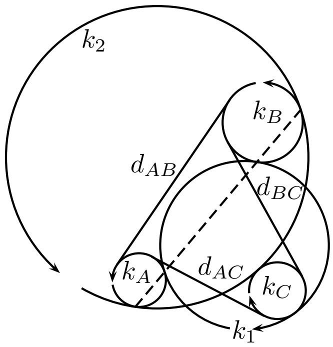
Hraskó András

Relativitáselmélet a geometriában



A Kömal Ankéton

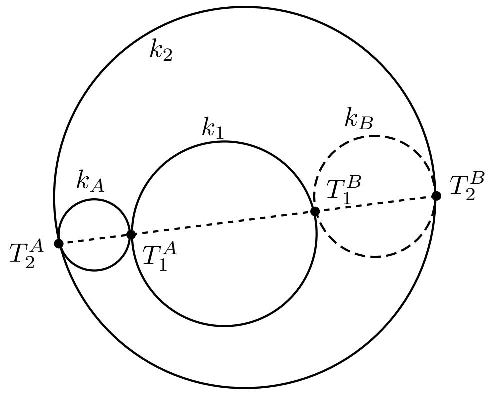
2007.november 11-én

tartott előadás kibővített változata

1. Egy feladat

Kezdjük egy példával!

1. feladat Adottak a k_1, k_2 körök, k_1 a k_2 belsejében.

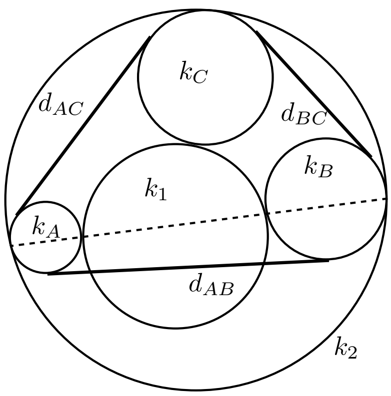


1.a) ábra

a) Ha az A kör érinti k_1-t és k_2-t is, előbbit a T_1^A, utóbbit a T_2^A pontban, akkor $T_1^A T_2^A$ egyenesnek a k_1, k_2 körökkel való T_1^B, T_2^B metszéspontjaihoz található olyan B kör, amely éppen T_1^B-ben érinti k_1-t és T_2^B-ben k_2-t.

b) Ha C tetszőleges olyan kör, amely érinti k_1-et és k_2-t is, akkor az A, B, C körök d_{AB}, d_{BC}, d_{CA} közös külső érintőire

$$d_{AB}^2 = d_{BC}^2 + d_{CA}^2. \tag{1}$$



1.b) ábra

A feladat a) részét az előadáson nem tárgyaljuk, gondolkodnivalónak marad a hallgatóságnak, akár Kömal feladatnak is ki lehetne tűzni.

Megjegyezzük, hogy a feladat kikötésein lehet lazítani, de vigyázni kell. A címlapon látható ábrán a k_1, k_2 körök nincsenek egymás belsejében, a (1) formula mégis teljesül, de két körpárnál a *belső* érintőt kell venni a külső helyett, hogy igaz maradjon.

Ha megértjük a Minkowski tér fogalmát, akkor megértjük a lehetséges változatokat és látni fogjuk, hogy az 1. feladat lényegében a Pitagorasz tételt fogalmazza meg, egy körökből álló Minkowski(2+1) térben fekvő derékszögű háromszögre. Mi az a Minkowski tér? Hogyan lesznek a körökből egy tér pontjai? A következő két fejezetben ezekre válaszolunk.

2. A speciális relativitáselmélet alapgondolata

Galilei szerint, ha egy egyenletesen haladó, a nem hullámzó vízen úszó hajón utazunk, de nem a szeles fedélzeten, hanem a hajó egy zárt kabinjában, akkor a fizikai jelenségeket ugyanolyannak fogjuk látni, mintha álló hajóban lennénk. Röpködhetnek szúnyogok, önthetünk magasból vizet pohárba, kísérletezhetünk távolugrással, nem lesz különbség. A fizikai törvények az egymáshoz képest egyenletes sebességgel mozgó rendszerekben egyformák. Ez Galilei relativitási elve.

