltétlenül.

23.**

Ha minden változó egyenlő $\frac{1}{n}$-nel, akkor egyenlőség áll fenn. Ha van két különböző, akkor legyenek azok $0 < x < \frac{1}{n} < y < 1$.

Mivel

$$xy = \frac{(x+y)^2}{4} - \frac{(x-y)^2}{4},$$

továbbá

$$\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\left(\frac{1}{y^2}-1\right) = \frac{(1-x^2)(1-y^2)}{x^2y^2} = \frac{1-(x+y)^2+2xy}{x^2y^2}+1 = \frac{1-(x+y)^2}{x^2y^2}+\frac{2}{xy}+1,$$

így az $x+y$ összeget állandó értéken tartva, ha x-et és y-t egymáshoz közelítjük, akkor a szorzat értéke csökkenni fog! Ha x vagy y valamelyike eléri az $\frac{1}{n}$ értéket, akkor vizsgáljuk meg az új szám n-est. Amennyiben a számok közül nem mind egyenlő $\frac{1}{n}$-nel, akkor ismételjük meg rájuk a fent leírt eljárást. Mivel véges sok szám van és az $\frac{1}{n}$-től különbözők száma szigorúan monoton csökken az eljárás során, így véges sok lépés után minden szám egyenlő lesz, miközben a bal oldalon szereplő szorzat értéke csökken. Ezzel a feladatot megoldottuk.

24.*
Tekintsük az

$$f(a)=\left(a_1^a+a_2^a+\ldots+a_n^a\right)^{\frac{1}{a}}$$

függvényt, ahol $0<a$. Belátjuk, hogy $0<a<b$ esetén $f(a)>f(b)$, így az első szám lesz a nagyobb. Jelölje a_1 az a_i számok közül a legnagyobbat, ekkor az $x_i=\frac{a_i}{a_1}$ helyettesítést alkalmazva:

$$f(a)=a_1\left(1+x_2^a+\ldots+x_n^a\right)^{\frac{1}{a}}.$$

Vegyük figyelembe, hogy $0<x\le 1$, így $0<a<b$ esetén $x^a\ge x^b$, ezért

$$f(a)\ge a_1\left(1+x_2^b+\ldots+x_n^b\right)^{\frac{1}{a}}>a_1\left(1+x_2^b+\ldots+x_n^b\right)^{\frac{1}{b}}=f(b),$$

amint azt állítottuk.

25.*
Először bebizonyítjuk, hogy $x,y>0$ esetén

$$(\text{-})\qquad \left(\frac{x}{y}\right)^{x-y}\ge 1.$$

Világos, hogy $x=y$ esetén egyenlőség áll fenn. Ha $x>y$, akkor legyen $x=y+d$, ahol $d>0$, így

$$\left(\frac{y+d}{y}\right)^{d}=\left(1+\frac{d}{y}\right)^{d}>1^d=1.$$

Ha $x<y$, akkor pedig

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{x-y}=\left(\frac{y}{x}\right)^{y-x}$$

miatt az előzőleg már igazolt alakhoz jutunk.
Alkalmazva a (-) egyenlőtlenséget az a, b, c pozitív számokra, kaphatjuk, hogy

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}\left(\frac{b}{c}\right)^{b-c}\left(\frac{c}{a}\right)^{c-a}\ge 1\Leftrightarrow a^{2a}b^{2b}c^{2c}\ge a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b},$$

ami épp a bizonyítandó állítás. Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a=b=c$.

26.*

Belátjuk, hogy $n\ge 2$ esetén $a_{n-1}>a_n$, azaz

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{2(n-1)}\right)>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{2n}\right).$$

Átalakításokat végezve:

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}\frac{2n-1}{n-1}>\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}\frac{2n+1}{n},$$

$$\frac{n^{2n}}{\left(n^2-1\right)^n}>\frac{2n+1}{2n-1},$$

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n>1+\frac{2}{2n-1}.$$

A bal oldalt alulról megbecsülhetjük úgy, hogy a binomiális tétel szerint kifejtett alakjának csak az első három tagját írjuk le, így elég belátnunk, hogy

$$1+\binom{n}{1}\frac{1}{n^2-1}+\binom{n}{2}\frac{1}{\left(n^2-1\right)^2}>1+\frac{2}{2n-1}.$$

Újabb átalakításokat végezve:

$$\frac{n}{n^2-1}+\frac{n}{2(n+1)^2(n-1)}>\frac{2}{2n-1},$$

$$\frac{2(n+1)n+n}{2\left(n^2-1\right)(n+1)}>\frac{2}{2n-1},$$

$$\left(2n^2+3n\right)(2n-1)>4\left(n^3+n^2-n-1\right),$$

$$4n^3+4n^2-3n>4n^3+4n^2-4n-4,$$

amely nyilván igaz.

Megjegyzés:

A fentihez hasonló, de technikásabb számolással igazolható, hogy a

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{2n+1}\right)$$

sorozat szigorúan monoton nő!

27.*

Belátjuk, hogyha $n = 2^k - 1$ alakú, akkor elég nagy k-ra s_n túlnő bármely előre rögzített számot. Az összeg becslését a 2-hatványok segítségével az alábbiak szerint végezhetjük:

$$s_n > 0 + \frac{1}{2\lg 4} + \frac{1}{3\lg 4} + \frac{1}{4\lg 8} + \frac{1}{5\lg 8} + \frac{1}{6\lg 8} + \frac{1}{7\lg 8} + \ldots + \frac{1}{\left(2^k - 1\right)\lg 2^k} =$$
$$= \frac{1}{\lg 2}\left(\frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 2} + \frac{1}{4\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3} + \frac{1}{6\cdot 3} + \frac{1}{7\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{\left(2^k - 1\right)\cdot k}\right) >$$
$$> \frac{1}{\lg 2}\left(2\cdot\frac{1}{4\cdot 2} + 4\cdot\frac{1}{8\cdot 3} + \ldots + 2^{k-1}\cdot\frac{1}{2^k\cdot k}\right) = \frac{1}{2\lg 2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k}\right).$$

Ismeretes, hogy a zárójelben szereplő összeg tetszőlegesen nagy lehet (ez pl. a 2-hatványok segítségével a fentihez hasonlóan látható be), így ezzel állításunkat igazoltuk!

28.*

I. megoldás

Belátjuk, hogy a kifejezés legnagyobb értéke $\frac{7}{27}$. Rendezést követően:

$$x(y+z) + yz(1-2x) - \frac{7}{27} \le 0,$$

$$(1-2x)yz + x(1-x) - \frac{7}{27} \le 0.$$

Legyen $yz = t$ és

$$f(t) = (1-2x)t + x - x^2 - \frac{7}{27}.$$

Ekkor

$$f(0) = x - x^2 - \frac{7}{27} = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{108} < 0.$$

Mivel

$$t = yz \le \frac{(y+z)^2}{4} = \frac{(1-x)^2}{4} = t_0$$

esetén

$$f(t_0)=(1-2x)\cdot\frac{(1-x)^2}{4}+x(1-x)-\frac{7}{27},$$

továbbá $f(t)$ elsőfokú függvény, ezért elegendő kimutatnunk, hogy $f(t_0)\le 0$, mert akkor a $[0;t_0]$ intervallumon $f(t)\le 0$, ami épp a bizonyítandó állítás!
Vegyük észre, hogy

$$108f(t_0)=27(1-2x)(1-x)^2+108x(1-x)-28=-54x^3+27x^2-1=-(3x-1)^2(6x+1)\le 0\,!$$

Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $x=\frac{1}{3}$, továbbá $y=z$, azaz $x=y=z=\frac{1}{3}$.

II. megoldás
Az alábbiakban szereplő módszer („változók variálása") igen jól alkalmazható sok 3-változós kifejezés vizsgálatakor.
Legyen

$$f(x,y,z)=xy+yz+zx-2xyz\,!$$

Tegyük fel, hogy $x\ge y\ge z$, ekkor $z\le\frac{1}{3}$. Először igazoljuk, hogy

$$f(x,y,z)\le f\left(\frac{x+y}{2},\frac{x+y}{2},z\right).$$

Kiírva:

$$xy+yz+zx-2xyz\le\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+2\cdot\frac{x+y}{2}z-2\left(\frac{x+y}{2}\right)^2z,$$

$$4xy+4yz+4zx-8xyz\le x^2+2xy+y^2+4xz+4yz-2x^2z-4xyz-2y^2z,$$

$$0\le x^2-2xy+y^2-2x^2z+4xyz-2y^2z,$$

$$0\le(x-y)^2\cdot(1-2z),$$

ami igaz.
Ezek után elegendő megkeresnünk az $f(a,a,1-2a)$ kifejezés maximális értékét, ahol $\frac{1}{3}\le a\le\frac{1}{2}$! Kiírva:

$$f(a,a,1-2a)=a^2+2a(1-2a)-2a^2(1-2a)=4a^3-5a^2+2a=g(a).$$

Mivel $g(a)$ első deriváltja

$$g'(a)=12a^2-10a+2=12\left(a-\frac{1}{3}\right)\left(a-\frac{1}{2}\right),$$

így az adott intervallumon $g'(a) \le 0$, ezért $g(a)$ monoton csökken, következésképpen maximális értékét az $a = \frac{1}{3}$ helyen veszi fel. Ekkor $x = y = z = \frac{1}{3}$, a kifejezés maximuma pedig $\frac{7}{27}$.

29.*
Könnyű látni, hogy $6 \le x, y, z \le 21$. Vezessük be az $a = x - 6, b = y - 6, c = z - 6$ helyettesítéseket, ekkor $0 \le a, b, c \le 15$ és $a + b + c = 30$. A feladatban szereplő szorzatot K-val jelölve:

$$K = (a+10)(b+10)(c+10) = abc + 10(ab + bc + ca) + 100(a + b + c) + 1000 =$$
$$= abc + 5\left[a(b+c) + b(c+a) + c(a+b)\right] + 4000.$$

Az a-ra, b-re és c-re vonatkozó feltételek miatt:

$$a(b+c) \ge 15a,$$
$$b(c+a) \ge 15b,$$
$$c(a+b) \ge 15c.$$

Ezeket összeadva, kihasználva, hogy $a + b + c = 30$, adódik, hogy

$$K \ge abc + 5 \cdot 15 \cdot 30 + 4000 \ge 6250 .$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a = 0, b = c = 15$, illetve a betűk cseréjével kapható esetekben. Ekkor $x = 6, y = z = 21$ stb. Ezzel a feladatot megoldottuk!

A NEVEZETES KÖZEPEK ALKALMAZÁSAI

30.
Mivel
$$a + b + c = 1 \Leftrightarrow 1 + a = (1-b) + (1-c),$$

Így a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt:

$$1 + a \ge 2\sqrt{(1-b)(1-c)},$$
$$1 + b \ge 2\sqrt{(1-a)(1-c)},$$
$$1 + c \ge 2\sqrt{(1-a)(1-b)}.$$

Összeszorozva a fenti egyenlőtlenségek megfelelő oldalait adódik a feladat állítása. Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a=b=c=\frac{1}{3}$.

31.
Elvégezve a műveleteket észrevehetjük, hogy

$$(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)-1,$$

ezért a bizonyítandó:

$$(a+b+c)(ab+bc+ca-2)\ge 3.$$

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt:

$$a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}=3 \text{ és } ab+bc+ca-2\ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}-2=1,$$

ezért készen vagyunk. Egyenlőség csakis akkor áll fenn, ha $a=b=c=1$.

32.*
A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget 3 változóra alkalmazva pl.

$$x^2+\sqrt{x}+\sqrt{x}\ge 3x,$$

így

$$x^2+y^2+z^2+2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)\ge 3(x+y+z)=(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(x+y+z),$$

ahonnan a bizonyítandó azonnal adódik. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha

$$x=y=z=1.$$

33.*
Belátjuk, hogy a kifejezés maximális értéke $\frac{4}{27}$.
Tegyük fel, hogy x a legnagyobb, ekkor $y^2z\le xyz$ és $z^2x\le zx^2$, így

$$x^2y+y^2z+z^2x\le x^2y+xyz+zx^2\le x(x+z)\left(y+\frac{z}{2}\right)=\frac{1}{2}x(x+z)(2y+z)\le\frac{1}{2}\left(\frac{2(x+y+z)}{3}\right)^3=\frac{4}{27}$$

miközben felhasználtuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $z=0$ és $x=2y$, azaz $z=0, y=\frac{1}{3}, x=\frac{2}{3}$, illetve ezek valamely ciklikus cseréjével kapható esetben.

Megjegyzés:
A feladat megoldható a 28. feladat megoldásaiban alkalmazott módszerek segítségével is.

34.*
a) *I. megoldás*
A jobb oldalon:

$$xyz(xy+yz+zx) \le xyz\left(x^2+y^2+z^2\right) = x^3yz + y^3zx + z^3xy\,,$$

mivel közismert, hogy

$$xy+yz+zx \le x^2+y^2+z^2\,.$$

Elég belátnunk, hogy

$$x^4y + y^4z + z^4x \ge x^3yz + y^3zx + z^3xy.$$

Vegyük észre, hogy x^3, y^3, z^3 ill. yz, zx, xy ellentétesen rendezett számhármasok, így a rendezési tétel miatt a jobb oldalon lévő kifejezés nem nagyobb, mint a másik párosítással adódó bal oldali kifejezés. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $x = y = z$.

II. megoldás
Osszuk el mindkét oldalt xyz-vel! Kapjuk, hogy

$$\frac{x^3}{z} + \frac{y^3}{x} + \frac{z^3}{y} \ge xy + yz + zx.$$

Bővítve a bal oldalon álló törteket:

$$\frac{x^4}{xz} + \frac{y^4}{xy} + \frac{z^4}{zy} \ge \frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{xy+yz+zx} \ge xy + yz + zx,$$

miközben felhasználtuk a 46. feladatban szereplő, a Cauchy-egyenlőtlenségből levezethető egyenlőtlenséget.

b) A jobb oldalon:

$$xyz\left(x^2y + y^2z + z^2x\right),$$

ahol

$$x^2y + y^2z + z^2x \le x^3 + y^3 + z^3\,,$$

ami vagy a rendezési tételből az x, y, z és x^2, y^2, z^2 azonosan rendezett számhármasokra hivatkozással, vagy pedig

$$\frac{2x^3+y^3}{3} \geq \sqrt[3]{\left(x^3\right)^2 y^3} = x^2 y$$

stb. miatt a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenségből adódik.
Így elegendő belátnunk, hogy

$$x^5 y + y^5 z + z^5 x \geq x^4 yz + y^4 xz + z^4 xy .$$

Használjuk a rendezési tételt az x^4, y^4, z^4 ill. yz, zx, xy ellentétesen rendezett számhármasokra! Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $x = y = z$.

