Tudományos népszerűsítő előadások a Fazekasban

RECSKI ANDRÁS
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem,
Számítástudományi és Információelméleti Tanszék

Gráfok színezése

A 2008. január 22-én elhangzott előadást lejegyezte

LENGER DÁNIEL és PROK TAMÁS

Az alapfeladatok

Gráfok színezésével kapcsolatos klasszikus feladat a térképszínezési probléma: adott egy síkba rajzolható gráf, amely tartományokra osztja a síkot; legkevesebb hány színnel lehet kifesteni a tartományokat úgy, hogy élben szomszédos tartományok színe mindenhol különböző legyen. Az előadásban erről a feladatról nem esett szó, mert a gráf *éleinek és pontjainak színezése* volt a téma.

Két probléma szokott felmerülni a pontok és élek színezésével kapcsolatban:

1. Legkevesebb hány színnel lehet egy gráf pontjait kiszínezni úgy, hogy semelyik két szomszédos pont ne kaphasson azonos színt?

2. Legkevesebb hány színnel lehet egy gráf éleit kiszínezni úgy, hogy semelyik két egy csúcsba futó él ne kaphasson azonos színt?

Példák: Egy négyszög egyik átlóját behúzzuk. Próbáljuk meg kiszínezni az így kapott gráfot!

Csúcsszínezés. Színezzük a bal oldali ábrán látható A és B csúcsot pirossal és kékkel, ekkor, közös szomszédjuk, a C csúcs már nem lehet se piros, se kék, kell egy harmadik szín, például zöld. Végül a negyedik csúcs nem lehet se piros, se zöld, de kék még igen, – persze másmilyen is, de az a cél, hogy minél kevesebb színnel színezzünk –, így legyen kék. Kevesebb nyilván nem elég, mert van három pont, amik páronként szomszédosak, tehát csak ezek miatt kell legalább három szín.

Élszínezés. Induljunk ki a C pontból. Ennek fokszáma három, tehát a három él indul ki belőle. A kikötés miatt ezeknek nem szabad azonos színűnek lenni, így legalább három színre szükség van: például pirosra, kékre és zöldre. A (B, A) él nem lehet piros és kék, de zöld még igen, és az (A, D) él pedig már nem lehet zöld vagy kék, de piros még igen, tehát piros lesz.

A példákban véletlenül a pont- és élszínezés olyan feladat volt, hogy mindkettőt meg lehetett csinálni három színnel, de kettővel már nem. Általában a két feladat természetesen teljesen különböző. A görög ábécé χ betűjével szokták jelölni a gráf kromatikus számát, azaz, hogy legalább hány szín szükséges a gráf pontjainak színezéséhez, esetünkben ez 3. Az élek színezése esetén ezt kromatikus indexnek szokták nevezni, jelöljük ezt χ_e-vel, éppenséggel ez is 3.

Miért van szükség ilyesmire?

Matematikusok vagy spec. mat. osztályba járó diákok ritkán szokták feltenni ezt a kérdést. *Egy matematikai kérdés azért szép, mert szépnek tartjuk, és nem feltétlenül foglalkozunk azzal, hogy milyen gyakorlati haszna van.* De léteznek olyan gyakorlati problémák, ahol felmerülnek ezek a kérdések.

Például valaki egy konferenciát szervez, és sok előadás van. Nyilván lesznek olyanok, akiket több hasonló témájú előadás is érdekel, és ezeket nem lehet egymással párhuzamosan tartani különböző termekben, és az sem megfelelő, ha az előadásokat egymás után tartják meg, mert ekkor a konferencia esetleg túl hosszúra nyúlik. Tehát az a cél, hogy minél több párhuzamos előadás legyen, de a nagyjából hasonló témájú előadások ne zavarják egymást. Ennek a problémának egy lehetséges modellje, hogy a szervező készít egy gráfot, aminek csúcsai az előadások, és akkor köt össze kettőt éllel, ha a két előadás témája nagyjából azonos, tehát nem szabad párhuzamosan megtartani őket. Ekkor ennek a gráfnak a csúcsait kell a lehető legkevesebb színnel kiszínezni, ahol az azonos színek az egymásba lógó előadásokat jelentik. Ekkor két összekötött pont nyilván nem lehet azonos színű, így a csúcsszínezés problémájába futottunk.