Maxwell a XIX század második felében felállította az elektomos és a mágneses tér viselkedését leíró törvényeket, a Maxwell-egyenleteket. Képleteiben szerepel egy c konstans, a fény sebessége. Einstein szerint Galilei relativitási elve igaz marad, hogy ha a fizikai törvények közé vesszük – a Galilei korában még nem ismert – Maxwell egyenleteket is. Ez Einstein relativitási elve. Az Einstein-féle relativitási elv szerint a fény sebességének minden egyenletesen mozgó reális rendszerben ugyanannyinak kell lennie, függetlenül a mozgó rendszer sebességétől. Ahhoz, hogy ez lehetségessé váljon, Einsteinnek át kellett gondolnia a mozgást leíró legalapvetőbb összefüggéseket, a pontmechanika törvényeit is. Ezt tartalmazza a speciális relativitáselmélet.

Adott inerciarendszerhez rögzíthetünk koordinátarendszert. A mechanikai ponthoz négy alapvető adat rendelhető, térbeli helyzetének három koordinátája és az idő. Ebben az értelemben a mechanikai pont tere négydimenziós. A rendszer leírása technikailag egyszerűbbé válik, ha negyedik koordinátának a t idő helyett annak konstansszorosát, a hossz jellegű $ct = x_4$ mennyiséget vesszük.

Térjünk vissza szokásos háromdimenziós geometriai terünkhöz, tekintsünk benne két pontot, P-t és Q-t! A $\overrightarrow{PQ}$ vektor $(\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3)$ koordinátái függenek a konkrét koordinátarendszer választásától, de – ha előre rögzítjük a tengelyeken felvett egységet, akkor – a koordináták

$$(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2 \qquad (2)$$

négyzetösszege a konkrét koordinátarendszertől függetlenül mindig ugyanakkora. Nem csoda, hiszen a fenti képlet a két pont távolságának négyzetét adja meg.

A nézőpontot megfordíthatjuk. Ha rögzítjük koordinátarendszerünket, akkor tekinthetjük benne mindazokat a transzformációkat, amelyek a (2) forma értékét megtartják. Ezek a leképezések a távolságtartó transzformációk, azaz az egybevágóságok.

A mechanikai pont elmozdulásának vizsgálatakor, az elmozduláshoz szükséges idő mértékétől sem tekinthetünk el, a $(\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \Delta x_4)$ vektort kell vizsgálnunk. Az egyes koordináták függenek a választott inerciarendszertől, illetve az ott felvett koordinátarendszertől, de a speciális relativitáselmélet szerint a

$$(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2 - (\Delta x_4)^2 \tag{3}$$

kifejezés értéke invariáns, azaz minden inerciarendszerben ugyanakkora. Ennek levezetésére nem térünk ki, az érdeklődőknek ajánljuk Hraskó Péter „Relativitáselmélet" című könyvét, amely a Typotex kiadó gondozásában jelent meg.

A nézőponon most is fordíthatunk. Rögzített koordinátarendszerben tekinthetjük mindazokat a transzformációkat, amelyek a (2) forma értékét megtartják. Ezek a leképezések a relativisztikus tér szimmetriái, a *Lorentz transzformációk*.

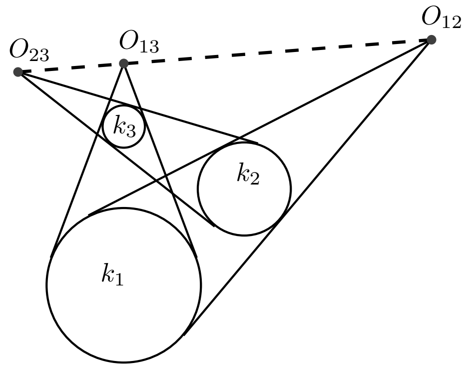
A négydimenziós teret, amelyben a (2) formulával számítjuk két pont „távolságnégyzetét" *Minkowski tér*nek vagy Minkowski$(3+1)$ térnek nevezzük. A „$(3+1)$" arra utal, hogy három koordinátairányban összeadjuk, egyben kivonjuk a koordinátakülönbség négyzetét, amikor az invariáns mennyiséget számoljuk. Geometriai vizsgálatainkban a Minkowski$(2+1)$ tér jön elő, és a Lorentz transzformációk megértéséhez elővesszük majd a Minkowski$(2+1)$ teret is.

Megjegyezzük, hogy a (2) képletbe foglalt „távolságnégyzet" szokatlan tulajdonságú. Pl. egymástól különböző pontok távolságnégyzete is lehet 0, mi több, a távolságnégyzet negatív is lehet. Két pont távolságnégyzete akkor zérus, ha a két mechanikai pont összeköthető fényjellel (az egyikből indítható fény, ami eljut a másikhoz), míg abban az esetben negatív a távolságnégyzet, ha fénysebességnél lassabban haladó jel is képes átjutni egyik pontból a másikba.