35.*
Fel fogjuk használni a súlyozott számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget, mely szerint, ha $a_i > 0$ és $s_i > 0$, akkor

$$\frac{s_1 a_1 + s_2 a_2 + \ldots + s_n a_n}{s_1 + s_2 + \ldots + s_n} \geq \left(a_1^{s_1} a_2^{s_2} \ldots a_n^{s_n}\right)^{\frac{1}{s_1+s_2+\ldots+s_n}},$$

ahol az s_i-k az ún. súlyok. (Ha $s_1 = s_2 = \ldots = s_n = 1$, akkor a közönséges számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget nyerjük.)
Ha

$$x_i = \frac{s_i}{\sum_{i=1}^{n} s_i},$$

akkor a gyakran alkalmazható

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n \geq a_1^{x_1} a_2^{x_n} \ldots a_n^{x_n}$$

alakhoz jutunk, ahol $x_i > 0$ és $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.
Legyen

$$a_1 = a^4 b, a_2 = b^4 c, a_3 = c^4 d, a_4 = d^4 a,$$

ekkor $a^2 bcd$ becsléséhez teljesülnie kell a következőknek:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_4 = 2, \\ 4x_2 + x_1 = 1, \\ 4x_3 + x_2 = 1, \\ 4x_4 + x_3 = 1, \end{cases}$$

ahol jól láthatóan $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$.

A fenti lineáris egyenletrendszert megoldva

$$x_1=\frac{23}{51}, x_2=\frac{7}{51}, x_3=\frac{11}{51}, x_4=\frac{10}{51},$$

vagyis

$$\frac{23}{51}a^4b+\frac{7}{51}b^4c+\frac{11}{51}c^4d+\frac{10}{51}d^4a\geq a^2bcd\,.$$

Az eredeti egyenlőtlenség jobb oldalának másik három tagjára is felírva a megfelelő becsléseket, majd a 4 egyenlőtlenség megfelelő oldalait összeadva adódik a feladat állítása. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a=b=c=d$.

36.
A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt

$$a+b\geq 2\sqrt{ab}\,,$$

Így a bal oldalt tagonként becsülve, az legalább

$$\sqrt{2}\left(\sqrt[4]{\frac{ab}{c^2}}+\sqrt[4]{\frac{bc}{a^2}}+\sqrt[4]{\frac{ca}{b^2}}\right).$$

A zárójelben álló kifejezésre alkalmazva a 3-változós számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget adódik, hogy értéke legalább 3, amiből következik a feladat állítása. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a=b=c$.

Megjegyzés:
A feladatban szereplő egyenlőtlenség általánosítható *n* darab változóra.

37.*
Vegyük észre, hogy pl.

$$\frac{1}{3}+x^2=\frac{1}{3}(x+y+z)^2+x^2\geq xy+yz+zx+x^2=(x+y)(x+z),$$

ugyanis egyszerű számolással belátható, hogy

$$(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca).$$

Elegendő ezért igazolnunk, hogy

$$(*)\qquad \frac{xy}{\sqrt{(z+x)(z+y)}}+\frac{yz}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}+\frac{zx}{\sqrt{(y+z)(y+x)}}\leq\frac{1}{2}\,.$$

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt pl.

$$\frac{1}{\sqrt{(z+x)(x+y)}} \le \frac{\frac{1}{x+y}+\frac{1}{z+x}}{2},$$

így kapjuk, hogy (-) bal oldalán álló kifejezés 2-szerese legfeljebb

$$yz\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}\right)+xy\left(\frac{1}{z+x}+\frac{1}{z+y}\right)+zx\left(\frac{1}{y+z}+\frac{1}{x+y}\right),$$

amit átalakítva:

$$\frac{1}{x+y}(yz+zx)+\frac{1}{x+z}(yz+xy)+\frac{1}{z+y}(xy+zx)=z+y+x=1,$$

ezért a (-) egyenlőtlenség igaz, következésképpen az eredeti is az. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $x=y=z=\frac{1}{3}$.

38.*
Felhasználjuk, hogy

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).$$

A bizonyítandót átalakítva:

$$\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}-6+\frac{9(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}-27\ge 0,$$

$$2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\left(\frac{a+b+c}{abc}-\frac{9}{a^2+b^2+c^2}\right)\ge 0.$$

Ismert, hogy az első zárójelen belül nem negatív szám áll, így elegendő belátni, hogy

$$\frac{a+b+c}{abc}-\frac{9}{a^2+b^2+c^2}\ge 0,$$

$$(\text{-})\qquad (a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\ge 9abc.$$

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt:

$$a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc} \text{ ill. } a^2+b^2+c^2\ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2},$$

amelyek megfelelő oldalainak összeszorzásával adódik a (∗)-gal jelölt egyenlőtlenség, amivel az eredeti állítást is igazoltuk. Egyenlőség csakis akkor áll fenn, ha $a=b=c$.

39.*
Szorozzunk $(1+abc)$-vel és adjunk mindkét oldalhoz 3-at! Kapjuk:

$$\frac{1+abc+a+ab}{a(1+b)}+\frac{1+abc+b+bc}{b(1+c)}+\frac{1+abc+c+ca}{c(1+a)}\geq 6\,,$$

$$\frac{1+a}{a(1+b)}+\frac{ab(1+c)}{a(1+b)}+\frac{1+b}{b(1+c)}+\frac{bc(1+a)}{b(1+c)}+\frac{1+c}{c(1+a)}+\frac{ac(1+b)}{c(1+a)}\geq 6\,.$$

Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget a bal oldalon szereplő 6 tagra és készen is vagyunk! Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a=b=c=1$, bár ennek kiszámolása kissé hosszadalmas vizsgálatokat igényel.

40.**
a) Legyen

$$x=\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}},\, y=\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}},\, z=\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\,.$$

Világos, hogy $0<x,y,z<1$, a bizonyítandó pedig:

$$x+y+z\geq 1\,.$$

Vegyük észre, hogy

$$\frac{a^2}{8bc}=\frac{1-x^2}{x^2},\frac{b^2}{8ca}=\frac{1-y^2}{y^2},\frac{c^2}{8ab}=\frac{1-z^2}{z^2}$$

miatt

$$\frac{1}{512}=\frac{x^2}{1-x^2}\cdot\frac{y^2}{1-y^2}\cdot\frac{z^2}{1-z^2}\Leftrightarrow\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)\left(1-z^2\right)=512x^2y^2z^2\,.$$

Tegyük fel, hogy $x+y+z<1$! Ekkor, a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség felhasználásával:

$$\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)\left(1-z^2\right)>\left((x+y+z)^2-x^2\right)\left((x+y+z)^2-y^2\right)\left((x+y+z)^2-z^2\right)=$$
$$=(x+x+y+z)(y+z)(x+y+y+z)(x+z)(x+y+z+z)(x+y)\geq 4x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}z^{\frac{1}{4}}\cdot 2y^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}\cdot$$
$$\cdot 4x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{4}}\cdot 2x^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}\cdot 4x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}z^{\frac{1}{2}}\cdot 2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}=512x^2y^2z^2$$

ami ellentmondás, így a bizonyítandó igaz. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha

$$x=y=z=\frac{1}{3}\Leftrightarrow a=b=c.$$

b) Vezessük be az $x=\frac{2a}{b},y=\frac{2b}{c},z=\frac{2c}{a}$ helyettesítéseket, ahol $a,b,c>0$! Ekkor pl.

$$\frac{1}{\sqrt{2x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{2\cdot\frac{4a^2}{b^2}+1}}=\frac{b}{\sqrt{8a^2+b^2}},$$

így a bizonyítandó:

$$\frac{b}{\sqrt{8a^2+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{8b^2+c^2}}+\frac{a}{\sqrt{8c^2+a^2}}\geq 1.$$

Legyen

$$X=\frac{b}{\sqrt{8a^2+b^2}},Y=\frac{c}{\sqrt{8b^2+c^2}},Z=\frac{a}{\sqrt{8c^2+a^2}}!$$

Ekkor azt kell belátnunk, hogy $X+Y+Z\geq 1$. Mivel pl.

$$8\frac{a^2}{b^2}=\frac{1}{X^2}-1=\frac{1-X^2}{X^2},$$

ezért

$$512=\frac{\left(1-X^2\right)\left(1-Y^2\right)\left(1-Z^2\right)}{X^2Y^2Z^2}.$$

Innen a megoldás szó szerint úgy fejezhető be, mint azt az a) részben láttuk! Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha

$$X=Y=Z\Leftrightarrow a=b=c\Leftrightarrow x=y=z=2.$$

41.**

Elvégezve a műveleteket, a bal oldalon lévő kifejezésből

$$x^2y^2z^2+2\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)+4\left(x^2+y^2+z^2\right)+8$$

adódik. Ismeretes, hogy

$$xy+yz+zx\leq x^2+y^2+z^2.$$

Vegyük még figyelembe, hogy

$$4xy\leq 2x^2y^2+2\Leftrightarrow 0\leq 2(xy-1)^2,$$

így

$$4(xy+yz+zx)\leq 2\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)+6,$$

ahol egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $x = y = z = 1$.
Elegendő ezek után belátnunk, hogy

$$x^2y^2z^2 + x^2 + y^2 + z^2 + 2 \ge 2(xy + yz + zx).$$

Tekintsük a pozitív a, b, c számokra érvényes, a 14. feladatban szereplő

$$abc \ge (a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$$

egyenlőtlenséget! Átrendezés után

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \ge ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a),$$

majd, felhasználva a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \ge 2(ab)^{3/2} + 2(bc)^{3/2} + 2(ca)^{3/2}.$$

Legyen most $a = x^{2/3}, b = y^{2/3}, c = z^{2/3}$, így kaphatjuk, hogy

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3(xyz)^{2/3} \ge 2(xy + yz + zx).$$

Végül belátjuk, hogy

$$x^2y^2z^2 + x^2 + y^2 + z^2 + 2 \ge x^2 + y^2 + z^2 + 3(xyz)^{2/3}.$$

Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget az

$$x^2y^2z^2,\ 1,\ 1$$

számhármasra!
Az eredeti egyenlőtlenségben pontosan akkor van egyenlőség, ha $x = y = z = 1$.

A CAUCHY-EGYENLŐTLENSÉG

42.
Alkalmazzuk a Cauchy-egyenlőtlenséget:

$$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{c}\right) \ge (1+1+2+4)^2 = 64.$$

Egyenlőség:

$$a^2 = b^2 = \frac{c^2}{4} = \frac{d^2}{16} \Leftrightarrow a = b = \frac{c}{2} = \frac{d}{4}.$$

43.
Legyen
$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0,$$

majd alkalmazzuk a Cauchy-egyenlőtlenséget:

$$P(x)\cdot P\left(\frac{1}{x}\right)=\left(a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0\right)\left(a_n\frac{1}{x^n}+\ldots+a_1\frac{1}{x}+a_0\right)\geq\left(a_n+\ldots+a_1+a_0\right)^2=\left(P(1)\right)^2\geq 1.$$

44.
A Cauchy-egyenlőtlenség miatt:

$$a+b+c=1\cdot a+1\cdot b+1\cdot c\leq\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)},$$

így elegendő belátnunk, hogy
$$3\leq a^2+b^2+c^2.$$

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt:

$$3=3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\leq a^2+b^2+c^2,$$

ezért készen vagyunk. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a=b=c=1$.

45.*
Az a) feladat következik a c)-ből, ha $n=2$, így csak ez utóbbit igazoljuk.
Az ún. rendezési tételt fogjuk felhasználni! Vegyük észre, hogy az

$$a^n,b^n,c^n \quad \text{és} \quad \frac{1}{b+c},\frac{1}{c+a},\frac{1}{a+b}$$

számhármasok azonosan rendezettek, így

$$a^n\frac{1}{b+c}+b^n\frac{1}{c+a}+c^n\frac{1}{a+b}\geq a^n\frac{1}{a+b}+b^n\frac{1}{b+c}+c^n\frac{1}{c+a},$$

$$a^n\frac{1}{b+c}+b^n\frac{1}{c+a}+c^n\frac{1}{a+b}\geq a^n\frac{1}{c+a}+b^n\frac{1}{a+b}+c^n\frac{1}{b+c},$$

melyeket összeadva:

$$(\text{-})\quad a^n\frac{1}{b+c}+b^n\frac{1}{c+a}+c^n\frac{1}{a+b}\geq\frac{1}{2}\left(\frac{a^n+b^n}{a+b}+\frac{b^n+c^n}{b+c}+\frac{c^n+a^n}{c+a}\right).$$

Most igazoljuk, hogyha $x,y>0$ és n pozitív egész szám, akkor

$$\frac{x^n + y^n}{x+y} \ge \frac{x^{n-1} + y^{n-1}}{2}.$$

Ebből és a (-) egyenlőtlenségből adódik a feladat állítása!
Rendezés után:

$$(x-y)\left(x^{n-1} - y^{n-1}\right) \ge 0,$$

amely nyilván igaz, hiszen a két tényező azonos előjelű.
Egyenlőség az eredeti egyenlőtlenségben pontosan akkor lép fel, ha $a = b = c$.

Megjegyzés:
Ha $n = 1$, akkor a (-) egyenlőtlenség átmegy az ún. Nesbitt-egyenlőtlenségbe:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}.$$

A b) feladatra két megoldást is mutatunk.
I. megoldás
Jelöljük a bal oldalon szereplő kifejezést S_1-gyel és legyen

$$S_2 = \frac{a^2}{c+a} + \frac{b^2}{a+b} + \frac{c^2}{b+c}.$$

Ekkor

$$S_1 - S_2 = \frac{a^2 - b^2}{a+b} + \frac{b^2 - c^2}{b+c} + \frac{c^2 - a^2}{c+a} = a - b + b - c + c - a = 0 \Leftrightarrow S_1 = S_2,$$

így

$$2S_1 = S_1 + S_2 = 2\left(\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a}\right) = \frac{a^2 + b^2}{a+b} + \frac{b^2 + c^2}{b+c} + \frac{c^2 + a^2}{c+a}.$$

Ha $x, y > 0$, akkor

$$\frac{x^2 + y^2}{x+y} \ge \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow (x-y)^2 \ge 0.$$

Ezt felhasználva adódik, hogy

$$2S_1 = S_1 + S_2 \ge \frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2} + \frac{c+a}{2} = a + b + c,$$

ami épp a bizonyítandó. Egyenlőség pontosan akkor, ha $a = b = c$.

II. megoldás

Vegyük észre, hogy $x, y > 0$ esetén

$$\frac{x^2}{x+y} \geq \frac{3x-y}{4} \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0.$$

Alkalmazva, a bal oldal legalább

$$\frac{3a-b}{4}+\frac{3b-c}{4}+\frac{3c-a}{4}=\frac{2(a+b+c)}{4}=\frac{a+b+c}{2},$$

ami a bizonyítandó volt.

A d) feladat megoldása teljesen analóg a b)-re adott megoldások bármelyikével.

Megjegyzés:

További megoldások adódnak egyszerűen az a), b) és d) egyenlőtlenségre a következő feladatban tárgyalt egyenlőtlenségből.

46.*

Legyen $x_i = \dfrac{a_i}{\sqrt{b_i}}$ és $y_i = \sqrt{b_i}$, ekkor

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geq \frac{(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n)^2}{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2},$$

$$\sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2)} \geq x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n,$$

ami a jól ismert Cauchy-egyenlőtlenség! Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha minden i-re $\dfrac{a_i}{b_i} = l$, adott pozitív szám.

47.*

a) A Nesbitt-egyenlőtlenséget nagyon sokféleképpen igazolhatjuk, az alábbi módszer talán a legelegánsabb.