Hasonlóan természetes módon, máshelyen az élszínezés problémája kerül elő. Például egy iskolában augusztusban meg kell szervezni az órarendet. Egy lehetséges modell – ami nem oldja meg teljes általánosságban a problémát, de sokat segít –, hogy az órarendkészítő tanár fog egy szép nagy papírt, és rárajzol egy gráfot, aminek pontjai az osztályok és egy csomó további csúcsot, amik a tanároknak felelnek meg. Ha egy tanárnak egy osztállyal van heti 2 órája, akkor a tanárnak megfelelő csúcsot kétszeres éllel köti az osztálynak megfelelő csúcshoz, ha egy másik osztállyal van órája akkor ahhoz is megfelelő számú éllel köti, és így tovább minden tanárnál és osztálynál. Aztán kiszínezi a gráf éleit, hogy két él akkor legyen azonos színű, ha egy időben vannak az órák. Ekkor nyilván nem fordulhat elő az, hogy egy csúcsba két azonos színű él fusson be, mert akkor egy tanárnak vagy egy osztálynak két osztálynál illetve tanárnál kéne egy időben tartózkodnia, és nyilván az is cél, hogy minél kevesebb színnel színezze ki, hiszen az nem jó, ha egy osztálynak túl sokáig kell bent maradni.

Az élek színezése

A p pont fokszámát általában $d(p)$-vel szokták jelölni a gráfelméletben. G gráfban minden csúcs fokszáma közül a legnagyobb legyen $\Delta(G)$. Könnyen belátható, hogy egy gráf éleinek megfelelő kiszínezéséhez legalább ennyi színre van szükség, mert a legnagyobb fokszámú csúcsból ennyi él indul ki, és ezeknek mind különböző színűnek kell lenni, tehát

$$\Delta(G) \leq \chi_e(G).$$

Ez nyilvánvaló. Viszont sokkal érdekesebb, hogy egy egyszerű gráfban ennél sokkal több szín nem kell. Általánosságban ez a képlet írható fel, ahol G egyszerű gráfot jelöl:

$$\Delta(G) \leq \chi_e(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

(Van olyan gráf, például a 3 hosszú kör, ahol ténylegesen szükség van $\Delta(G) + 1$ színre.)

Megjegyezzük, ha a gráfban vannak párhuzamos élek, akkor ez természetesen nem igaz, például nézzük azt a gráfot, amely úgy keletkezett, hogy egy három csúcsú gráf minden csúcsát összekötöttük két éllel. Ekkor minden csúcs fokszáma 4, így $\Delta(G) = 4$, de nem elég 5 szín, mert bármely két élnek van közös pontja, és 6 él van. Ha többszörös éleket is megengedünk, akkor csak egy sokkal gyengébb tételt lehet mondani, ez az úgy nevezett Shannon-tétel, miszerint:

$$\chi_e \leq \frac{3}{2}\Delta(G).$$

Ezzel a továbbiakban nem fogunk foglalkozni, viszont az egyszerű gráfokra vonatkozó tételt belátjuk.

Egy három csúcsú gráf minden csúcsát összekötöttük két éllel.

Ezt a tételt, miszerint G egyszerű gráfban $\chi_e(G) \leq \Delta(G) + 1$ elsőként egy *Vizing* nevű orosz matematikus bizonyította be 1964-ben. Az ő bizonyítása igen bonyolult volt, de később született egy egyszerű, algoritmikus bizonyítás, ami nemcsak kimondja, hogy ennél több szín nem kell, de azt is megmutatja, hogy hogyan lehet ennyi színből kiszínezni a gráfot. Hogy ténylegesen fel kell-e használni mind a $\Delta(G) + 1$ színt, vagy $\Delta(G)$ is elég, az a bizonyításból nem derül ki, sőt, annak gyors és hatékony eldöntése, hogy egy egyszerű gráfot általában pontosan hány színnel lehet kiszínezni ($\Delta(G)$ vagy $\Delta(G) + 1$) az egyike a ma még megoldatlan matematikai problémáknak.