3. Körök és a tér

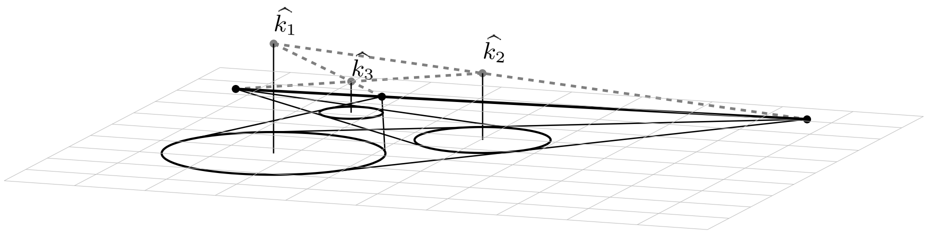
A körök térben való reprezentálásának bemutatásához alkalmasnak tetszik az alábbi klasszikus feladat.

2. feladat Adott a síkon három kör, k_1, k_2 és k_3. Mutassuk meg, hogy páronkénti külső hasonlósági pontjaik egy egyenesen vannak.



2.a) ábra

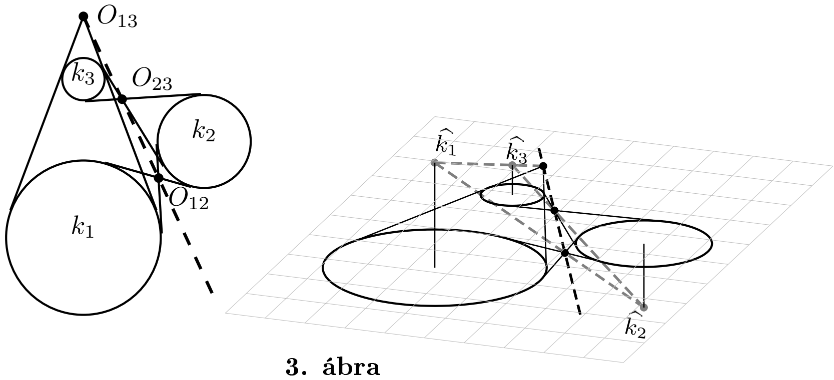
A feladat megoldásához lépjünk ki a térbe! Minden egyes kör középpontja fölött, az alapsíkra merőlegesen, attól akkora távolságban, mint a kör sugara vegyünk fel egy pontot. A k_i körhöz ilymódon rendelt pontot jelölje $\widehat{k_i}$.



2.b) ábra

Amikor az O_{12} pontból a k_2 kört a k_1 körbe nagyítjuk, akkor egyúttal átvisszük a $\widehat{k_2}$ pontot a $\widehat{k_1}$ pontba. A $\widehat{k_2}$, $\widehat{k_1}$ pontok egyenese tehát átmegy O_{12}-n és hasonlóan igazolható, hogy O_{23} illeszkedik a $\widehat{k_2}\widehat{k_3}$ egyenesre, O_{13} pedig $\widehat{k_1}\widehat{k_3}$-ra. Az említett három térbeli egyenes egy síkban van, nevezetesen a $\widehat{k_1}\widehat{k_2}\widehat{k_3}$ síkban, tehát O_{12}, O_{23} és O_{13} is benne van ebben a síkban. Ugyanakkor ez a három pont benne van a k_i körök síkjában, tehát a két sík metszésvonalán, azaz egy egyenesen helyezkednek el. Ezzel a feladatot megoldottuk!

Játsszunk el egy kicsit az ábrával! Az egyik, mondjuk a k_2 körhöz úgy rendeljünk térbeli pontot, hogy azt középpontjában az alapsíkra merőlegesen ne *fölfelé*, hanem *lefelé* vegyük fel!