Legyen

$$b+c=2x, c+a=2y, a+b=2z,$$

ekkor

$$a = y+z-x,$$
$$b = x+z-y,$$
$$c = x+y-z,$$

így a bizonyítandó:

$$\frac{y+z-x}{2x}+\frac{x+z-y}{2y}+\frac{x+y-z}{2z} \geq \frac{3}{2},$$

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right) \geq 6,$$

amely igaz, hiszen egy pozitív számnak és reciprokának összege legalább 2. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $x = y = z \Leftrightarrow a = b = c$.

Mind a négy egyenlőtlenség igazolható a Cauchy-egyenlőtlenségből levezethető, a 46. feladatban szereplő egyenlőtlenség segítségével! Csak a nehezebb c) és d) esetre mutatjuk meg ezt a megoldási módszert.
A c) esetben a bal oldal becslése:

$$\frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{bc+bd}+\frac{c^2}{cd+ce}+\frac{d^2}{de+da}+\frac{e^2}{ea+eb} \geq \frac{(a+b+c+d+e)^2}{ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de} \geq \frac{5}{2}$$

Rendezést követően, a műveletek elvégzése és 4-gyel való szorzás után:

$$(a-e)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(a-e)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(b-e)^2+(c-d)^2+(c-e)^2+(d-e)^2 \geq 0$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a = b = c = d = e$.

A d) esetben:

$$\frac{a^2}{a(b+c)}+\frac{b^2}{b(c+d)}+\frac{c^2}{c(d+e)}+\frac{d^2}{d(e+f)}+\frac{e^2}{e(f+a)}+\frac{f^2}{f(a+b)} \geq \frac{(a+b+c+d+e+f)^2}{(a+d)(b+e)+(b+e)(f+c)+(f+c)(a+d)}$$

Legyen

$$a+d = x, b+e = y, f+c = z,$$

Ekkor elegendő belátni, hogy

$$\frac{(x+y+z)^2}{xy+yz+zx} \geq 3 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx,$$

amely közismert egyenlőtlenség. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha

$$x = y = z \Leftrightarrow a = b = c = d = e = f.$$

Megjegyzés
A fenti egyenlőtlenségek csak speciális esetei az ún. *Shapiro-egyenlőtlenség*-nek: $a_i > 0$ esetén (ahol $a_{n+1} = a_1, a_{n+2} = a_2$) teljesülni fog

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_{i+1}+a_{i+2}} \geq \frac{n}{2}$$

akkor, ha n páros és $n \leq 12$, illetve, ha n páratlan és $n \leq 23$. A többi n esetén nem teljesül az egyenlőtlenség ebben a formában. A bizonyítás igen nehéz.

48.*
Alkalmazzuk a 46. feladatban látott egyenlőtlenséget!

$$\frac{a_1^2}{a_1(a_2+a_3)}+\frac{a_2^2}{a_2(a_3+a_4)}+...+\frac{a_n^2}{a_n(a_1+a_2)}\geq\frac{(a_1+a_2+...+a_n)^2}{a_1a_2+a_1a_3+...+a_na_1+a_na_2}\geq\frac{(a_1+a_2+...+a_n)^2}{2(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)},$$

miközben felhasználtuk, hogy

$$ab\leq\frac{a^2+b^2}{2}.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a_1=a_2=...=a_n$.

49.*
Alkalmazzuk ismét a 46. feladatban szereplő egyenlőtlenséget! A bal oldalt átalakítva:

$$\frac{x^2}{axy+bzx}+\frac{y^2}{ayz+bxy}+\frac{z^2}{azx+byz},$$

melynek értéke legalább

$$\frac{(x+y+z)^2}{axy+bzx+ayz+bxy+azx+byz}=\frac{(x+y+z)^2}{(a+b)(xy+yz+zx)},$$

Így elegendő belátni, hogy

$$\frac{(x+y+z)^2}{xy+yz+zx}\geq 3,$$

amelyet már korábban bizonyítottunk.

Megjegyzés:
Ha $a=b=1$, akkor a feladatban szereplő egyenlőtlenség átmegy az ún. Nesbitt-egyenlőtlenségbe, így annak általánosításaként is felfogható.

50.*
Rendezés után:

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{a}{b(b+c)^2}+\frac{b}{c(c+a)^2}+\frac{c}{a(a+b)^2}\right)\geq\frac{9}{4}.$$

A Cauchy-egyenlőtlenség szerint

$$(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2)\geq(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2.$$

Legyen $x_1=\sqrt{ab}$, $y_1=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}(b+c)}$ stb., ekkor a bizonyítandó bal oldala legalább

$$\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)^2.$$

A zárójelen belül álló mennyiség a Nesbitt-egyenlőtlenség szerint legalább $\frac{3}{2}$, így készen vagyunk. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a=b=c$.

51.*
A feladatban szereplő feltétel írható $x+y+z=3xyz$ formában. Ismeretes, hogy

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right),$$

így a feladat állítása:

$$\sqrt{\frac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{x+y+z}+1}=\sqrt{\frac{x^3+y^3+z^3}{x+y+z}}\geq\frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z},$$

ahonnan

$$(x+y+z)\left(x^3+y^3+z^3\right)\geq\left(x^2+y^2+z^2\right)^2.$$

Alkalmazzuk a Cauchy-egyenlőtlenséget! Egyenlőséghez $x=y=z$, ahonnan a feladat feltételét figyelembe véve: $x=y=z=1$.

52.**
A 46. feladatban szereplő egyenlőtlenséget alkalmazva:

$$\frac{a^6}{ab+ac}+\frac{b^6}{bc+ba}+\frac{c^6}{ca+cb}\geq\frac{\left(a^3+b^3+c^3\right)^2}{2(ab+bc+ca)}.$$

Mivel

$$ab+bc+ca\leq a^2+b^2+c^2=1,$$

így

$$(*)\qquad\frac{1}{ab+bc+ca}\geq 1.$$

A harmadik illetve második hatványközép közötti egyenlőtlenség miatt:

$$\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\geq\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

ahonnan hatodik hatványra emelés után

$$(**)\qquad\left(a^3+b^3+c^3\right)^2\geq 3^2\cdot\frac{1}{3^3}=\frac{1}{3}.$$

Az (-) és (- -) egyenlőtlenségek egybevetéséből adódik a bizonyítandó állítás. Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

53.**
Legyen

$$a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z},$$

ekkor

$$abc = xyz = 1,$$

továbbá a bizonyítandó:

$$(-) \qquad \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \ge \frac{3}{2}.$$

Alkalmazzuk a 46. feladatban szereplő egyenlőtlenséget (-) bal oldalára, az akkor legalább

$$\frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)} = \frac{x+y+z}{2} \ge \frac{3 \cdot \sqrt[3]{xyz}}{2} = \frac{3}{2},$$

ahol még a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget is felhasználtuk. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $x = y = z \Leftrightarrow a = b = c = 1$.

TRIGONOMETRIKUS HELYETTESÍTÉSEK

54.*
Legyen

$$a = 2x, b = 2y, c = 2z,$$

ekkor

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1,$$

a bizonyítandó pedig:

$$x + y + z \le \frac{3}{2}.$$

Tekintve a *z*-ben másodfokú

$$z^2 + 2xyz + \left(x^2 + y^2 - 1\right) = 0$$

egyenletet, a diszkrimináns

$$4x^2y^2 - 4\left(x^2 + y^2 - 1\right) = 4\left(1 - x^2\right)\left(1 - y^2\right),$$

pozitív gyöke pedig

$$z = -xy + \sqrt{\left(1 - x^2\right)\left(1 - y^2\right)}.$$

(Nyilvánvaló, hogy x és y 0 és 1 közé esik.)
Legyen a és b olyan hegyesszög, hogy $x = \cos a, y = \cos b$. Ekkor

$$z = -\cos a \cos b + \sin a \sin b = -\cos(a + b) = \cos(p - (a + b)).$$

Legyen $p - (a + b) = g$, így $z = \cos g$, továbbá a, b, g egy háromszög szögei, a bizonyítandó pedig

$$\cos a + \cos b + \cos g \leq \frac{3}{2}.$$

Ez egy elég ismert egyenlőtlenség, igazolható pl. vektorok skaláris szorzatának felhasználásával, vagy a következő feladat megoldásában leírt módon. Egyenlőség pontosan akkor van, ha a háromszög szabályos, így $a = b = c$.

55.*
Vegyük észre, hogy

$$-z = \frac{x + y}{1 - xy},$$

ami sugallja a következő trigonometrikus helyettesítést:

$$x = \tan a, y = \tan b, z = \tan g ,$$

ahol $a, b \in \left]0; \frac{p}{2}\right[$. Ekkor a tangensre vonatkozó addíciós összefüggés miatt

$$-z = \tan(a + b) = \tan(p - g) = -\tan g \text{ és } a + b + g = p .$$

Tekintettel arra, hogy

$$1 + \tan^2 f = \frac{1}{\cos^2 f},$$

A feladatban szereplő egyenlőtlenség ekvivalens egy háromszög szögeire vonatkozó

$$\cos a + \cos b + \cos g \leq \frac{3}{2}$$

egyenlőtlenséggel, amely közismert. Egy lehetséges egyszerű bizonyítása:

$$\cos g = -\cos(a + b) = -\cos a \cos b + \sin a \sin b$$

miatt

$$3 - 2(\cos a + \cos b + \cos g) = (\sin a - \sin b)^2 + (\cos a + \cos b - 1)^2 \geq 0 .$$

Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha a háromszög szabályos, így $x = y = z = \sqrt{3}$.

56.*
Ha a számok között van két egyenlő, akkor készen vagyunk, ellenkező esetben legyenek a számok:

$$0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 .$$

Végezzük el az alábbi átalakítást:

$$\frac{x-y}{1+x+y+2xy} = \frac{\left(1+\frac{1}{y}\right)-\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)+1} = \tan(a-b),$$

ahol $a = \arctan\left(1+\frac{1}{y}\right)$, $b = \arctan\left(1+\frac{1}{x}\right)$, továbbá $a, b \in \left]\frac{p}{4};\frac{p}{2}\right[$.
Mivel

$$\tan\frac{p}{12} = 2-\sqrt{3},$$

továbbá $\dfrac{\frac{p}{2}-\frac{p}{4}}{3} = \dfrac{p}{12}$ így a skatulya elv értelmében az $\arctan\left(1+\frac{1}{x_i}\right)$ szögek között van kettő, melyek különbsége kisebb, mint $\frac{p}{12}$, amiből adódik a feladat állítása, hiszen a tangens függvény szigorúan monoton nő az adott intervallumon.

57.*
Vezessük be az $x_i = \sin a_i$ helyettesítést! Mivel

$$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a ,$$

így

$$\sin^3 a = \frac{1}{4}(3\sin a - \sin 3a),$$

ezért

$$0 = \sin^3 a_1 + \ldots + \sin^3 a_n = \frac{1}{4}\left[(3\sin a_1 - \sin 3a_1) + \ldots + (3\sin a_n - \sin 3a_n)\right],$$

vagyis elegendő belátnunk, hogy

$$\frac{\sin 3a_1 + \ldots + \sin 3a_n}{3} \le \frac{n}{3},$$

ami triviális, hiszen $-1 \le \sin j \le 1$.

GEOMETRIAI MODELL

58.

I. megoldás

Alkalmazzuk a négyzetes és számtani közép közötti egyenlőtlenséget 10 változóra az alábbiak szerint:

$$\frac{S}{\sqrt{10}}=\sqrt{\frac{9\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+x^2}{10}}+\sqrt{\frac{9\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+y^2}{10}}+\sqrt{\frac{9\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+z^2}{10}}\geq\frac{9\cdot\frac{1}{3}+x}{10}+\frac{9\cdot\frac{1}{3}+y}{10}+\frac{9\cdot\frac{1}{3}+z}{10}=\frac{9+x+y+z}{10}=1,$$

ahonnan

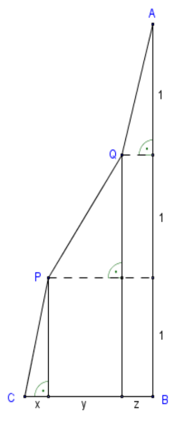
$$S\geq\sqrt{10}\,.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $x=y=z=\frac{1}{3}$, ekkor lesz tehát S minimális, a minimum értéke pedig $\sqrt{10}$.

II. megoldás

Tekintsük az alábbi ábrát! Világos, hogy S éppen az $AQPC$ töröttvonal hosszát adja meg, ami akkor lesz minimális, ha P és Q illeszkedik az AC egyenesre.

Ekkor $x=y=z=\frac{1}{3}$, továbbá $S=\sqrt{10}$.



Megjegyzés:

Érdemes észrevenni, hogy mennyivel egyszerűbb eszközt használ a második megoldás!

59.*

<u>*I. megoldás*</u>

A kifejezést a számtani és négyzetes közép közötti egyenlőtlenség segítségével becsüljük az alábbiak szerint:

$$\frac{L}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{a^2+(1-b)^2+4\left(\frac{1}{2}\right)^2}{6}}+\sqrt{\frac{b^2+(1-c)^2+4\left(\frac{1}{2}\right)^2}{6}}+\sqrt{\frac{c^2+(1-a)^2+4\left(\frac{1}{2}\right)^2}{6}}\ge$$

$$\ge\frac{a+1-b+4\cdot\frac{1}{2}}{6}+\frac{b+1-c+4\cdot\frac{1}{2}}{6}+\frac{b+1-c+4\cdot\frac{1}{2}}{6}=\frac{3}{2},$$

ahonnan

$$L\ge\frac{3\sqrt{6}}{2}.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a=b=c=\frac{1}{2}$.

<u>*II. megoldás*</u>

Tekintsük a térbeli derékszögű koordináta-rendszerben az alábbi pontokat:

$$A(1-a;0;0),P(1;1-b;1),Q(2-c;1;2),B(2;2-a;3)\ !$$

A két pont távolságára vonatkozó képlet miatt:

$$AP=\sqrt{a^2+(1-b)^2+1^2},PQ=\sqrt{(1-c)^2+b^2+1^2},QB=\sqrt{c^2+(1-a)^2+1^2}\ ,$$

így

$$L=AP+PQ+QB.$$

A háromszög-egyenlőtlenség alapján világos, hogy

$$L\ge AB=\sqrt{(1+a)^2+(2-a)^2+3^2}=\sqrt{2a^2-2a+14}=\sqrt{2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{27}{2}}\ge\frac{3\sqrt{6}}{2}.$$

<u>*Megjegyzés*</u>

Ez a megoldás lényegében az ún. Minkowski-egyenlőtlenség alkalmazása. Lásd még a 111. feladatot!

60.

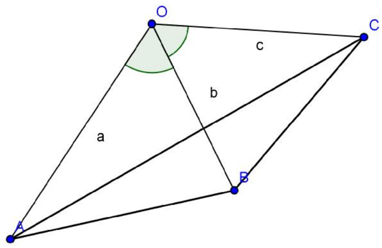
Tekintsük a derékszögű koordináta-rendszerben az $A\left(a;\frac{\sqrt{3}}{2}\right), B\left(-a;-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ és $C\left(\frac{1}{2};0\right)$ pontokat! Világos, hogy az AB szakasz tartalmazza az origót, továbbá a pontok távolságára vonatkozó képlet felhasználásával könnyen adódik, hogy

$$AB=\sqrt{4a^2+3}, AC=\sqrt{a^2-a+1}, BC=\sqrt{a^2+a+1}.$$

Ebből következik, hogy a három szakasz egy háromszög három oldala. Az origó helyzetére tett megjegyzés miatt azonnal adódik, hogy az AB oldalhoz tartozó magasság mérőszáma legfeljebb $\frac{1}{2}$. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a=0$.