Tegyük fel, hogy a gráfnak egy részgráfja már ki van színezve a kívánt módon. Mivel egy csúcs maximális fokszáma $\Delta(G)$, és ennél eggyel több színem van, biztos, hogy minden ponthoz lehet találni olyan színt, amilyen színű él nem indul ki belőle. Nevezzük ezt a csúcs szabad színének, és jelölje p pont egy szabad színét $s(p)$. Most egy következő élt kell színezni, ami például az x pontot köti össze az y_1 ponttal. Ez nem okoz gondot, ha $s(x) = s(y_1)$, azaz, ha van olyan szín, amivel se az x-ből se az y_1-ből induló élt nem színeztünk. De általában az a baj, hogy a két pontnak nincs közös szabad színe (például van 101 színünk, és az x ebből már 70, az y_1 pedig már 80 különbözőt felhasznált, könnyen lehet, hogy ketten együtt már mind a 101 színt felhasználták, és most egy őket összekötő élt kell színezni), azaz az x-ből kiindul egy $s(y_1)$ színű él az y_2-be. Ha szerencsénk van, akkor $s(x) = s(y_2)$, az (x, y_2) élt át tudjuk színezni erre a színre, és ekkor már semmi akadálya annak, hogy az (x, y_1) élt is kiszínezzük. De könnyen lehet, hogy az x-ből kiindul egy él az y_3-ba, aminek színe az $s(y_2)$, ha $s(x) = s(y_3)$, akkor az előzőekhez hasonlóan készen vagyunk, és így tovább. Tehát ha eljutunk odáig, hogy az x csúcs össze van kötve egy y_i csúccsal egy $s(y_{i-1})$ színű él mentén, és $s(x) = s(y_i)$, akkor az (x, y_i) élt át tudjuk színezni $s(y_i)$-re, az (x, y_{i-1})-et $s(y_{i-1})$-re stb. Már csak az a kérdés, hogy befejeződik-e ez valamikor. Ha igen, akkor készen vagyunk. Mivel csak véges sok csúcsa van a gráfnak, ezért legfeljebb az fordulhat elő, hogy egy ciklusba kerülünk, azaz hogy valahol lesz egy olyan y_j csúcs, aminek szabad színe éppen egyezik egy korábbi y_i-nek a szabad színével. Tehát akkor van baj, ha az $s(x) \neq s(y_i) = s(y_j)$, mert ekkor végtelen ciklusba kerülünk. Most feledkezzünk el minden élről, kivéve azokról, amik $s(x)$ vagy $s(y_i)$ színt kaptak, így egy H részgráfhoz jutunk. Mivel az eddigi színezésünk jó, azaz semelyik pontban nem találkozik két azonos színű él, ezért a H részgráfban egy csúcsból legfeljebb két él indul ki, amelyek színe $s(x)$ vagy $s(y_i)$, ezért H csak utakat, köröket és izolált pontokat tartalmazhat, amik semelyik útba vagy körbe nem tartoznak bele. Az x-nek szabad színe az $s(x)$, így belőle csak $s(y_i)$ színű él indulhat ki, hasonlóan $s(y_i)$-ből és $s(y_j)$-ből csak $s(x)$ színű, tehát x, y_i és y_j csak utak végpontjai lehetnek (izolált pontok azért nem, mert akkor az $s(x)$ és az $s(y_i)$ is szabad színük volna, pedig feltettük, hogy nem az), ezért kell hogy legyen legalább két különálló út. Mivel egy útnak csak két végpontja van, y_i vagy y_j garantáltan nincs benne abban az útban, amiben x. Ekkor ebben az útban kicseréljük, az $s(x)$ színeket $s(y_i)$-re és fordítva, így x szabad színe nem változik, a gráf színezése továbbra is megfelelő, de $s(x)$ már egyezik y_i vagy y_j szabad színével, és így már az (x, y_1) élt is ki tudjuk színezni a korábbiak alapján. Ekkor tovább mehetünk egy következő, még színezetlen élre, és ott is végig játszva ezt, a gráfot ki tudjuk színezni $\Delta(G) + 1$ színnel. Így a Vizing-tételt beláttuk, és az élszínezést egyszerű gráfokban szinte teljesen megoldottuk, hiszen, hogy az optimális, vagy eggyel több színnel színezünk egy gráfot, az nem okozhat nagy gondot a gyakorlatban.