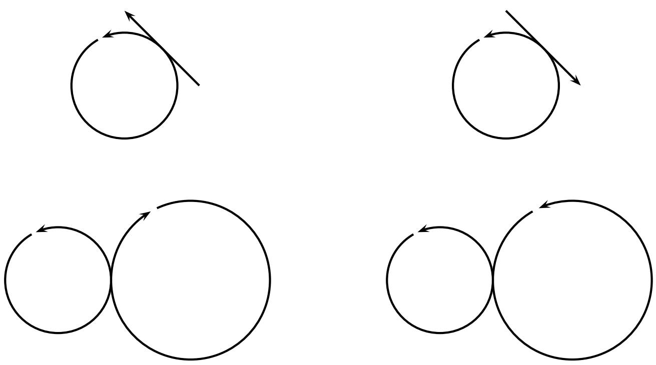


3. ábra

Láthatjuk, hogy a $\widehat{k}_2\widehat{k}_3$, $\widehat{k}_1\widehat{k}_2$ egyenesek így a k_2, k_3 illetve a k_1, k_2 körök közös ***belső*** hasonlósági pontját metszik ki az alapsíkból, a $\widehat{k}_1\widehat{k}_3$ egyenes pedig továbbra is a külső hasonlósági pontban metszi azt. Ezek szerint a 2. feladatot variálhatjuk: ha a három kör közül két körpárnál a közös belső hasonlósági pontot vesszük, egynél pedig a külsőt, akkor is egy egyenesre illeszkedik a három hasonlósági pont.

4. Ciklusok és igyenesek

A téma tárgyalása egységesebbé válik, ha körök és egyenesek helyett irányított körökről és irányított egyenesekről beszélünk. Ha adott egy egyenes vagy kör, azon kétféle irányítást is megadhatunk. A továbbiakban az irányított köröket *ciklus*oknak, az irányított egyeneseket *igyenes*eknek nevezzük. Egy ciklus és egy igyenes akkor érinti egymás, ha a nekik megfelelő kör és egyenes érinti egymást és közös pontjukban a két alakzat irányítása megegyezik. Hasonlóan értelmezhetjük két ciklus érintkezését. Az alábbi bal oldalon ábrákon az irányított alakzatok érintik egymást, a jobb oldali ábrákon azonban nem.



4. a) ábra Érintkező és nem érintkező ciklusok

Két igyenesről akkor mondjuk, hogy érintik egymást, ha egyeneseik párhuzamosak és irányításuk megegyezik. A bal oldali ábrán most is érintkezők az igyenesek, a jobb oldalin viszont nem.

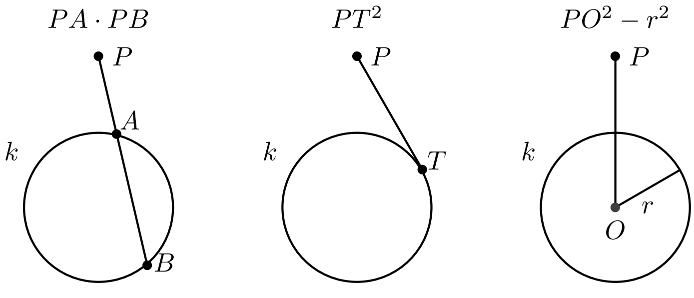
4. b) ábra Érintkező és nem érintkező igyenesek

A ciklusok kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésbe hozhatók a tér pontjaival. Az 1. feladat megoldásának megfelelően rendeljük térbeli pontot minden ciklushoz, csak arra ügyeljünk, hogy a hozzárendelt pontból az alapsík felé nézve a vizsgált ciklus irányítása pozitív legyen. Az alapsík maga is része ennek a térnek, az ő pontjai a 0 sugarú köröknek, elfajult ciklusoknak, tehát az igazi pontoknak felelnek meg. A pontoknak nincs irányítása.

Az igyeneseknek nem feleltetünk meg térbeli pontot, de a ciklusok segítségével reprezentálhatjuk őket a térben. Ha adott egy i igyenes, akkor tekinthetjük az i-t érintő ciklusokot. Nem nehéz meggondolni, hogy az ezekhez a ciklusokhoz rendelt térbeli pontok halmaza az alapsíkkal $45°$-os szöget bezáró sík, mégpedig az, amelyik i körüli – i irányába nézve – $+45°$-os forgatással kapható az alapsíkból.

Két ciklus hasonlósági pontjának azt a pontot nevezzük, amelyből az egyik ciklusnak megfelelő kör a másik ciklusnak megfelelő körbe nagyítható (kicsinyíthető) úgy, hogy a nagyításnál a az egyik ciklusnak megfeleltetett térbeli pont a másik ciklusnak megfeleltetett térbeli pontba menjen át. Így bármely két különböző ciklusnak egyértelmű a hasonlósági pontja, az egyenlő nagyságú, azonosan irányított ciklusok esetében azonban nincs ilyen hasonlóság, helyette eltolással, – mintegy végtelen távoli centrumból való nagyítással – vihetők egymásba a ciklusok.