61.

Vegyük fel az alábbi ábrán látható módon az $OA=a, OB=b, OC=c$ szakaszokat úgy, hogy $AOB\angle=60°, BOC\angle=60°$ teljesüljön!



A koszinusz-tétel miatt a bizonyítandó egyenlőtlenség ekvivalens az

$$AB+BC\geq AC$$

egyenlőtlenséggel, amely nyilvánvalóan igaz.

62.

I. megoldás

A bal oldali egyenlőtlenség nyilvánvaló, hiszen felírható

$$0<a(1-b)+b(1-c)+c(1-a)$$

alakban.

A jobb oldali egyenlőtlenség pedig könnyen adódik abból, hogy

$$0<(1-a)(1-b)(1-c).$$

II. megoldás

Tekintsünk az egységnyi oldalú szabályos ABC háromszöget, melynek AB, BC és CA oldalain vegyük fel rendre a P, Q és R pontokat oly módon, hogy $AP=a, BQ=b, CR=c$ teljesüljön! Felhasználva a trigonometrikus területképlet:

$$t_{APR}+t_{PBQ}+t_{QCR}=\frac{a(1-c)\sin 60°}{2}+\frac{b(1-a)\sin 60°}{2}+\frac{c(1-b)\sin 60°}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[a(1-c)+b(1-a)+c(1-b)\right].$$

Mivel

$$0<t_{APR}+t_{PBQ}+t_{QCR}<t_{ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4},$$

ezért $\frac{\sqrt{3}}{4}$-gyel való osztás után adódik a feladat állítása.

63.*

Legyen $y+z=a, z+x=b, x+y=c$! Tekintsük az a, b, c oldalakkal bíró háromszöget! A félkerület $x+y+z$, így a Héron-képlet szerint a háromszög területe:

$$t=\sqrt{(x+y+z)xyz}=1.$$

Ekkor

$$(x+y)(x+z)=bc\geq bc\sin\alpha=2t=2,$$

felhasználva a trigonometrikus területképletet. A feladatban szereplő kifejezés minimuma 2. Ez akkor jön létre, ha $\alpha=90°$, továbbá pl. $z=y=1$ és $x=\sqrt{2}-1$.

64.*

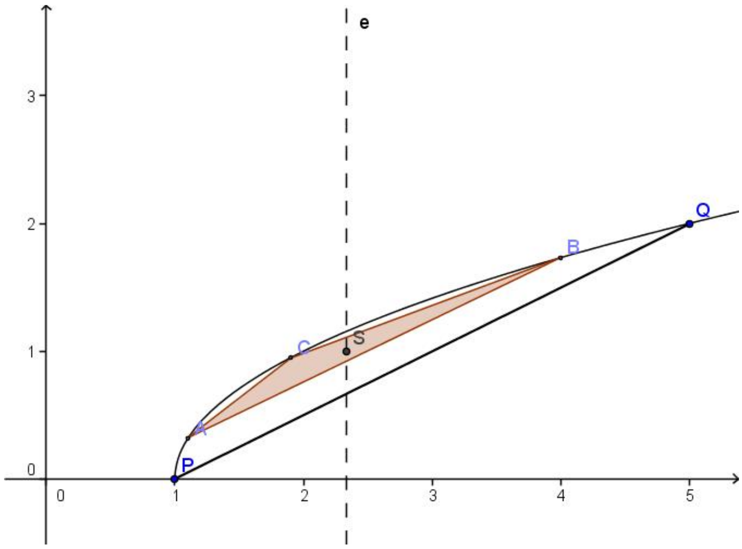
Az alábbi gondolatmenet egyszerre igazolja mindkét egyenlőtlenséget, másrészt rámutat a feladat keletkezésére és általánosítási lehetőségekre.

Tekintsük az $f(x)=\sqrt{x-1}$ függvényt, ahol $x\geq 1$, valós szám! Szemeljük ki a függvény grafikonjának a következő három pontját:

$$A\left(a;\sqrt{a-1}\right), B\left(b,\sqrt{b-1}\right), C\left(c,\sqrt{c-1}\right).$$

A feladat feltételei miatt $1\leq a,b,c\leq 5$ és $a+b+c=7$. Mivel az f függvény (az egész értelmezési tartományon) konkáv, ezért az ABC háromszög teljes egészében abban a síkidomban kell, hogy legyen, amelyet a PQ szakasz ill. a $P(1;0)$ és $Q(5;2)$ közötti grafikonrész határol. Nézzük az ABC háromszög S súlypontját! Ez a háromszög belsejében van, koordinátái pedig:

$$S\left(\frac{7}{3};\frac{\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1}}{3}\right).$$



Az S pont rajta van az $x=\frac{7}{3}$ egyenletű e egyenesen, melynek a PQ-val és a függvénygrafikonnal alkotott metszéspontjai közé eső szakasza van az említett síkidomban. Az egyenes a grafikont a $\left(\frac{7}{3};\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ pontban, a PQ szakaszt pedig a $\left(\frac{7}{3};\frac{2}{3}\right)$ pontban metszi. Mivel az S e két pont közé kell, hogy essen az említett egyenesen, ezért:

$$\frac{2}{3}\le\frac{\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1}}{3}\le\frac{2\sqrt{3}}{3}\ ,$$

ahonnan a bizonyítandó azonnal adódik. A jobb oldalon csakis akkor áll fenn egyenlőség, ha A, B és C egybeesik, következésképpen:

$$a=b=c=\frac{7}{3}\ .$$

A bal oldalon pontosan akkor teljesül egyenlőség, ha A, B és C közül kettő a P, egy pedig a Q ponttal esik egybe, azaz:

$$a=b=1, c=5$$
$$a=c=1, b=5$$
$$b=c=1, a=5$$

valamelyike teljesül.

Megjegyzés:
A fenti megoldásban az f függvény konkáv tulajdonsága az $[a;b]$ intervallumon úgy értelmezett, hogy bármely x_1, x_2 helyekre, ha $a\le x_1\le x_2\le b$, akkor

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\ .$$

A feladat megoldásából leszűrhető általánosítás az alábbiakban foglalható össze. Legyen az $[a;b]$ intervallumon az $f(x)$ függvény konkáv (a fentebb említett értelemben), továbbá $a\leq x_1\leq x_2\leq\ldots\leq x_n\leq b$. Tekintsük az $A_1A_2\ldots A_n$ sokszöget, ahol a csúcsok koordinátái:

$$A_i\left(x_i;f\left(x_i\right)\right).$$

Az $A_1A_2\ldots A_n$ sokszögről igazolható, hogy konvex, továbbá belátható (pl. teljes indukcióval), hogy konvex pontrendszer súlypontja (az az S pont, amelyből a pontokba mutató vektorok összege nullvektor – ilyen tulajdonságú pont mindig pontosan egy létezik) a konvex sokszög belső pontja, így az

$$S\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n};\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n}\right)$$

súlypont belső pont lesz. Világos, hogy S felette van a

$$P\big(a;f(a)\big)\text{ és }Q\big(b;f(b)\big)$$

pontokat összekötő szakaszoknak, ezért fennáll a következő két egyenlőtlenség:

$$(\text{-})\qquad\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n}\leq f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right),$$

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n}\geq\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}+\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}\ .$$

Ha f konvex függvény, akkor a látott egyenlőtlenségek irányai pontosan ellentétesek. A (-) egyenlőtlenség Jensen-egyenlőtlenség néven ismert és igen gyakran alkalmazható. A konkávság (konvexség) fentebbi értelmezésére a Jensen-konkáv (konvex), vagy gyengén konkáv (konvex) elnevezést szokás használni. A Jensen-egyenlőtlenség bizonyítása megtalálható, pl. Molnár E.: Matematikai versenyfeladatok gyűjteménye 1947-1970 c. könyvében.

65.*
Alkalmazzuk az előző feladatban látott módszert az $f(x)=16^x$ függvényre! Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha két változó értéke $\frac{1}{4}$, a harmadiké pedig $\frac{1}{2}$.

66.*
a) <u>*I. megoldás*</u>
A négyzetes és a számtani közép közötti egyenlőtlenség miatt:

$$\sqrt{\frac{a^2+3b^2+5c^2+7d^2}{16}} \geq \frac{a+3b+5c+7d}{16},$$

így elegendő belátnunk, hogy

$$\frac{a+3b+5c+7d}{16} \geq \frac{1}{4},$$
$$a+3b+5c+7d \geq 4.$$

Tekintsük az alábbi, a feladat feltételeiből azonnal adódó becsléseket:

$$\begin{aligned} a+b+c+d &\geq 1,\\ 2b+c+d &\geq 1,\\ 3c+d &\geq 1,\\ 4d &\geq 1. \end{aligned}$$

A megfelelő oldalak összeadásával adódik az állítás. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a=b=c=d=\frac{1}{4}$.

<u>*II. megoldás*</u>
Felhasználjuk a 64. feladat utáni megjegyzésben szereplő ún. Jensen-egyenlőtlenség általánosított (súlyozott) alakját.
Ha az I intervallumon az $f(x)$ függvény konvex, továbbá a $l_i>0$ számok olyanok, hogy $l_1+l_2+\ldots+l_n=1$, akkor

$$l_1 f(x_1)+l_2 f(x_2)+\ldots+l_n f(x_n) \geq f(l_1x_1+l_2x_2+\ldots+l_nx_n).$$

(Konkáv függvény esetén fordított irányú egyenlőtlenség áll fenn.)

Legyen $n=4$ és $l_1=\frac{1}{16}, l_2=\frac{3}{16}, l_3=\frac{5}{16}, l_4=\frac{7}{16}$, továbbá $f(x)=x^2$. Ekkor

$$\frac{1}{16}a^2+\frac{3}{16}b^2+\frac{5}{16}b^2+\frac{7}{16}d^2\ge\left(\frac{a+3b+5c+7d}{16}\right)^2,$$

$$a^2+3b^2+5c^2+7d^2\ge\left(\frac{a+3b+5c+7d}{4}\right)^2.$$

Innen az I. megoldásban látott módon fejezhetjük be.

Megjegyzés
Könnyű látni, hogy a négyzetes és számtani közép közötti egyenlőtlenség egyszerűen adódik a Jensen-egyenlőtlenségből, így a két megoldás lényegesen nem különböző.

b) Legyen $n=4$ és $l_1=\frac{1}{10}, l_2=\frac{2}{10}, l_3=\frac{3}{10}, l_4=\frac{4}{10}$, továbbá $f(x)=\sqrt{x}$ és alkalmazzuk a Jensen-egyenlőtlenségnek az a) részben említett alakját! Kapjuk:

$$\frac{1}{10}\sqrt{a}+\frac{2}{10}\sqrt{\frac{b}{4}}+\frac{3}{10}\sqrt{\frac{c}{9}}+\frac{4}{10}\sqrt{\frac{d}{16}}\le\sqrt{\frac{a}{10}+\frac{b}{20}+\frac{c}{30}+\frac{d}{40}},$$

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}\le 10\sqrt{\frac{12a+6b+4c+3d}{120}}.$$

Vegyük észre, hogy

$$12a+6b+4c+3d=3(a+b+c+d)+(a+b+c)+2(a+b)+6a\le 3\cdot 30+14+2\cdot 5+6=120,$$

ahonnan a bizonyítandó is adódik. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a=1, b=4, c=9, d=16$.

67.*
Tekintsük az $y=\frac{1}{x}$ grafikont az $[1;1+t]$ intervallumon, ahol $t>0$! A grafikon alatti terület:

$$\int_1^{1+t}\frac{1}{x}\,dx=[\ln x]_1^{1+t}=\ln(1+t).$$

Tekintsük az $x=1+\frac{t}{2}$ helyhez tartozó érintőt! Mivel az adott intervallumon a függvény konvex, így az érintő fölött helyezkedik el a grafikon, ezért az érintővel határolt trapéz területe kisebb a grafikon alatti területnél, így

$$\ln(1+t)>\frac{1}{1+\frac{t}{2}}\cdot t=\frac{2t}{2+t}.$$

Legyen most $t = \frac{1}{100}$, ekkor

$$\ln 1{,}01 > \frac{0{,}02}{2+0{,}01} = \frac{2}{201}.$$

Ezzel a feladatot megoldottuk.

68.*
Az egyenlőtlenséget átalakítva, bevezetve az $y = 1 + x$ helyettesítést:

$$y^a \le ay + 1 - a,$$

ahol $y > 0$, továbbá $0 < a < 1$ tetszőleges, de rögzített. Tekintsük most az

$$f(y) = ay - y^a + 1 - a$$

függvényt! Azt kell igazolnunk, hogy a mondott feltételek mellett $f(y) \ge 0$. Az f nyilván differenciálható y szerint, $f(0) = 1 - a > 0$ és $f(1) = 0$. Mivel

$$f'(y) = a - ay^{a-1} = a\left(1 - y^{a-1}\right),$$

ezért $-1 < a - 1 < 0$ miatt, ha $0 < y < 1$, akkor $f'(y) < 0$, így $f(y)$ szigorúan monoton csökken, míg ha $1 < y$, akkor $f'(y) > 0$, tehát $f(y)$ szigorúan monoton nő. Mindezekből következik, hogy $y \ge 0$ esetén $f(y) \ge 0$, továbbá egyenlőség csakis $y = 1 \Leftrightarrow x = 0$ esetén lép fel.

Megjegyzés:
A Bernoulli-egyenlőtlenség kifejezést nemcsak az ebben a feladatban szereplő egyenlőtlenségre használják. Általában a következő egyenlőtlenséget szokták Bernoulli-egyenlőtlenségnek nevezni: ha $x > -1$ és n természetes szám, akkor

$$(1 + x)^n \ge 1 + nx.$$

Ezt pl. teljes indukcióval könnyen igazolhatjuk. Ha pedig x pozitív, akkor a binomiális tétel triviális következménye.
Ide kapcsolódik a következő feladat:

Legyenek $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 1-nél kisebb pozitív számok, ahol $n \ge 2$. Igazoljuk, hogy

$$(1 - x_1)(1 - x_2)\ldots(1 - x_n) > 1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_n \ !$$

A megoldás pl. teljes indukció segítségével adódik.

69.*

Az egyenlőtlenségben szereplő állítás nyilván teljesül, ha $x \geq 1$, így elegendő a $0 < x < 1$ esettel foglalkozni. Ennél többet fogunk igazolni, mégpedig azt, hogy tetszőleges $0 < x < 1$ és $0 < y < 1$ számok esetén

$$x^y + y^x > 1.$$

Az előző feladatban szereplő, ún. Bernoulli-egyenlőtlenség miatt, ha u és v 1-nél kisebb pozitív számok, akkor

$$(1-u)^v < 1 - uv.$$

Legyen $x = 1 - a$ és $y = 1 - b$! Alkalmazva a fenti egyenlőtlenséget:

$$(1-a)^b < 1 - ab,$$
$$(1-b)^a < 1 - ab.$$

A bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldala így a következő módon becsülhető:

$$(1-a)^{1-b} + (1-b)^{1-a} = \frac{1-a}{(1-a)^b} + \frac{1-b}{(1-b)^a} > \frac{1-a+1-b}{1-ab}.$$

Elegendő belátnunk, hogy

$$\frac{1-a+1-b}{1-ab} > 1.$$

Rendezés után:

$$(1-a)(1-b) > 0,$$

ami nyilvánvaló.