A csúcsok színezése

Ha van a gráfban egy olyan részgráf, aminek minden csúcsa mindegyik másik csúccsal össze van kötve, azaz teljes gráf, akkor azt a rész gráfot *klikk*nek hívjuk. Egy gráf *klikk-száma* a klikkek csúcsszámainak maximuma, azaz a gráfban található legnagyobb klikk csúcsainak száma. G gráf klikk-számát $\omega(G)$-vel jelöljük, így egy gráfban biztosan található $\omega(G)$ csúcs, amelyek mindegyike az összes többivel össze van kötve, de $\omega(G)+1$ csúcs között már kell legyen két olyan, ami nincs összekötve. A gráf színezéséhez tehát nyilván legalább $\omega(G)$ színre van szükség, de ennyi nem biztos hogy elég, mert például egy öt hosszú körben $\omega = 2$, és ha elkezdjük színezni körbe, hogy piros, kék, piros, kék, akkor a következő már nem lehet piros, hiszen szomszédos az elsővel, ami szintén piros volt, de kék sem, mert szomszédos a negyedikkel, ami meg kék volt, így kell egy harmadik szín, tehát $\chi = 3$. A csúcsszínezésben az az érdekes, hogy a kromatikus számra már nem tudunk felső becslést adni a klikk-szám függvényében. Azt állítjuk, hogy bármilyen nagy kromatikus számú gráfot elő tudunk állítani úgy, hogy a klikk szám mindig kettő marad. A matematika nyelvén:

$$\forall\, k \geq 2\, (k \in \mathbb{N})\, \exists\, G_k, \text{ amire}\, \omega(G_k) = 2, \text{ de}\, \chi(G_k) = k.$$

Erre fogunk konstrukciót mutatni. Először példát adunk megfelelő gráfokra $k = 2$ illetve $k = 3$ esetén, majd megmutatjuk, hogy ha van egy G_k gráfunk, akkor abból hogyan tudjuk a G_{k+1}-et előállítani. Ezt a konstrukciót először *Mycielski* lengyel matematikus találta ki, róla ezt a konstrukciót *Mycielski-konstrukciónak* nevezik, és az ezzel előállított gráfokat pedig *Mycielski-gráfoknak.*

A 2. és 3. Mycielski-gráf, valamint a $k+1$-edik konstrukciója a k-adikból.

Megfelelő G_2 és G_3 gráf létezik, lásd ábra. Tegyük fel, hogy a G_k gráf már megvan. (Lásd karikázott rész az ábrán.) Legyenek ennek csúcsai $u_1; u_2; \ldots u_p$ (p természetesen nem egyenlő k-val), ezek alá rajzoljunk újabb pontokat, és jelöljük őket $v_1; v_2; \ldots v_p$-vel, ezeken kívül vegyünk fel még egy w csúcsot. Aztán a v_i csúcsot kössük azokkal az u

csúcsokkal, amik az u_i-hez vannak kötve, majd a w-t kössük össze az összes v-vel. (Az ábrán például a v_4 van összekötve az u_4 szomszédjaival, u_1-gyel és u_5-tel.) A v-k között élt nem használunk. Például a G_4-et lerajzoljuk, a külseje a G_3, és ezt egészítjük ki a megadott módon:

A negyedik Mycielski-gráf.