Két pont távolságának fogalmát szeretnénk kiterjeszteni ciklusokra. Pont és körhöz tudunk rendelni számot. A pont körre vonatkozó hatványát háromféleképpen is értelmezhetjük és megmutatható, hogy a három értelmezés ugyanazt az értéket adja.



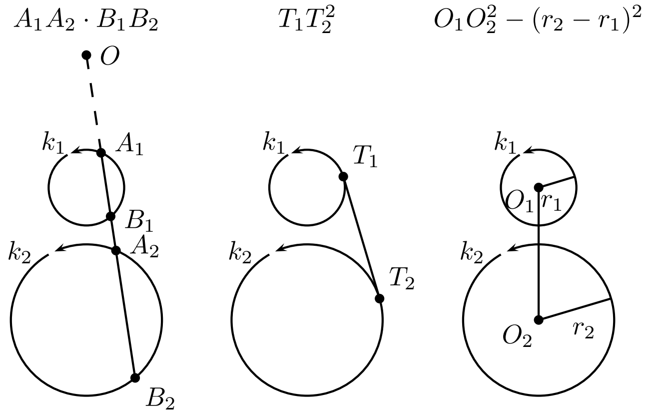
5. ábra Külső pont körre vonatkozó hatványa

Ezt az értéket a P pont k-ra vonatkozó hatványának nevezzük. Ezt most Pk^2-tel jelöljük. Ha k ponttá fajul, akkor a körre vonatkozó hatvány a két pont távolságnégyzetévé válik.

A fenti ábrákon P a k kör külső pontja.Ha P a k-n belül van, akkor a középső ábra nem valósítható meg, érintő nem húzható P-ből k-hoz. A bal oldali ábrának megfelelő rajzon ilyenkor a PA, PB irányított szakaszok ellenkező irányúak, szorzatukat, a pont körre vonatkozó hatványát, ilyenkor negatívnak tekintjük. Megmutatható, hogy ez az előjeles szorzat ilyenkor is egyenlő az $OP^2 - r^2$ kifejezés értékével, ami most szintén negatív.

Végül megjegyezzük, hogy a pont körre vonatkozó hatványa akkor és csakis akkor nulla, ha a pont illeszkedik a körre.

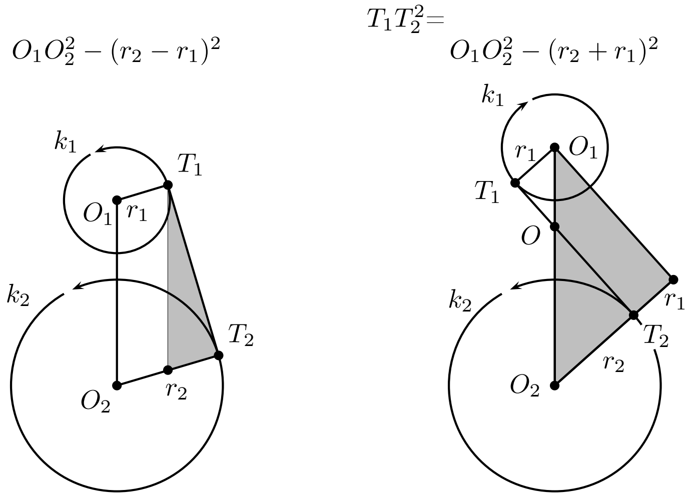
Két ciklushoz is rendelhetünk számot. Ezt a 6. a) ábrán háromféleképpen is értelmezzük, de nem igazoljuk, hogy a definíciók egyenértékűek. A 6. a) bal oldali ábrán O a két ciklus hasonlósági pontja.



6. a) ábra Körök Steiner hatványa

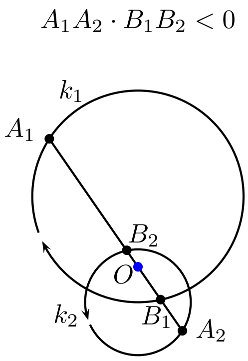
Ezt az értéket a k_1 ciklus k_2 ciklusra vonatkozó Steiner-hatványának nevezzük és $k_1k_2^2$-tel jelöljük. A Steiner hatvány értéke pontosan akkor nulla, ha a kétciklus érinti egymást. Ha k_1 vagy k_2 ponttá fajul, akkor a Steiner hatvány a körre vonatkozó hatvánnyá változik.