70.*

Legyen $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = x$! Ekkor a bizonyítandó egyenlőtlenséget b-vel osztva:

$$x < \frac{x^2-1}{2\ln x} < \frac{x^2+1}{2}.$$

Be kell látnunk, hogy $x > 1$ esetén

$$(\text{-}) \qquad \ln x < \frac{x}{2} - \frac{1}{2x},$$

és

$$(\text{- -}) \qquad \frac{x^2-1}{x^2+1} < \ln x.$$

Legyen $f(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}-\ln x$, ahol $x\geq 1$. Világos, hogy $f(1)=0$, továbbá, ha $x>1$:

$$f'(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{x}=\frac{x^2-2x+1}{2x^2}=\frac{(x-1)^2}{2x^2}>0\,.$$

Ebből következik, hogy $f(x)$ szigorúan monoton növekedő, így $f(x)>0$, ahonnan (*) adódik.

Legyen $g(x)=\ln x-\frac{x^2-1}{x^2+1}$, ahol $x\geq 1$. Világos, hogy $g(1)=0$, továbbá ha $x>1$:

$$g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{\left(x^2-1\right)^2}{x\left(x^2+1\right)^2}>0\,.$$

Ebből következik, hogy $g(x)$ szigorúan monoton növekedő, így $g(x)>0$, ahonnan (**) adódik.

71.**

a) Tekintsük az $y=\frac{1}{x}$ függvénygrafikont! Ha az $[1;n]$intervallumot $n-1$egyenlő részre bontjuk, akkor a belülre, ill. a kívülre írt téglalapok segítségével adódnak a következők:

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\leq 1+\int_1^n\frac{1}{x}dx=1+\ln n\,,$$

továbbá

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}>\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx=\ln(n+1)>\ln n\,,$$

ahonnan az állítás leolvasható.

b) Azt kell igazolnunk, hogy $c_{n+1}<c_n$, amely könnyen átalakítható arra, hogy

$$\frac{1}{n+1}<\ln\frac{n+1}{n},$$

$$1<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

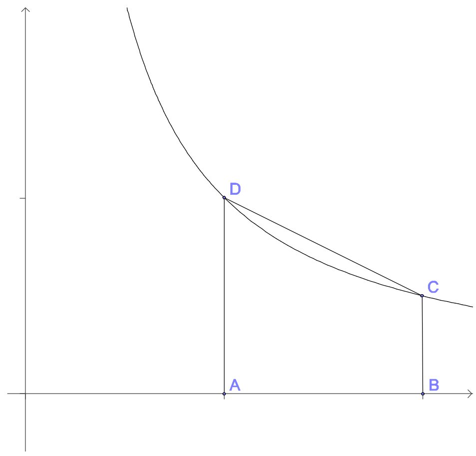
$$e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Mivel e az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozat határértéke, így ha belátjuk, hogy az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ sorozat szigorúan monoton csökken, akkor a fenti egyenlőtlenség bizonyított. A mértani és a harmonikus közép közötti egyenlőtlenség miatt:

$$\sqrt[n+2]{1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} > \frac{n+2}{1+(n+1)\cdot\frac{n}{n+1}} = 1+\frac{1}{n+1},$$

ahonnan állításunk következik.

c) Tekintsük az alábbi ábrát:



Ha az $ABCD$ trapéz A csúcsának első koordinátája $k-1$, a B csúcs első koordinátája pedig k, akkor a területre érvényes a következő becslés:

$$\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}dx < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1}+\frac{1}{k}\right).$$

Innen

$$\ln n = \int_1^n \frac{1}{x}dx = \int_1^3 \frac{1}{x}dx + \int_3^n \frac{1}{x}dx = \ln 3 + \int_3^n \frac{1}{x}dx \le \ln 3 + \frac{1}{2}\sum_{k=4}^{n}\left(\frac{1}{k-1}+\frac{1}{k}\right).$$

Elegendő belátnunk, hogy

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln 3-\frac{1}{2}\sum_{k=4}^{n}\left(\frac{1}{k-1}+\frac{1}{k}\right) > \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right).$$

Mivel

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\sum_{k=4}^{n}\left(\frac{1}{k-1}+\frac{1}{k}\right) = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2n},$$

így a bizonyítandó:

$$1+\frac{1}{6} > \frac{1}{2n^2}+\ln 3,$$

ami igaz.
Ezzel az eredeti egyenlőtlenséget is igazoltuk.

Megjegyzés:
A feladat a) ill. b) részéből következik, hogy a c_n sorozat konvergens, hiszen korlátos és monoton. A sorozat határértékét Euler-Mascheroni konstansnak nevezik, értéke közelítőleg 0,5772. A mai napig eldöntetlen, hogy racionális szám, vagy sem!

72.*
Jelöljük az egyenlőtlenség bal oldalán álló polinomot $f_{2k}(x)$-szel. Azt mutatjuk meg, hogy minden x-re

$$f_{2k}(x) > 0.$$

Ha $x \le 0$, akkor $f_{2k}(x) \ge 1$ nyilvánvaló. Mivel

$$f_{2k}(x) = 1 + (x-2)\frac{x}{2!} + (x-4)\frac{x^3}{4!} + \ldots + (x-2k)\frac{x^{2k-1}}{(2k)!},$$

így $x \ge 2k$ esetén is

$$f_{2k}(x) \ge 1.$$

Az $f_{2k}(x)$ polinom mindenütt folytonos függvény, így a $[0;2k]$intervallumon van minimális értéke. Ha a minimumát az intervallum valamelyik végpontjában veszi fel, akkor a fentiek miatt készen vagyunk. Ha pedig az intervallum valamely x_0 belső pontjában, akkor itt a deriváltja 0, azaz

$$f_{2k}'(x_0) = -1 + x_0 - \frac{x_0^2}{2!} + \ldots + \frac{x_0^{2k-1}}{(2k-1)!} = \frac{x_0^{2k}}{(2k)!} - f_{2k}(x) = 0.$$

Innen

$$f_{2k}(x_0) = \frac{x_0^{2k}}{(2k)!} > 0,$$

így készen vagyunk.

Megjegyzés:
1. A feladat eredetére mutatnak rá az alábbiak. Az ún. Maclaurin-formula szerint, ha $f(x)$ a 0 valamely környezetében n-szer differenciálható és x ebbe a környezetbe eső szám, akkor

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(Jx)}{n!}x^n,$$

ahol $0 < J = J(x,n) < 1$.

Alkalmazzuk a formulát az $f(x) = e^x$ függvényre $n = 2k+1$ választás mellett:

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\ldots+\frac{x^{2k}}{(2k)!}+\frac{e^{Jx}}{(2k+1)!}(-x)^{2k+1}.$$

Ebből átrendezés után nyilvánvaló módon adódik a feladatban szereplő állítás.

2. Függvényeket jól használhatunk nevezetes egyenlőtlenségek bizonyítására is.
A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenségnek számos bizonyítása és általánosítása ismeretes. Az alábbi bizonyítás nem elemi, de rövid és tetszetős.
Felhasználjuk, hogy bármely x esetén

$$e^x \ge x+1 .$$

Legyen

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=A_n ,$$

ahol $a_i > 0$, továbbá

$$x_k=\frac{a_k-A_n}{A_n} ,$$

ahol $k = 1, 2, \ldots, n$.
Ekkor

$$a_1a_2\ldots a_n=A_n^n(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n)\le A_n^n e^{x_1+x_2+\ldots+x_n}=A_n^n ,$$

hiszen

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=0 .$$

73.**
Ekvivalens egyenlőtlenséghez jutunk, ha mindkét oldal természetes alapú logaritmusát tekintjük! Ezzel elérjük, hogy a bal oldal szétesik logaritmusok összegére, és egy összeget könnyebb lesz becsülni:

$$(\text{-})\qquad \ln\frac{2^1+1}{2^1-1}+\ln\frac{2^2+1}{2^2-1}+\ldots+\ln\frac{2^n+1}{2^n-1}<\ln 9 .$$

Vizsgáljuk a továbbiakban az

$$f(x)=\ln\frac{2^x+1}{2^x-1}$$

függvényt!
Az 1, 2, 3, 4 helyeken felvett értékeket nézegetve megsejthető, hogy

$$\ln\frac{2^x+1}{2^x-1}=\ln\left(1+\frac{2}{2^x-1}\right)\approx\frac{17}{2^{x+3}} ,$$

az ilyen kifejezéseket pedig könnyű összegezni! Legyen $\frac{2}{2^x-1}=y>0$, belátjuk, hogy

$$\ln(1+y)<y .$$

Ez következik abból, hogy

$$\left(y-\ln(1+y)\right)'=1-\frac{1}{1+y}>0,$$

mert akkor a $g(y)=y-\ln(1+y)$ függvény szigorúan monoton nő és $g(0)=0$.
Könnyű igazolni, hogy $x\geq 5$ estén

$$\frac{2}{2^x-1}<\frac{17}{2^{x+3}}.$$

Számítással kimutatható, hogy

$$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)<\frac{17}{8}\left(\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}\right),$$

így (-) bal oldala kisebb, mint

$$\frac{17}{8}\left(\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)=\frac{17}{8}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)<\frac{17}{8}<\ln 9.$$

Az is látszik, hogy az eredeti egyenlőtlenségben a 9 helyére már $e^{\frac{17}{8}}\approx 8{,}37$ is írható.

VEGYES FELADATOK

74.*
Vegyük észre, hogy $x\geq 2$ esetén

$$x^3\geq 4x \Leftrightarrow x(x-2)(x+2)\geq 0,$$

így a bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldala legalább

$$(4y+x)(4z+y)(4x+z).$$

Használjuk fel a 35. feladat megoldásánál szereplő, a súlyozott számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$\left(\frac{4}{5}y+\frac{1}{5}x\right)\left(\frac{4}{5}z+\frac{1}{5}y\right)\left(\frac{4}{5}x+\frac{1}{5}z\right)\geq y^{\frac{4}{5}}x^{\frac{1}{5}}\cdot z^{\frac{4}{5}}y^{\frac{1}{5}}\cdot x^{\frac{4}{5}}z^{\frac{1}{5}}=xyz,$$

ahonnan 125-tel való szorzás után adódik a bizonyítandó állítás. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $x=y=z=2$.

75.
Ismert azonosság szerint

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca),$$

így

$$2(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]\geq 3(a-b)^2,$$

ahonnan

$$2(b-c)^2+2(c-a)^2\geq(a-b)^2,$$

$$a^2+b^2+4c^2+2ab-4bc-4ca\geq 0\Leftrightarrow(a+b-2c)^2\geq 0,$$

ami nyilvánvaló módon igaz. Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $c=\frac{1}{3}$ és $a+b=\frac{1}{3}$.

76.
Teljes indukciót használunk. Mivel $n=1$-re az állítás nyilvánvaló, így feltehetjük, hogy valamely n-re az állítás igaz, ezért $(n+1)$-re elegendő igazolnunk.

$$\frac{a_1^2+\ldots+a_n^2+a_{n+1}^2}{a_1+\ldots+a_n+a_{n+1}}-\frac{2n+3}{3}=\frac{3\left(a_1^2+\ldots+a_n^2\right)+3a_{n+1}^2-(2n+3)(a_1+\ldots+a_n+a_{n+1})}{3(a_1+\ldots+a_n+a_{n+1})}.$$

A számláló:

$$A=3a_{n+1}^2-(2n+3)a_{n+1}-(2n+3)(a_1+\ldots+a_n)+3\left(a_1^2+\ldots+a_n^2\right).$$

Az indukciós feltevés miatt

$$3\left(a_1^2+\ldots+a_n^2\right)\geq(2n+1)(a_1+\ldots+a_n),$$

ezért elég belátnunk, hogy

$$A\geq 3a_{n+1}^2-(2n+3)a_{n+1}-2(a_1+\ldots+a_n)\geq 0.$$

Mivel $a_n\geq n$, továbbá

$$a_1+a_2+\ldots+a_n\leq 1+2+\ldots+a_n=\frac{a_n(a_n+1)}{2},$$

így a bizonyítandó:

$$A\geq 3a_{n+1}^2-(2a_n+3)a_{n+1}-a_n(a_n+1)=(3a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n-1)\geq 0,$$

ami igaz, hiszen $a_{n+1}\geq a_n+1$.
Ezzel a feladatot megoldottuk.

77.*
A Cauchy-egyenlőtlenség miatt:

$$\left(a^2+b+c\right)\left(1+b+c\right)\ge\left(a+b+c\right)^2,$$

így

$$\frac{1}{a^2+b+c}\le\frac{1+b+c}{\left(a+b+c\right)^2}.$$

A másik két tagra is hasonló becslést alkalmazva adódik, hogy a bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldalán álló mennyiség legfeljebb

$$\frac{3+2\left(a+b+c\right)}{\left(a+b+c\right)^2}.$$

Elegendő belátnunk, hogy

$$4\le\left(a+b+c\right)^2-2\left(a+b+c\right)+1,$$
$$4\le\left(a+b+c-1\right)^2.$$

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt:

$$a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}=3,$$

amiből következik a fenti egyenlőtlenség, így az eredeti egyenlőtlenség is igazolást nyert.
Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a=b=c=1$.

78.
Mivel pl.

$$\frac{1-a^2}{1+a^2}=1-2\cdot\frac{a^2}{1+a^2},$$

Ezért a bizonyítandó átírható a következőképpen:

$$\frac{a^2}{1+a^2}+\frac{b^2}{1+b^2}+\frac{c^2}{1+c^2}\ge\frac{3}{4}.$$

A Cauchy-egyenlőtlenség nevezetes következményeként adódó, a 46. feladatban szereplő egyenlőtlenséget alkalmazva, a bal oldalon álló kifejezés értéke legalább:

$$\frac{\left(a+b+c\right)^2}{3+a^2+b^2+c^2}.$$

Elegendő belátni, hogy

$$\frac{(a+b+c)^2}{3+a^2+b^2+c^2} \geq \frac{3}{4}.$$

Átrendezve:

$$4(a+b+c)^2 \geq 9+3(a^2+b^2+c^2),$$

$$8(ab+bc+ca)+a^2+b^2+c^2 \geq 9,$$

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca,$$

ami közismert egyenlőtlenség. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn az eredeti egyenlőtlenségben, ha $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

<u>*Megjegyzés*</u>:
A feladat megoldható trigonometrikus helyettesítés segítségével is.