Ezt a gráfot a szakirodalomban *Grötzsch-féle* gráfnak nevezik.

A konstrukcióval kapcsolatban két dolgot kell belátni. Egyrészt, hogy nem keletkezett háromszög, azaz, hogy $\omega(G_{k+1}) = \omega(G_k) = 2$, másrészt, hogy a keletkezett gráf kromatikus száma tényleg eggyel nagyobb lett, mint az előzőé volt, azaz, hogy $\chi(G_{k+1}) = k + 1$.

Először belátjuk, hogy $\omega(G_{k+1}) = 2$. A G_k gráfban, a feltevésünk alapján, nem volt háromszög, így az u pontok között nem lehet háromszög. A v pontok között sem, hiszen a v-k közül semelyik kettőt nem kötöttük össze, így már a w sem lehet tagja egyetlen háromszögnek sem, mert az csak a v-kel van összekötve. Tehát, ha véletlen keletkezett háromszög, az csak a v-k és az u-k között lehet úgy, hogy két u betűvel jelölt, és egy v betűvel jelölt csúcs tartozik hozzá. Tegyük fel, hogy a (v_i, u_h, u_j) alkot egy háromszöget. Azt csináltuk, hogy a v-ket a párjuk szomszédjaival kötöttük össze, és ekkor a v_i-vel összekötött u_h és u_j csúcsok össze vannak kötve u_i-vel is, így a G_k gráfban (u_h, u_i, u_j) alkot egy háromszöget, ami ellentmondás, mert a G_k gráf háromszög mentes. Így a G_{k+1} háromszög mentes.

A G_{k+1} gráfot ki lehet színezni $k + 1$ színnel, mivel megtehetjük, hogy v_i-t olyan színűre színezzük, mint u_i volt, hiszen v_i is ugyanazokkal a csúcsokkal van összekötve, mint u_i, plusz még a w-vel, de azt színezhetjük egy $k + 1$-edik színnel. Már csak azt kell belátni, hogy $k + 1$ színre tényleg szükség van a G_{k+1} gráf színezéséhez, és k-val semmiképpen sem lehet, mert most csak azt láttuk be, hogy $k + 1$-nél több nem kell.

Tegyük fel, hogy ki tudtuk színezni a $k + 1$-edik Mycielski-gráfot k színnel. Legyen a w csúcs színe P, és ekkor a v pontok között egyetlen P sem lehet. Az u-k között még igen. Színezzük át az összes P színű u betűs csúcsot a párja színére. (Pl. ha az u_i és az u_j P színű volt, akkor az u_i-t átszínezzük a v_i színére és az u_j-t a v_j színére.) Ezzel azt értük el, hogy az u-k között sincsen P színű, mert mindet átszíneztük. De ettől még a G_k részgráf színezése helyes marad, ha a G_{k+1}-é is helyes volt, mert v_i is ugyanazokkal az u csúcsokkal szomszédos, mint u_i. Így az u csúcsokat tartalmazó G_k részgráf színezését nem rontottuk el, viszont sikerült a G_k gráfot $k - 1$ színnel kiszínezni, mert a P-t ehhez már nem használtuk fel, és azzal együtt volt k darab szín. Ellentmondásra jutottunk, mert a G_k kromatikus száma pontosan k volt, így minimum k szín kellett a színezéséhez.

Tehát a gráfok csúcskromatikus számára nem tudunk felső becslést adni a klikk-szám függvényében, mert bármilyen nagy kromatikus számú gráfra tudunk mutatni példát, aminek a klikk-száma 2.