Érdemes átgondolni a Steiner-hatvány második és harmadik kiszámolási módját azonosan illetve fordítottan irányított ciklusok esetén. Derékszögű háromszögek segítenek, de egyik befogójuk kiszámításakor a két sugárral másképp kell számolni, mint ahogy az a 6. b) ábrán is leolvasható.



6. b) ábra Azonosan és ellenkezően irányított ciklusok Steiner hatványa

Az
$$k_1k_2^2 = O_1O_2^2 - (r_2 - r_1)^2 \tag{4}$$
képlet univerzális a Steiner hatvány kiszámolására, de használatakor a ciklusok irányításának megfelelően a sugarakkal előjelesen kell számolni. Előfordulhat – mint a 6. c) ábrán is –, hogy két ciklusnak nincs közös érintője, így a 6. b) ábrát fel sem tudjuk rajzolni. A 6. a) ábra bal oldalán látható értelmezést és a (4) képletet azonban ilyenkor is használhatjuk és ha a szakaszokkal előjelesen számolunk, illetve a sugarakat előjelesen értelmezzük, akkor megmutatható (számoljuk a centrálison!), hogy a két definíció egyenértékű.



6. c) ábra Steiner hatvány, ha nincs érintő

Összefoglalóan kimondhatjuk: két ciklus Steiner hatványát kapjuk, ha középpontjaik távolságnégyzetéből kivonjuk előjeles sugaraik különbségének négyzetét. Ez azt jelenti, hogy a ciklusok tere a Steiner hatvánnyal egy Minkowski(2+1) tér.

5. Hiperbolák és Lorentz transzformációk

A Lorentz transzformációk egy osztályának, a Lorentz-tükrözéseknek megértéséhez hozzásegíthet az alábbi feladat megoldása.

3. feladat Mutassuk meg, hogy

a) az

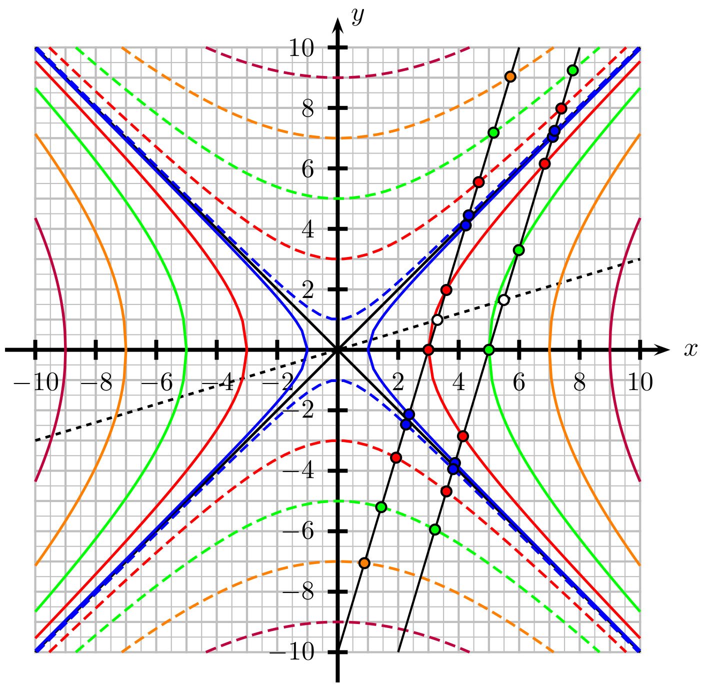
$$x^2 - y^2 = p \tag{5}$$

egyenlet a p paraméter minden nemnulla értéke esetén hiperbola egyenlete;

b) a (5) hiperbolák aszimptotái azonosak és az aszimptotapár egyenlete a $p = 0$ esethez tartozó egyenlet;

c) ha egy – az aszimptoták egyikével sem párhuzamos – egyenest elmetszünk a (5) egyenletű hiperbolák bármelyikével, akkor a kimetszett húr felezőpontja a hiperbolától függetlenül mindig ugyanaz a pont lesz;

d) ha egymással párhuzamos egyenesek mindegyikére képezzük a c) szerint p-től független felezőpontot, akkor az így kapott pontok egy egyenest alkotnak, amely átmegy a hiperbolák centrumán (az origón).