79.*
Bővítve a törteket *a*-val, *b*-vel és *c*-vel, a bizonyítandó egyenlőtlenség írható

$$\frac{a^2}{a^3-abc+a}+\frac{b^2}{b^3-abc+b}+\frac{c^2}{c^3-abc+c} \geq \frac{1}{a+b+c}$$

alakban. A Cauchy-egyenlőtlenség nevezetes következményeként adódó, a 46. feladatban szereplő egyenlőtlenséget alkalmazva, a bal oldalon álló kifejezés értéke legalább:

$$\frac{(a+b+c)^2}{a^3+b^3+c^3-3abc+a+b+c}=\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+a+b+c}=$$

$$=\frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca+1}=\frac{a+b+c}{(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)+1}=\frac{a+b+c}{(a+b+c)^2}=\frac{1}{a+b+c},$$

amiből adódik a bizonyítandó állítás. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a=b=c=\frac{1}{3}$, bár ez nem magától értetődő.

80.**
A bizonyítandót átalakítva:

$$\frac{1}{1+\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}}+\frac{1}{1+\frac{c}{b}+\frac{c^2}{b^2}}+\frac{1}{1+\frac{a}{c}+\frac{a^2}{c^2}} \geq 1.$$

Legyen $x=\frac{b}{a}, y=\frac{c}{b}, z=\frac{a}{c}$! Ekkor $xyz=1$ mellett kell igazolnunk, hogy

$$\frac{1}{1+x+x^2}+\frac{1}{1+y+y^2}+\frac{1}{1+z+z^2}\geq 1.$$

Vezessük be az $x=\frac{rs}{t^2}, y=\frac{rt}{s^2}, z=\frac{st}{r^2}$ helyettesítéseket! Kapjuk:

$$\frac{t^4}{t^4+rst^2+r^2s^2}+\frac{s^4}{s^4+rts^2+r^2t^2}+\frac{r^4}{r^4+str^2+s^2t^2}\geq 1.$$

A Cauchy-egyenlőtlenség nevezetes következményeként adódó, a 46. feladatban szereplő egyenlőtlenséget alkalmazva, a bal oldalon álló kifejezés értéke legalább:

$$\frac{\left(t^2+s^2+r^2\right)^2}{t^4+s^4+r^4+rst^2+rts^2+str^2+r^2s^2+r^2t^2+s^2t^2}.$$

Elegendő igazolnunk, hogy

$$t^2s^2+s^2r^2+r^2t^2\geq rst^2+rts^2+str^2.$$

Ez következik a közismert

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$$

egyenlőtlenségből. Ezzel az eredeti egyenlőtlenséget is igazoltuk, egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a=b=c$.

Megjegyzés
Ha az eredeti egyenlőtlenség bal oldalán álló kifejezésre alkalmazzuk a Cauchy-egyenlőtlenséget, akkor nem kapjuk meg a feladat állítását.

81.**
A Cauchy-egyenlőtlenség miatt:

$$a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}\leq\sqrt{2\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a+b+c\right)},$$

így elegendő belátnunk, hogy

$$2\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a+b+c\right)\leq\left(a^3+b^3+c^3\right)^2.$$

Mivel az (a,b,c) és $\left(a^2,b^2,c^2\right)$ számhármasok azonosan rendezettek, így az ún. Csebisev-egyenlőtlenség miatt:

$$\frac{a+b+c}{3}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\leq\frac{a^3+b^3+c^3}{3}.$$

Innen kapjuk, hogy

$$(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)\leq 3\left(a^3+b^3+c^3\right),$$

ezért elég igazolnunk, hogy

$$6\left(a^3+b^3+c^3\right)\leq\left(a^3+b^3+c^3\right)^2,$$
$$6\leq a^3+b^3+c^3,$$
$$3abc\leq a^3+b^3+c^3.$$

Ez utóbbi a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt nyilvánvalóan teljesül. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a=b=c=\sqrt[3]{2}$.

82.*
Ekvivalens az eredeti állítással a következő: ha $x^3+y^3>2$, akkor $x^2+y^3<x^3+y^4$.
(A kontrapozíció elve: $A\to B\Leftrightarrow\neg B\to\neg A$.)
A négyzetes ill. a harmadik hatványközép közötti egyenlőtlenség miatt:

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\leq\sqrt[3]{\frac{x^3+y^3}{2}},$$
$$x^2+y^2\leq\left(x^3+y^3\right)^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}<x^3+y^3.$$

Innen

$$x^2-x^3<y^3-y^2.$$

Vegyük észre, hogy

$$0\leq y^2\left(y-1\right)^2=y^4-2y^3+y^2,$$
$$y^3-y^2\leq y^4-y^3.$$

Összevetve:

$$x^2-x^3<y^4-y^3,$$
$$x^2+y^3<x^3+y^4,$$

amit éppen igazolni akartunk! Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $x=y=1$.

83.*
Átrendezve:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-a-b-c=\frac{1-a^2}{a}+\frac{1-b^2}{b}+\frac{1-c^2}{c}=\frac{b^2+c^2}{a}+\frac{c^2+a^2}{b}+\frac{a^2+b^2}{c}\geq\frac{2bc}{a}+\frac{2ca}{b}+\frac{2ab}{c}.$$

Elég belátni, hogy

$$\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\geq\sqrt{3},$$
$$b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2\geq\sqrt{3}abc=\sqrt{3}abc\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{3\left(a^4b^2c^2+b^4a^2c^2+c^4a^2b^2\right)}.$$

Elvégezve az $x=a^2b^2, y=b^2c^2, z=c^2a^2$ helyettesítéseket, négyzetre emelés után:

$$(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx),$$
$$x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx,$$

ami közismert. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $x=y=z\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

84.*
A Cauchy-egyenlőtlenséget fogjuk alkalmazni kétszer is. Egyrészt

$$3=a+b+c=1\cdot a+1\cdot b+1\cdot c\leq\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)},$$

így

$$(\text{-})\qquad 3\left(a^2+b^2+c^2\right)\leq\left(a^2+b^2+c^2\right)^2.$$

Másrészt

$$(\text{- -})\quad \left(a^2\left(b^2+1\right)+b^2\left(c^2+1\right)+c^2\left(a^2+1\right)\right)\left(\frac{a^2}{b^2+1}+\frac{b^2}{c^2+1}+\frac{c^2}{a^2+1}\right)\geq\left(a^2+b^2+c^2\right)^2.$$

Mivel

$$xy+yz+zx\leq x^2+y^2+z^2,$$

ezért

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\leq\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)^2,$$

így a (-) felhasználásával:

$$a^2\left(b^2+1\right)+b^2\left(c^2+1\right)+c^2\left(a^2+1\right)\leq\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)^2+a^2+b^2+c^2\leq\frac{2}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)^2.$$

Összevetve a (- -) egyenlőtlenséggel adódik a bizonyítandó állítás. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a=b=c=1$.

85.*
I. megoldás
Mivel

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx),$$

ezért

$$xy+yz+zx=-3.$$

Legyen $xyz = a$, ekkor a Viéte-formulák miatt x, y és z gyökei az $f(t) = t^3 - 3t - a$ polinomnak. Mivel $f'(t) = 3t^2 - 3$, továbbá $f''(t) = 6t$, ezért $f(t)$-nek a $t = -1$ helyen lokális maximuma, a $t = 1$ helyen pedig lokális minimuma van, valamint a függvény a $t = -1$ helyig szigorúan monoton nő, a -1 és 1 között szigorúan monoton csökken, majd a $t = 1$ hely után szigorúan monoton nő. Mivel a feltételek miatt a polinomnak nem lehet 3-szoros gyöke, ezért legalább két különböző valós gyöke van, következésképpen

$$f(-1) = -a + 2 \geq 0 \Rightarrow a \leq 2,$$

illetve

$$f(1) = -a - 2 \leq 0 \Rightarrow -2 \leq a.$$

A szorzat maximális értéke ezért 2 (pl. $x = 2, y = z = -1$), minimális értéke pedig -2 (pl. $x = -2, y = z = 1$).

II. megoldás

Csak a maximumra adunk másik megoldást, a minimumra hasonló gondolatmenet készíthető. Feltehetjük, hogy $x \leq y \leq z$, így $z > 0$. Mivel

$$(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2),$$

ezért

$$z^2 \leq 2(6 - z^2),$$

$$3z^2 \leq 12,$$

$$z \leq 2.$$

Így akkor

$$xyz \leq \left(\frac{x + y}{2}\right)^2 z = \frac{z^3}{4} \leq 2 .$$

86.**

a) Ismeretes, hogy

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca),$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca).$$

A bizonyítandó egyenlőtlenség ezért írható a következő módon:

$$5 - 10(ab + bc + ca) \leq 6 - 18(ab + bc + ca) + 18abc + 1,$$

$$4(ab + bc + ca) - 9abc \leq 1.$$

Feltehetjük, hogy $0 \leq a \leq \frac{1}{3}$. Legyen $t = bc$ és tekintsük az

$$f(t)=(4-9a)t+4a(1-a)$$

függvényt! Azt kell igazolnunk, hogy $f(t)\le 1$.

Rögzített a esetén f a t-nek elsőfokú függvénye és $4-9a>0$, ezért maximális pontosan akkor lesz, ha t a lehető legnagyobb értékét veszi fel. Mivel

$$t=bc\le\frac{(b+c)^2}{4}=\frac{(1-a)^2}{4},$$

ezért elegendő belátnunk, hogy

$$(4-9a)\frac{(1-a)^2}{4}+4a(1-a)\le 1,$$

$$9a^3-6a^2+a\ge 0,$$

$$a(3a-1)^2\ge 0,$$

ami nyilvánvaló.

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a=0, b=c=\frac{1}{2}$, vagy $a=b=c=\frac{1}{3}$, illetve ezen számhármasokból képzett permutációk.

Megjegyzés

A feladat megoldható a változók variálásának módszerével is. (28. feladat)

b) Az előző feladat megoldási módszerei közül bármelyik használható itt is.

Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a=b=c=\frac{1}{3}$.

c) Írjuk át az egyenlőtlenséget

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+48(ab+bc+ca)\ge 25$$

alakba. Feltehetjük, hogy $0<a\le b\le c$.

Tekintsük az

$$f(x,y,z)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+48(xy+yz+zx)$$

függvényt, ahol $x,y,z>0$. Először belátjuk, hogy

$$f(a,b,c)\ge f\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c\right),$$

azaz

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+48ab+48\left(a+b\right)c\geq\frac{4}{a+b}+\frac{1}{c}+48\frac{\left(a+b\right)^2}{4}+48\left(a+b\right)c\,.$$

Rendezés után:

$$\frac{a+b}{ab}+48ab\geq\frac{4}{a+b}+12\left(a+b\right)^2.$$

A nevezőkkel való szorzás, majd rendezés után:

$$\left(a+b\right)^2-4ab+12ab\left(a+b\right)\left[4ab-\left(a+b\right)^2\right]\geq 0,$$

$$(*)\qquad \left(a-b\right)^2\left[1-12ab\left(a+b\right)\right]\geq 0.$$

Mivel $4ab\leq\left(a+b\right)^2$, továbbá $a+b\leq\frac{2}{3}$, ezért

$$12ab\left(a+b\right)\leq 3\left(a+b\right)^3\leq 3\cdot\frac{8}{27}<1,$$

amiből már következik a (-) egyenlőtlenség. Ezek után elegendő igazolnunk, hogy

$$f\left(a,a,1-2a\right)\geq 25,$$

ahol $0<a\leq\frac{1}{3}$. Behelyettesítés után:

$$\frac{2}{a}+\frac{1}{1-2a}+48\left[a^2+2a\left(1-2a\right)\right]\geq 25,$$

$$\left(2-3a\right)\left[1+48a^2\left(1-2a\right)\right]\geq 25a\left(1-2a\right),$$

$$\left(3a-1\right)^2\left(4a-1\right)^2\geq 0,$$

ami nyilván igaz. Ezzel az eredeti egyenlőtlenséget is beláttuk, egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a=b=c=\frac{1}{3}$, illetve, ha két változó értéke $\frac{1}{4}$, a harmadiké pedig $\frac{1}{2}$.

87.*
Mivel pl.

$$x^5+y^5=\left(x+y\right)\left(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4\right)$$

és

$$x^4-x^3y-xy^3+y^4=\left(x-y\right)\left(x^3-y^3\right)\geq 0,$$

így

$$x^5+y^5\geq\left(x+y\right)x^2y^2.$$

Alkalmazva a bal oldal minden egyes tagjára a fenti becslést, adódik, hogy az nem kisebb, mint

$$\frac{1}{xy(x+y)+1}+\frac{1}{yz(y+z)+1}+\frac{1}{zx(z+x)+1}=\frac{z}{x+y+z}+\frac{x}{y+z+x}+\frac{y}{z+x+y}=1,$$

ami éppen a bizonyítandó állítás. Egyenlőség pontosan akkor fog teljesülni, ha $x=y=z=1$.

88.
Mivel

$$K=a^2bc+b^2cd+c^2da+d^2ab=a(abc)+b(bcd)+c(cda)+d(dab),$$

ezért alkalmazzuk a rendezési tételt az (a,b,c,d) és (abc,bad,cda,dcb) azonosan rendezett számnégyesekre! Kapjuk, hogy

$$K\le a(abc)+b(abd)+c(acd)+d(bcd)=(ab+cd)(ac+bd)\le\left(\frac{ab+cd+ac+bd}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{4}\left((a+d)(b+c)\right)^2\le\frac{1}{4}\left(\left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)^2\right)^2=4,$$

miközben kétszer is felhasználtuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség két változóra vonatkozó alakját. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha

$$2=a+d=b+c,$$
$$ab+cd=ac+bd,$$

ahonnan az $(1,1,1,1)$, illetve $(2,1,1,0)$ számnégyesek adódnak.

89.*
Az $\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$ illetve $\frac{1}{b+c},\frac{1}{c+a},\frac{1}{a+b}$ számhármasok ellentétesen rendezettek, így a

rendezési tétel miatt a bizonyítandó bal oldalán álló kifejezés legalább

$$\frac{1}{a(b+c)}+\frac{1}{b(c+a)}+\frac{1}{c(a+b)}.$$

Könnyű látni, hogy

$$(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca),$$

így elegendő belátnunk, hogy

$$\frac{1}{a(b+c)}+\frac{1}{b(c+a)}+\frac{1}{c(a+b)}\geq\frac{9}{2(ab+bc+ca)}.$$

Rendezve:

$$\frac{ab+bc+ca}{ab+ca}+\frac{ab+bc+ca}{bc+ab}+\frac{ab+bc+ca}{ca+bc}\geq\frac{9}{2},$$

$$\frac{bc}{ab+ca}+\frac{ca}{bc+ab}+\frac{ab}{ca+bc}\geq\frac{3}{2},$$

ami a 47. feladatban szereplő ún. Nesbitt-egyenlőtlenség miatt igaz. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a=b=c$.

90.*

Feltehetjük, hogy $|a|\leq|b|\leq|c|$. A Cauchy-egyenlőtlenség felhasználásával:

$$\left[2(a+b+c)-abc\right]^2=\left[(a+b)\cdot 2+c\cdot(2-ab)\right]^2\leq\left[(a+b)^2+c^2\right]\left[4+(2-ab)^2\right]=$$

$$=(9+2ab)\left[8-4ab+(ab)^2\right]=2(ab)^3+(ab)^2-20ab+72=(ab+2)^2(2ab-7)+100.$$

Mivel $c^2\geq 3$, így

$$2ab-7\leq a^2+b^2-7=9-c^2-7\leq -1,$$

ahonnan

$$\left[2(a+b+c)-abc\right]^2\leq 100,$$

$$2(a+b+c)-abc\leq 10.$$

Egyenlőség-feltevésünk mellett-pontosan akkor áll fenn, ha $a=-1, b=c=2$, bár ez csak némi számolás után adódik.