Az előadás szünet előtti részét a Tanár úr egy, a ,,magyar lapkiadás egyik csúcsteljesítményének" a *Kretén magazinnak* a 2004/4 számából vett idézettel zárta, amiben a hónap kérdése a következő volt: *Ön milyen* man *szeretne lenni, és mit csinálna akkor, ha Ön* szuperhős *lenne, mi lenne a neve, és milyen* szuperképességekkel *rendelkezne?...* A Tanár úr feltételezi, hogy az egyik ,,játékos kedvű" műegyetemi hallgatója küldte be a következő választ: *Én bizony* Grötzschman *lennék, és ha bárhol a világon valakinek gondjai adódnának a* Mycielski-konstrukcióval, *illetve a* Grötzsch-gráfokkal, *akkor előtűnnék a semmiből és megoldanám minden problémájukat.*

Recski András professzor úr a *Kretén* magazinnal a kezében.

A szünet után folytatódott az előadás: ...mint láthattuk, a pontszínezés sokkal bonyolultabb feladat, mint az élszínezés, ám mégis általában a pont színezésre van szükség a különböző alkalmazásoknál. Most ilyenekre fogunk példát nézni.

Az integrált áramkörök

A villamosmérnöki tervezés egyik híres témaköre a VLSI tervezés (Very-large-scale integrated circuits: nagy bonyolultságú integrált áramkörök tervezése). Ennek egyik részfeladata az, hogy ha az alkatrészeket elhelyeztük az alapon, akkor hogyan huzalozzuk őket össze. Ez körülbelül 100 éve még nem volt gond, mert a levegőben a madzagok mehettek úgy, ahogy akartak. De hozzávetőleg 50 éve rájöttek arra, hogyha egy szigetelő lapnak (pl.: bakelit) bizonyos pontjain elérik, hogy vezesse az áramot (pl.: rézcsíkokkal), akkor a teljes áramkör sokkal kisebb helyen is elfér, és a rézcsík két végpontjánál lévő alkatrészek automatikusan össze lesznek kötve. Tehát csak az alkatrészeket kell legyártani hozzá, és már kész is van. Ez nagy találmánynak számított, de volt egy hibája: kevés hálózatot lehetett megvalósítani, ugyanis, ha valahol két rézcsík metszi egymást, akkor ott rövidzárlat keletkezik, vagyis csak síkba rajzolható gráfok jöhettek szóba, ami a gráfok halmazának csak egy igen kicsi részhalmaza. De szerencsére már az 50-es évek végén megjött a mentő ötlet: a lap mindkét oldalára húzzunk rézcsíkot. Így már egymás fölött is mehetnek a csíkok az egyik oldalon vízszintesen, a másikon függőlegesen, és nincs rövidzárlat. Tehát a két rétegen, meg lehet csinálni szinte bármilyen áramkört. Mi most az egyszerű pontsor huzalozásával foglalkozunk úgy, hogy az azonos számú pontokat kell egymással összekapcsolni.

Ez a régi, egyoldalú huzalozással nem menne, mert az 1-eseket és a 6-osokat ugyan még össze lehetne kötni, de akkor már a 4-essel vagy az 5-össel nem boldogulnánk. Viszont nekünk két rétegünk van, és így már meg lehet oldani a teljes huzalozást, lásd az abrát, ahol a folytonos függőleges és a szaggatott vízszintes vonalak a lap két rétegén haladó vezetékeket jelölik – a derékszögű ,,kanyarokat” atmenő furatokkal oldják meg.

6 szélességű huzalozás

Persze ekkor minden egyszerű pontsor huzalozását meg lehet oldani. Elsőre 6 sort használtunk fel, de ugyanezt meg lehet csinálni 3 sorban is:

3 szélességű huzalozás

Ekkor felmerül a kérdés, hogy vajon lehetne-e kevesebbel. A válasz nem, ugyanis a pontozott vonal bal oldalán is és jobb odalán is ott van az 1, a 2 és a 3, így ezeknek mindenképpen át kell menniük rajta, tehát 3 sornál kisebb szélességben nem lehet megoldani a problémát. Általánosabban, ha behúzzuk az összes ilyen vonalat, aztán megnézzük, hogy hány párt vág ketté, és ezeknek vesszük a maximumát, akkor az a sorok számára vonatkozó alsó becslésnek megfelelő. Persze ez csak akkor van így, ha a vezeték a lemez egyik oldalán csak vízszintesen, a másik oldalán csak függőlegesen mehet. Hogyha csak egy oldalon kanyaroghat, akkor egész más lenne a matematikai probléma. Most definiálunk egy új fogalmat, az *intervallum-gráf* ot. Tulajdonképpen a pontsort lehet intervallumok halmazának is tekinteni, így a gráf csúcsai az intervallumok lesznek, és akkor húzunk be élt, ha a két intervallum metszi egymást, tehát nem diszjunktak.

Intervallum-gráf

Máris egy korábbi problémával kerülünk szembe. Ha két intervallum diszjunkt, azaz a nekik megfelelő pontok nincsenek a gráfban éllel összekötve, akkor a pontok kaphatják ugyanazt a színt, vagyis a intervallumok elhelyezhetőek ugyanazon egyenesen, egymás után.

Az intervallum-gráf színezve.

Ebből látszik, hogy a szélesség meghatározását másképpen úgy tudjuk megfogalmazni, hogy hány szín kell az adott pontsor intervallum-gráfjának kiszínezéséhez, tehát, hogy mennyi az adott gráf kromatikus-száma. Korábban már láttuk, hogy ez általában nem könnyű feladat, viszont az intervallum-gráfok esetében nem nehéz. *Gallai Tibor* bizonyította be, hogy minden intervallum-gráf perfekt, azaz a gráfban és minden feszített részgráfjában a kromatikus szám megegyezik a klikkszámmal. (A G gráfnak egy H

részgráfját akkor nevezzük feszített részgráfnak, ha minden olyan G-beli él, ami H két pontja között halad, H-ban is elmarad.) Ezenkívül Gallai Tibor egy egyszerű algoritmust is adott arra, hogy hogyan lehet megtalálni ezt a számot, vagyis hogyan lehet az intervallum gráfokat gyorsan kiszínezni. Vegyük példának a már meglévő számsorunkat (1 2 3 2 4 3 5 1 6 4 5 6). Az algoritmushoz igazából nem kell más, mint józan ész. Helyezzük el az első sorba a bal szélsőt (jelen esetben az 1-est), és amikor véget ért az intervallum, akkor az első olyat, ami tőle jobbra kezdődik (jelen esetben a 6-ost). Ezt lehetne folytatni még egy ideig, de a mi példánkban több már nem fér el. Ezután ehhez hasonlóan következik a második, majd a harmadik sor, és így tovább, amíg csak szükséges. Ez az egyszerű algoritmus a lehető legkevesebb sort adja meg. Ezután be lehet húzni a szaggatott vonalakat, és biztosan lesz egy, ami az összes sorban elmetsz egy vízszintes összeköttetést. Ha nem lenne, akkor valahol fölöslegesen mentünk lejjebb egy sorral. Tehát ha valakinek k színnel sikerült kiszíneznie a gráf csúcsait, és van olyan szaggatott vonal, ami minden sorban egyet metsz, akkor van egy k csúcsú klikk, tehát $\chi \leq \omega$. Fordítva meg minden gráfra igaz, hogy $\chi \geq \omega$. Ezzel beláttuk, hogy $\chi = \omega$. Ezt hasonlóan be lehet látni minden feszített részgráfra, így bizonyítottuk a Gallai-tételt.