7. ábra Koncentrikus körök a Minkowki(1+1) síkon

Megoldás

a)-b) Vegyük észre, hogy $(x+y)\cdot(x-y) = x^2 - y^2$. Térjünk át a $\xi = x+y$, $\eta = x - y$ változók használatára, ami a koordinátarendszer elforgatásának (és nyújtásának) felel meg. Egyenletünk most $\xi\eta = p$, amely $p \neq 0$ esetén olyan hiperbola egyenlete, melynek aszimptotája a két tengely.

c)-d) A koordinátatengelyekkel párhuzamos egyenesekkel kapcsolatban a c), d) állítások nyilvánvalóak. Most tekintsük a nem ilyen helyzetű egyeneseket, ezek egyenlete

$$y = mx + b, \qquad m \neq 0 \tag{6}$$

alakú, amiből $x = \frac{y-b}{m}$. Az egyenes és a hiperbola metszéspontjait nem számoljuk ki, csak fölírjuk a metszéspontok x ill., y koordinátáira vonatkozó egyenleteket és a megfelelő Vieta formula segítségével a gyökök összegének felét, tehát a felezőpont koordinátáit határozzuk meg.

$$\begin{array}{ll}
x^2 - (mx+b)^2 = p, & \left(\frac{y-b}{m}\right)^2 - y^2 = p, \\
(1-m^2)x^2 - 2mbx + (b^2 - p) = 0, & (1-m^2)y^2 - 2by + (b^2 - m^2 p) = 0, \\
\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{mb}{1-m^2}. & \frac{y_1+y_2}{2} = \frac{b}{1-m^2}.
\end{array}$$

Látható, hogy a felezőpont b és p értékétől függetlenül mindig illeszkedik az

$$x = my, \qquad m \neq 0 \tag{7}$$

egyenletű egyenesre. Az aszimptotákkal párhuzamos egyeneseket azért kellett kizárnunk, mert az $m = \pm 1$ meredekséghez tartoznak, amikor a metszépontokra lineáris egyenlet adódik, tehát csak egy-egy metszéspont lesz. Ezzel a példát megoldottuk.

A 3. feladat a Minkowski(1+1) síkkal hozható kapcsolatba. Ebben a térben ugyanis a (5) egyenlet azt fejezi ki, hogy az $(x; y)$ pont origótól mért Minkowski távolságnégyzete konstans p. Tehát a (5) egyenletek origó középpontú Minkowski körök egyenletei.

A feladat eredménye lehetőséget ad a Minkowski(1+1) sík legalapvetőbb (Minkowski-)távolságtartó leképezéseinek megértéséhez. Rögzítsünk egy (az aszimptotákétól különböző) egyenesirányt! Bármely pont egy és csakis egy ilyen irányú egyenesre és egy és csakis egy p értékhez tartozó (5) egyenletű görbére (hiperbolára vagy aszimptotapárra) illeszkedik. Transzformáljuk ezt a pontot az ugyanennek az egyenesnek és ugyanennek a hiperbolának a másik metszéspontjába! Így biztosan nem változik meg *a pontnak az O origótól* vett Minkowski távolságnégyzete. Az 7. fejezetbe (Appendix) tettük annak bizonyítását, hogy az itt leírt transzformáció megtartja *bármelyik két pont* Minkowski távolságnégyzetét.

Az előbb értelmezett leképezés sokban hasonlít a tengelyes tükrözéshez. Valóban, a 3. feladat d) pontjának utolsó állítás szerint lesz egy olyan (origón átmenő) egyenes, amelynek pontjai fixpontok. Erre az egyenesre azonban nem merőlegesen tükrözünk, hanem a korábban választott egyenes irányában. Nevezzük leképezésünket *Lorentz-tükrözés*nek!

A Lorentz-tükrözések lehetőséget adnak az alábbi hasznos tétel igazolására.

Tétel
Ha a P, Q pontok Minkowsi távolságnégyzete megegyezik a P', Q' pontok Minkowski távolságnégyzetével, és ez az érték nem zérus, akkor van olyan Lorentz transzformáció, amely P-t P'-be, Q-t pedig Q'-be viszi.