91.**

A feltételben szereplő egyenletekből álló egyenletrendszert megoldva:

$$x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, y=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}, z=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

Mivel a változók pozitívak, így $b^2+c^2>a^2, a^2+c^2>b^2, a^2+b^2>c^2$. A koszinusz-tétel miatt létezik olyan, a, b, c oldalhosszúságokkal bíró hegyesszögű háromszög, hogy a szokásos jelölések mellett

$$x=\cos a, y=\cos b, z=\cos g.$$

Így akkor

$$f(\cos a,\cos b,\cos g)=\frac{\cos^2 a}{1+\cos a}+\frac{\cos^2 b}{1+\cos b}+\frac{\cos^2 g}{1+\cos g}.$$

Legyen

$$u = \cot a\,, v = \cot b\,, w = \cot g\ !$$

Mivel

$$\cot g = \cot\left[180° - \left(a + b\right)\right] = -\cot\left(a + b\right) = \frac{1 - \cot a \cot b}{\cot a + \cot b}\,,$$

ezért

$$(\,\text{-}\,)\qquad uv + vw + wu = 1\,.$$

Trigonometriai alapösszefüggések felhasználásával:

$$\cot^2 a = \frac{\cos^2 a}{1 - \cos^2 a} = \frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 a} - 1}\,,$$

ahonnan

$$\cos a = \frac{\cot a}{\sqrt{1 + \cot^2 a}} = \frac{u}{\sqrt{1 + u^2}}\,,$$

továbbá

$$\frac{\cos^2 a}{1 + \cos a} = \frac{\dfrac{u^2}{1+u^2}}{1 + \dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}}} = \frac{u^2}{\sqrt{u^2+1}\left(\sqrt{u^2+1} + u\right)} = \frac{u^2\left(\sqrt{u^2+1} - u\right)}{\sqrt{u^2+1}} = u^2 - \frac{u^3}{\sqrt{u^2+1}}\,.$$

A (-) összefüggés miatt:

$$u^2 + 1 = \left(u + v\right)\left(u + w\right),$$

ezért

$$\frac{\cos^2 a}{1 + \cos a} = u^2 - \frac{u^3}{\sqrt{\left(u+v\right)\left(u+w\right)}} \geq u^2 - \frac{u^3}{2}\left(\frac{1}{u+v} + \frac{1}{u+w}\right),$$

felhasználva a mértani ill. harmonikus közép közötti egyenlőtlenséget. A $\cos b$ -ra és $\cos g$ -ra vonatkozó analóg levezetések eredményeinek felhasználásával:

$$f \geq u^2 + v^2 + w^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{u^3+v^3}{u+v} + \frac{w^3+v^3}{w+v} + \frac{u^3+w^3}{u+w}\right) =$$

$$= u^2 + v^2 + w^2 - \frac{1}{2}\left(u^2 - uv + v^2 + w^2 - wv + v^2 + u^2 - uw + w^2\right) = \frac{1}{2}\left(uv + vw + uw\right) = \frac{1}{2}.$$

Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $u = v = w$, így $a = b = c$, $x = y = z = \frac{1}{2}$.

Az f minimális értéke tehát $\frac{1}{2}$.

92.*

Legyen $f(x)=\ln\left(\frac{1}{x}-1\right)$, ahol $x\in\left]0;\frac{1}{2}\right[$! Állítjuk, hogy $f(x)$ konvex (Jensen-féle értelemben), azaz $0<x_1,x_2<\frac{1}{2}$ esetén

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

Logaritmus azonosságok, ill. az ln függvény szigorúan monoton növekedése miatt ez ekvivalens azzal, hogy

$$\left(\frac{2}{x_1+x_2}-1\right)^2\le\left(\frac{1}{x_1}-1\right)\left(\frac{1}{x_2}-1\right).$$

Átalakítva:

$$\frac{4}{(x_1+x_2)^2}-\frac{4}{x_1+x_2}\le\frac{1}{x_1x_2}-\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2},$$

$$4x_1x_2(1-x_1-x_2)\le(x_1+x_2)^2(1-x_1-x_2),$$

$$0\le(x_1-x_2)^2.$$

A Jensen-egyenlőtlenséget alkalmazva kaphatjuk, hogy

$$\ln\left(\frac{1}{\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}}-1\right)\le\frac{\ln\left(\frac{1}{a_1}-1\right)+\ln\left(\frac{1}{a_2}-1\right)+\ldots+\ln\left(\frac{1}{a_n}-1\right)}{n},$$

$$\left(\frac{n}{a_1+a_2+\ldots+a_n}-1\right)^n\le\left(\frac{1}{a_1}-1\right)\left(\frac{1}{a_2}-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{a_n}-1\right).$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

93.

Legyen $a=2x,b=2y,c=2z$, ekkor $a+b+c=2$ mellett kell igazolni, hogy

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}>2.$$

Mivel pl.

$$\frac{1}{1+a^2}=\frac{1+a^2-a^2}{1+a^2}=1-\frac{a^2}{1+a^2},$$

ezért a bizonyítandó:

$$3-\left(\frac{a^2}{1+a^2}+\frac{b^2}{1+b^2}+\frac{c^2}{1+c^2}\right)>2,$$

$$\frac{a^2}{1+a^2}+\frac{b^2}{1+b^2}+\frac{c^2}{1+c^2}<1.$$

Figyelembe véve, hogy pl. $1+a^2\geq 2a$, kapjuk:

$$\frac{a^2}{1+a^2}+\frac{b^2}{1+b^2}+\frac{c^2}{1+c^2}\leq\frac{a^2}{2a}+\frac{b^2}{2b}+\frac{c^2}{2c}=\frac{a+b+c}{2}=1.$$

Egyenlőség azonban nem állhat fenn, mivel az pontosan akkor teljesül, ha $a=b=c=1$, amit viszont a feladatban szereplő feltétel kizár.

94.

Világos, hogy $n=1$ és $n=2$ esetén egyenlőség áll fenn. A továbbiakban feltesszük, hogy $n\geq 3$. Mindkét oldalt osztva $(2n)^n$-nel:

$$\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n+1\leq\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n,$$

$$1\leq\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n-\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n.$$

A binomiális tétel felhasználásával:

$$1\leq\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{(2n)^k}-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\frac{1}{(2n)^k},$$

ahonnan

$$1\leq 2\left[\binom{n}{1}\frac{1}{2n}+\binom{n}{3}\frac{1}{(2n)^3}+\ldots\right],$$

amely nyilván igaz, hiszen

$$2\binom{n}{1}\frac{1}{2n}=1.$$

Az is leolvasható, hogy egyenlőség $n\geq 3$ esetén nem állhat fenn.

95.*
A 28. feladat megoldásánál bemutatott módszerek most is alkalmazhatók.
<u>*I. megoldás*</u>
Azonosság miatt:

$$\left(x+y+z\right)^2-2\left(xy+yz+zx\right)+xyz\ge 4,$$
$$-xyz+2\left(xy+yz+zx\right)\le 5,$$
$$\left(2-x\right)yz+2x\left(3-x\right)\le 5.$$

Feltehető, hogy a változók közül x a legkisebb értékű, így $0\le x\le 1$. Legyen $yz=t$ és

$$f\left(t\right)=\left(2-x\right)t+2x\left(3-x\right).$$

Mivel $2-x>0$, így $f\left(t\right)$ rögzített x érték mellett elsőfokú, továbbá akkor maximális, ha $yz=t$ maximális. A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt:

$$t=yz\le\left(\frac{y+z}{2}\right)^2=\frac{\left(3-x\right)^2}{4}=t_0,$$
$$f\left(t_0\right)=\frac{\left(2-x\right)\left(3-x\right)^2}{4}+2x\left(3-x\right),$$

így elég belátni, hogy $f\left(t_0\right)\le 5$. Elvégezve a műveleteket:

$$-x^3+3x+18\le 20,$$
$$0\le x^3-3x+2,$$
$$0\le\left(x-1\right)^2\left(x+2\right),$$

ami igaz.
Ezzel az eredeti állítást is igazoltuk, egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $x=y=z=1$.
<u>*II. megoldás*</u>
Tekintsük az

$$f\left(x,y,z\right)=x^2+y^2+z^2+xyz$$

függvényt!
Feltehető, hogy $x\ge y\ge z$. Először igazoljuk, hogy ekkor

$$f\left(x,y,z\right)\ge f\left(\frac{x+y}{2},\frac{x+y}{2},z\right).$$

Kiírva:

$$x^2+y^2+z^2+xyz \geq \frac{(x+y)^2}{4}+\frac{(x+y)^2}{4}+z^2+\frac{(x+y)^2}{4}z,$$
$$4x^2+4y^2+4xyz \geq 2x^2+2y^2+4xy+x^2z+y^2z+2xyz,$$
$$2x^2+2y^2+2xyz \geq 4xy+x^2z+y^2z,$$
$$2(x-y)^2 \geq 2z(x-y)^2,$$
$$2(x-y)^2(1-z) \geq 0,$$

ami nyilván igaz. A továbbiakban elegendő belátnunk, hogy

$$f(a,a,3-2a) \geq 4,$$

ahol $a \leq \frac{3}{2}$. Kiírva:

$$2a^2+(3-2a)^2+a^2(3-2a) \geq 4,$$
$$9-12a+9a^2-2a^3 \geq 4,$$
$$(1-a)\left(2a^2-7a+5\right) \geq 0,$$
$$(1-a)^2(5-2a) \geq 0,$$

amely valóban teljesül.
Az egyenlőség esete könnyen leolvasható.

Megjegyzés:
Érdemes összevetni a feladatban szereplő állítást az 54. feladatban szereplő állítással!

96.*
Vezessük be a $p=a+b+c$ és $r=abc$ helyettesítéseket! A bal oldalon elvégezve a szorzást:

$$27a^2b^2c^2+9\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+3\left(a^2+b^2+c^2\right)+1 \geq 64,$$
$$9a^2b^2c^2+3\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+a^2+b^2+c^2 \geq 21,$$
$$9r^2+p^2+3\left[(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)\right] \geq 27,$$
$$9r^2+p^2-6rp \geq 0,$$
$$(3r-p)^2 \geq 0.$$

Az utoljára kapott egyenlőtlenség nyilván teljesül, így az eredeti egyenlőtlenséget is igazoltuk. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha

$$3r=p \Leftrightarrow 3abc=a+b+c \Leftrightarrow c=\frac{a+b}{3ab-1}.$$

Mivel

$$ab + bc + ca = 3,$$

így

$$ab + \frac{(a+b)^2}{3ab-1} = 3,$$

$$3a^2b^2 + ab + a^2 + b^2 = 9ab - 3,$$

$$3(ab-1)^2 + (a-b)^2 = 0,$$

ahonnan

$$a = b = 1 \Rightarrow c = 1.$$

97.*

A bal oldali egyenlőtlenség egyszerűen adódik a számtani és harmonikus közép közötti egyenlőtlenségből, mely szerint

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}} \le \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \quad .$$

Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha minden x_i egyenlő.
A jobb oldali egyenlőtlenség bizonyításához induljunk ki a nyilvánvalóan igaz

$$(a - x_i)(b - x_i) \le 0$$

egyenlőtlenségből! Innen

$$(\text{-}) \qquad ab\frac{1}{x_i} + x_i \le a + b \quad .$$

A minden i-re felírt (-) alakú egyenlőtlenségeket összeadva nyerhetjük, hogy

$$ab\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} x_i \le n(a+b) \quad .$$

A bal oldal alulról becsülhető a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség segítségével:

$$2\sqrt{ab\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)} \le ab\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} x_i \le n(a+b) \quad ,$$

ahonnan

$$\left(\frac{1}{x_i} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right)(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \le \frac{n^2(a+b)^2}{4ab} = \frac{1}{4}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2\right)n^2 \quad .$$

Egyenlőség teljesüléséhez (-)-ban minden i-re $x_i = a$, vagy $x_i = b$ kell, hogy legyen. A közepek között akkor van egyenlőség, ha

$$ab\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i \ .$$

Tegyük fel, hogy *k* db *i*-re $x_i = a$ és m db *i*-re $x_i = b$. Ekkor $k+m=n$, és

$$ab\left(\frac{k}{a}+\frac{m}{b}\right)=ka+mb$$

$$bk+am-ka-mb=0$$

$$(k-m)(b-a)=0$$

Ha $a=b$, akkor triviális, hogy az eredeti egyenlőtlenségben egyenlőség áll fenn. Ha $a<b$, akkor egyenlőség csakis akkor teljesülhet, ha $k=m$, tehát *n* páros. (Ez a megoldás Mike János középiskolai tanártól származik.)

98.*

Legyen $x_1+x_2+\ldots+x_n=s$. Ekkor az állítás:

$$(-) \qquad \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{s-x_i}\geq\frac{n}{n-1} \ .$$

Legyen

$$s-x_i=b_i \ ,$$

így

$$b_1+b_2+\ldots+b_n=ns-(x_1+x_2+\ldots+x_n)=(n-1)s \ .$$

A bizonyítandó írható a következőképpen:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{s-b_i}{b_i}\geq\frac{n}{n-1} \ ,$$

ahonnan

$$s\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i}\geq\frac{n}{n-1}+n=\frac{n^2}{n-1} \ .$$

A számtani és harmonikus közép közötti egyenlőtlenség miatt azonban

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i}\geq\frac{n^2}{b_1+b_2+\ldots+b_n}=\frac{n^2}{(n-1)s} \ ,$$

így készen is vagyunk.

99.*
a) Ha minden x_i egyenlő, akkor egyenlőség áll fenn.
Ha a számok között vannak különbözőek, akkor jelölje x_1 a legkisebbet, x_2 pedig a legnagyobbat. Legyen

$$G=\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}\ ,$$

ekkor

$$x_1<G<x_2\ .$$

Írjunk most x_1 helyére G-t, x_2 helyére pedig $\frac{x_1x_2}{G}$ kerüljön! A jobb oldal nem változik, a bal oldal viszont csökken, ugyanis:

$$(1+x_1)(1+x_2)=1+x_1x_2+x_1+x_2>1+x_1x_2+G+\frac{x_1x_2}{G}=(1+G)\left(1+\frac{x_1x_2}{G}\right),$$

hiszen

$$(G-x_1)(x_2-G)>0\ .$$

Ezzel a módszerrel a bal oldal értékét csökkentve véges sok lépésben a jobb oldalhoz jutunk, ami igazolja az eredeti egyenlőtlenség helyességét!

Megjegyzés:
A feladatban szereplő egyenlőtlenség Huygenstől származik.
A bemutatott módszerrel igazolta Riesz Frigyes professzor a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget.

b) Az a) esetben látott módszerrel oldható meg: a bal oldal növelésével a jobb oldalhoz juthatunk.