A szállodai recepciós

Az ő dolga, hogy regisztrálja, ki mikorra akar szobát foglalni. Ezt egy táblázatban vezeti. Ennek a táblázatnak annyi sora van, ahány szobája a szállodának, és minden napnak megfelel egy oszlop. Szobafoglalás esetén a vendég megmondja, mettől meddig szeretne szobát. Az első vendégnél a recepciós az első sorban kipipálja az összes napot, ami a vendég által kért intervallumba esik. Aztán telefonál a következő vendég, a recepciós megint minden naphoz tartozó üres oszlopban keres egy szabad helyet, és odatesz egy pipát. A rendelést akkor fogadja el, ha az aktuális időpontoknak megfelelő oszlopok mindegyikében talál még legalább egy szabad négyzetet, mert az azt jelenti, hogy van még szabad hely. Persze így előfordulhat, hogy az időintervallum első napján a második sorba tesz pipát, a másodikon a hetedikbe, a harmadikon a nyolcadikba stb. Ekkor a vendégnek minden nap költöznie kéne? A válasz nem, és ez következik a Gallai-tételből, hiszen itt is intervallumokat kell elrendezni a lehető legkisebb szélességben. Ha a recepciós csak arra figyel, hogy egy függőleges oszlopban legfeljebb a szobák számával azonos mennyiségű pipát helyezzen el, azaz arra, hogy az intervallum gráfunk klikk-száma ne legyen nagyobb a szobák számánál, akkor a gráf klikk-száma automatikusan kisebbegyenlő lesz, mint a kromatikus száma, így az intervallumokat el lehet helyezni a megfelelő szélességben. Persze ez így egyszerűnek tűnhet, mert már több évszázada így dolgoznak a fogadósok, de ha csak annyival egészítjük ki a problémát, hogy néhány vendég meghatározott tulajdonságú (például a tengerparta néző) szobát szeretne, akkor a probléma szinte teljesen megoldhatatlanná válik sok vendég esetén.

A krimi

A Gallai-tétellel kapcsolatban felmerül a kérdés: *Minden gráf intervallum-gráf?* A válasz nem, ugyanis van ellenpélda, például négy hosszú kör. Az 1-esnek kell hogy legyen közös szakasza a 2-essel és a 4-essel is, így ezeknek egy lehetséges elhelyezése:

Nem minden gráf intervallum-gráf.

Ha a 3-as a 2-es végétől balra kezdődik, a 4-es végétől jobbra végződik, akkor az 1-essel mindenképpen van közös pontja, tehát nem lehet megcsinálni. Így általánosságban elmondhatjuk, hogy az intervallum-gráfokban nincsenek átló nélküli legalább 4 hosszú körök. Ezt *Hajós György* mondta ki először.

Claude Berge: Qui a tué le duc de Densmore? (angolul: Who killed the Duke of Densmore?) című könyvében a perfekt gráfok elméletének segítségével deríti fel a gyilkost a detektív. Ennek egy egyszerűsített változatát egyik tanítványa (Martin Ch. Golumbic: The Berge Mistery Story) írta le. Az egyszerűsített változatban egy könyvtárból 6 professzor közül valaki ellopott egy kéziratot. Tudjuk, hogy mindenki csak egyszer volt bent, és mindenki mindenkit lát a bent lévők közül. A nyomozó végigkérdezte a professzorokat, hogy ki kit látott, majd csinált egy *ki látott kit* irányított gráfot.

A *ki látott kit* irányított gráf.

Ebből kiderült, hogy ez nem lehet intervallum gráf, mert van benne 4 hosszúságú kör átló nélkül (például A, B, I, D), tehát legalább egy valaki hazudott. Könnyű belátni, hogy egyetlen él van, aminek az elhagyásával már intervallum-gráfot kapunk, ez pedig a (D, A) él. Tehát, ha tudjuk, hogy csak az hazudott, aki a kéziratot ellopta, akkor biztos, hogy D volt a bűnös.

Gráfokkal kapcsolatos további érdekes tudnivalók találhatók az alábbi írásokban:

Andrásfai Béla: Ismerkedés a gráfelmélettel, Tankönyvkiadó, Budapest
Katona Gyula Y. - Recski András - Szabó Csaba: A számítástudomány alapjai, Typotex, Budapest, 2002
Lovász László - Pelikan József - Vesztergombi Katalin: Diszkrét matematika, Typotex, Budapest, 2006
http://home.fazekas.hu/~lsuranyi/Grafok/bevezeto.htm