100.*
a) A 99. feladatban leírtak szerint eljárva, elég megmutatnunk, hogy

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}>\frac{1}{1+G}+\frac{1}{1+\frac{x_1x_2}{G}}\ .$$

Rendezés és a törtek összevonása után:

$$\frac{1}{(1+x_1)(1+G)}>\frac{x_2}{(G+x_1x_2)(1+x_2)}\ ,$$

ahonnan

$$(x_2-G)(x_1x_2-1)>0\ .$$

Mivel

$$1<x_1<G<x_2$$

így ez igaz.
Egyenlőség akkor és csak akkor lesz, ha minden x_i egyenlő.

b) Az a) részben elmondottak alapján könnyű látni az állítás helyességét.

101.*
Legyen $x_i = a_i^n$, ekkor $a_1 a_2 \dots a_n = 1$, továbbá a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt:

$$\frac{1}{n-1+x_k} = \frac{1}{n-1+a_k^n} = \frac{1}{n-1+\dfrac{a_k^{n-1}}{a_1 \dots a_{k-1} a_{k+1} \dots a_n}} \le \frac{1}{n-1+\dfrac{(n-1)a_k^{n-1}}{a_1^{n-1}+\dots+a_{k-1}^{n-1}+a_{k+1}^{n-1}+\dots+a_n^{n-1}}} =$$

$$= \frac{a_1^{n-1}+\dots+a_{k-1}^{n-1}+a_{k+1}^{n-1}+\dots+a_n^{n-1}}{(n-1)\left(a_1^{n-1}+\dots+a_n^{n-1}\right)}.$$

Összeadva a $k = 1,2,\dots,n$ esetén felírt egyenlőtlenségeket, adódik a bizonyítandó állítás. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$.

102.*
Ha $a = b = c = d = -1$, akkor

$$-3 \ge -4k \Leftrightarrow k \ge \frac{3}{4}.$$

Ha $a = b = c = d = \frac{1}{2}$, akkor

$$\frac{3}{2} \ge 2k \Leftrightarrow k \le \frac{3}{4},$$

Így az egyetlen szóba jöhető érték a $k = \frac{3}{4}$. A továbbiakban igazoljuk, hogy ez meg is felel, azaz az adott intervallumon

$$(\text{-}) \qquad a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \ge \frac{3}{4}(a+b+c+d).$$

Mivel $x \ge -1$ esetén

$$(x+1)(2x-1)^2 \ge 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 1 \ge 3x,$$

ezért

$$4a^3 + 1 \ge 3a,$$
$$4b^3 + 1 \ge 3b,$$
$$4c^3 + 1 \ge 3c,$$
$$4d^3 + 1 \ge 3d.$$

Összeadás, majd 4-gyel való osztás után adódik a (-) egyenlőtlenség.

103.*

Feltehetjük, hogy $a_1 > 0$, továbbá, hogy a_{2k+1} a legkisebb az a_i számok között. A megoldás kulcsa az

$$(a_1 + a_3 + .. + a_{2k+1})(a_2 + a_4 + ... + a_{2k})$$

szorzat előállítása.
Tekintsük az alábbi becsléseket:

$$4 = (a_1 + a_2 + ... + a_{2k+1})^2 \ge (a_1 + a_2 + ... + a_{2k+1})^2 - (a_1 - a_2 + a_3 - ... - a_{2k} + a_{2k+1})^2 =$$
$$= 4(a_1 + a_3 + ... + a_{2k+1})(a_2 + a_4 + ... + a_{2k}) \ge$$
$$\ge 4(a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_{2k}a_{2k+1}) + 4(a_1a_4 + a_2a_5 + ... + a_{2k-2}a_{2k+1}) + 4a_1(a_6 + a_8 + ... + a_{2k}) =$$
$$= 4 + 4(a_1a_4 + a_2a_5 + ... + a_{2k-2}a_{2k+1}) + 4a_1(a_6 + a_8 + ... + a_{2k} - a_{2k+1}) \ge 4.$$

Ebből következik, hogy teljesülnie kell az alábbiaknak:

$$(1) \qquad a_1 + a_3 + ... + a_{2k+1} = a_2 + a_4 + ... + a_{2k} = 1,$$
$$(2) \qquad a_1a_4 = a_2a_5 = ... = a_{2k}a_{2k+1} = 0,$$
$$(3) \qquad a_6 + a_8 + ... + a_{2k} = a_{2k+1.}$$

A (3)-ból adódik, hogy $a_6 = a_8 = ... = a_{2k} = 0 = a_{2k+1}$, így a (2) miatt $a_4 = 0$. Ha figyelembe vesszük az (1) összefüggést, akkor $a_2 = 1$, ezért $a_1 + a_3 = 1$ a feladatban szereplő második összefüggésből. Az első összefüggés miatt akkor

$$a_4 + a_5 + ... + a_{2k+1} = 0 \Rightarrow a_4 = a_5 = ... = a_{2k+1} = 0.$$

Kaptuk, hogy

$$S = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 2(a_1^2 - a_1 + 1) = 2\left(a_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}.$$

Innen $S_{\max} = 2$, ha $a_1 = 1$ és $S_{\min} = \frac{3}{2}$, ha $a_1 = \frac{1}{2}$.

104.

Legyen $b_i = 2 - a_i$, $S = \sum_{i=1}^{n} b_i$ és $T = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$. Ekkor a feladatban szereplő feltételek:

$$2 - b_1 + ... + 2 - b_n \ge n \Leftrightarrow n \ge S,$$
$$(4 - 4b_1 + b_1^2) + ... + (4 - 4b_n + b_n^2) \ge n^2 \Leftrightarrow T \ge n^2 - 4n + 4S.$$

Alkalmazzunk indirekt bizonyítási módszert, tegyük fel, hogy $b_i > 0$ minden i-re! Ekkor

$$b_i < \sum_{i=1}^{n} b_i = S \le n \Rightarrow T < nS.$$

Másrészt

$$T \ge n(n-4) + 4S \ge (n-4)S + 4S = nS,$$

ami ellentmondásra vezet. Tehát létezik olyan i, melyre $b_i \le 0 \Leftrightarrow 2 \le a_i$, ahonnan adódik a feladat állítása.

105.*

I. megoldás

A Cauchy-egyenlőtlenséget alkalmazva:

$$(x+y+z)\left(\frac{a^3}{x}+\frac{b^3}{y}+\frac{c^3}{z}\right) \ge \left(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}\right)^2.$$

Legyen $a^{\frac{1}{2}} = A, b^{\frac{1}{2}} = B, c^{\frac{1}{2}} = C$! Elegendő igazolnunk, hogy

$$\left(A^3+B^3+C^3\right)^2 \ge \frac{\left(A^2+B^2+C^2\right)^3}{3}.$$

9-cel való osztás, majd $\frac{1}{6}$-odik hatványra emelés után:

$$\left(\frac{A^3+B^3+C^3}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \ge \left(\frac{A^2+B^2+C^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}},$$

ami a hatványközepek monotonitására vonatkozó tétel miatt igaz.
Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $A = B = C \Leftrightarrow a = b = c, x = y = z$.

II. megoldás

Az ún. Hölder-egyenlőtlenséget fogjuk alkalmazni, mely szerint, ha $a_1, a_2, ..., a_n > 0; b_1, b_2, ..., b_n > 0; ...; z_1, z_2, ..., z_n > 0$, továbbá a $l_i \ge 0$ számokra $l_a + l_b + ... + l_z = 1$, akkor

$$(a_1+...+a_n)^{l_a} \cdot (b_1+...+b_n)^{l_b} \cdot ... \cdot (z_1+...+z_n)^{l_z} \ge a_1^{l_a} b_1^{l_b} ... z_1^{l_z} + ... + a_n^{l_a} b_n^{l_b} ... z_n^{l_z}.$$

Az $n = 3$ és $l_a = l_b = l_c = \frac{1}{3}$ választás mellett:

$$\left(\frac{a^3}{x}+\frac{b^3}{y}+\frac{c^3}{z}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot (1+1+1)^{\frac{1}{3}} \cdot (x+y+z)^{\frac{1}{3}} \ge a+b+c.$$

Mindkét oldalt köbre emelve, majd osztva $3(x+y+z)$-vel adódik a bizonyítandó állítás.

Megjegyzés
A feladat állítása természetes módon általánosítható.

106.
Legyen

$$p(x,y,z)=xy^4+yz^4+zx^4-x^4y-y^4z-z^4x,$$

és tekintsük az alábbi átalakításokat:

$$\begin{aligned}p(x,y,z)&=zy\left(z^3-y^3\right)+xz\left(x^3-z^3\right)+xy\left(y^3-z^3\right)=\\&=zy\left(z^3-y^3\right)+xz\left(y^3-z^3\right)+xz\left(x^3-y^3\right)+xy\left(y^3-x^3\right)=\\&=z(y-x)\left(z^3-y^3\right)+x(z-y)\left(x^3-y^3\right)=\\&=(y-x)(z-y)\left[z\left(z^2+zy+y^2\right)-x\left(x^2+xy+y^2\right)\right]=\\&=(y-x)(z-y)\left[\left(z^3-y^3\right)+y^2(z-x)+y\left(z^2-x^2\right)\right]=\\&=(y-x)(z-y)(z-x)\left(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx\right)\geq 0,\end{aligned}$$

felhasználva a feladatban szereplő feltételt, továbbá azt, hogy

$$x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx=\frac{1}{2}\left[(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2\right].$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $x=y$ vagy $y=z$ vagy $x=y=z$.

107.*
Egy adott zárt intervallumon konvex függvény a maximális értékét az adott intervallum valamelyik végpontjában veszi fel, ami a konvexitás definíciójának következménye. Fel fogjuk továbbá használni azt, hogy egy adott zárt intervallumon konvex függvények összegzésével kapott függvény is konvex az adott intervallumon.
Jelöljük az egyenlőtlenség bal oldalán szereplő kifejezést $f(a,b,c)$-vel! Ha rögzítjük b és c értékét, akkor f két a-ban lineáris (így konvex) ill. két $g(a)=\dfrac{r}{s+a}$ típusú, tehát konvex függvény összegeként áll elő, ezért maximális értékét az $a=0$ vagy $a=1$ helyen veszi fel. Mivel a gondolatmenet a másik két változóra ugyanígy elmondható, ezért $f(a,b,c)$ összesen 8 helyen veheti fel maximális értékét.
Ha $a=b=c=0$, akkor $f(a,b,c)=1$.

Ha $b=c=0$ és $a=1$, akkor $f(a,b,c)=1$.

Ha $c=0$ és $a=b=1$, akkor $f(a,b,c)=1$.

Ha $a=b=c=1$, akkor $f(a,b,c)=1$.

Tekintettel arra, hogy több, elvileg különböző eset nem léphet fel, így beláttuk, hogy $f(a,b,c)\le 1$. Egyenlőség pontosan a fentebb említett 8 esetben áll fenn.

108.
Átrendezve és ekvivalens átalakításokat végezve:

$$\sqrt{12abc}\le (a+b+c)^2-\left(a^2+b^2+c^2\right),$$

$$\sqrt{12abc}\le 2(ab+bc+ca),$$

$$12abc(a+b+c)\le 4(ab+bc+ca)^2,$$

$$3abc(a+b+c)\le (ab+bc+ca)^2.$$

Elvégezve a műveleteket:

$$a^2bc+ab^2c+abc^2\le a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2,$$

$$0\le \frac{1}{2}\left[(ab-bc)^2+(bc-ca)^2+(ca-ab)^2\right],$$

ami nyilván igaz. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a=b=c=\frac{1}{3}$.

109.*
Mivel $x,y>0$ esetén

$$(x+y)^2\ge 4xy \Leftrightarrow (x-y)^2\ge 0,$$

ezért

$$4\left(a_{i-1}+a_i+a_{i+1}\right)^2=\left[\left(2a_{i-1}+a_i\right)+\left(a_i+2a_{i+1}\right)\right]^2\ge 4\left(2a_{i-1}+a_i\right)\left(a_i+2a_{i+1}\right),$$

így

$$(\text{-})\qquad \left(a_{i-1}+a_i+a_{i+1}\right)^2\ge \left(2a_{i-1}+a_i\right)\left(a_i+2a_{i+1}\right).$$

Vegyük észre, hogy

$$(2x+y)(2y+x)>2(x+y)^2,$$

hiszen

$$4xy+2x^2+2y^2+xy>2x^2+2y^2+4xy,$$

ahonnan

$$(\text{- -})\qquad \left(2a_{i-1}+a_i\right)\left(2a_i+a_{i-1}\right)>2\left(a_{i-1}+a_i\right)^2.$$

Az (-) és (- -) megfelelő oldalainak összeszorzásával:

$$\left(a_{i-1}+a_i+a_{i+1}\right)^2\cdot\left(2a_i+a_{i-1}\right)>2\left(a_{i-1}+a_i\right)^2\cdot\left(a_i+2a_{i+1}\right).$$

Felírva az ennek megfelelő egyenlőtlenségeket az $i=2,3,...,n,n+1$ esetekre, a megfelelő oldalak összeszorzása és egyszerűsítés, majd négyzetgyökvonás után adódik a bizonyítandó állítás.

110.
a) Bővítsük a törteket, majd alkalmazzuk a Cauchy-egyenlőtlenség nevezetes következményét:

$$\frac{x^2}{x^2+2xy+3zx}+\frac{y^2}{3xy+y^2+2yz}+\frac{z^2}{2zx+3yz+z^2}\ge\frac{\left(x+y+z\right)^2}{x^2+y^2+z^2+5\left(xy+yz+zx\right)}.$$

Elegendő igazolnunk, hogy

$$\frac{\left(x+y+z\right)^2}{x^2+y^2+z^2+5\left(xy+yz+zx\right)}\ge\frac{1}{2}.$$

Átrendezés, illetve a műveletek elvégzése után:

$$x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx,$$

ami közismert egyenlőtlenség. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $x=y=z$.

b) Legyen $2x+y+z=4a, x+2y+z=4b, x+y+2z=4c$! Összeadás után:

$$x+y+z=a+b+c,$$

ahonnan

$$x=3a-b-c, y=3b-a-c, z=3c-a-b.$$

Behelyettesítés után a bizonyítandó állítás:

$$\frac{3a-b-c}{4a}+\frac{3b-a-c}{4b}+\frac{3c-a-b}{4c}\le\frac{3}{4},$$

$$9-\left[\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\right]\le 3,$$

$$6\le\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right),$$

ami igaz, hiszen a zárójelekben álló kifejezések mindegyike legalább 2. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $x=y=z$.

Megjegyzés
Természetesen a feladat a) része is megoldható a b) részben látott helyettesítéses módszerrel.

111.*
Az ún. Minkowski-egyenlőtlenség szerint

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} \geq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(a_k + b_k\right)^2} \ .$$

Mivel a feladatban szereplő egyenlőtlenség bal oldalán álló kifejezés írható

$$\sqrt{\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}+\sqrt{\frac{1}{4}+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\left(c-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}$$

alakban, ezért kétszer egymás után alkalmazva a fenti egyenlőtlenséget kapjuk, hogy a kifejezés értéke legalább

$$\sqrt{\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\left(b+\frac{1}{2}\right)^2+\left(c+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{a^2+b^2+c^2+a+b+c+3}\,,$$

ami adja a bizonyítandó állítást. Egyenlőség: $a=b=c=1$.