Bizonyítás
Alkalmazzunk egy eltolást, amely P-t P'-be viszi és jelölje Q képét az eltolásnál Q^*. Az eltolás nyilvánvalóan Lorentz transzformáció. Tegyük koordinátarendszerünk origóját P'-be és képzeljük el a 3. feladatban leírt szituációt! A Minkowski távolságnégyzetek egyenlősége miatt Q^* és Q' ugyanazon a hiperbolán vannak. Tekintsük azt a Lorentz-tükrözést, amelyet a Q^*Q' egyenessel párhuzamos egyenesek határoznak meg! Ez a transzformáció Q^*-ot Q'-be képezi míg P'-t fixen hagyja, tehát az eltolás és a tükrözés kompozíciója elvégzi a kívánt feladatot.

A Minkowski$(2+1)$ térben is megtalálhatjuk a Lorentz-tükrözéseket. A (5) egyenlet analógiájára a Minkowski gömbök egyenlete

$$x^2 + y^2 - z^2 = p, \tag{8}$$

amelyek euklideszi szemmel forgáshiperboloidoknak, ill. a $p = 0$ esetben kúpnak „látszanak”. Nem nehéz igazolni, hogy rögzített egyenes esetén nem függ p-től annak a húrnak a felezőpontja, amelyet az egyenesből a (8) egyenletű Minkowski gömb kimetsz. Az is igaz, hogy párhuzamos egyenesekre az így kapott felezőpontok mindig egy origón átmenő síkot alkotnak, csak a $p = 0$ értékhez (0 sugarú gömb) tartozó euklideszi kúp alkotóit kell kizárni, az ezekkel párhuzamos egyenesek ugyanis egy-egy pontban metszik csak a hiperboloidokat. A Lorentz-tükrözések fixpontjai most síkot alkotnak (síkra tükrözünk). A fenti tétel is érvényben marad a térben.

3′ feladat Helyettesítsük a 3. feladatban a (5) egyenletet a

$$x^2 + y^2 = p \tag{9}$$

egyenlettel és cseréljük a „hiperbola” szót mindenütt „kör”-re! Igazoljuk, hogy a feladat állításai így is érvényesek! Mi lesz a fejezetben értelmezett transzformáció, ha az így módosított példa alapján értelmezzük?

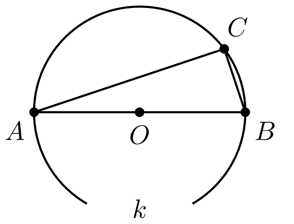
6. A Pitagorasz tétel Lorentz transzformációja

Pitagorasz tételét Thalész tételének segítségével így mondhatjuk ki:

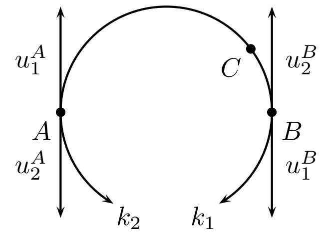
Tétel
Ha a k körben az A, B pontok egy átmérő végpontjai, akkor a k kör tetszőleges C pontjára

$$AC^2 + BC^2 = AB^2. \tag{10}$$

Szeretnénk a tétel érvényességi körét kiterjeszteni. Ehhez meg kell értenünk a feltételt. A 8. a) és b) ábrán a derékszögű háromszög, azaz a Thalész konfiguráció látható.

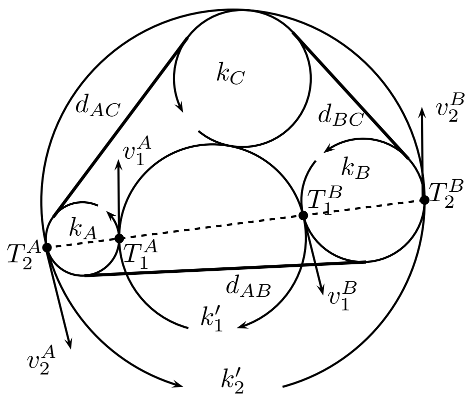


8. a) ábra Thalész konfiguráció



8. b) ábra Thalész konf. ciklusokkal

Az A, B, C pontok helyébe gondoljunk ciklusokat! Ezek az eredeti konfigurációban pontkörök. Mint ciklusok érintik a k körön megadható mindkét ciklust, k_1-et és k_2-t is. Ha Lorentz transzformációt hajtunk végre a ciklusok terén, akkor k_1 és k_2 különböző körhöz tartozó ciklusokká válhatnak, miközben A, B és C is valóságos, nem nulla sugarú ciklussá transzformálódhat. A pontpárok távolságnégyzete nem más, mint a megfelelő pontkörök Steiner hatványa, ezeket a Lorentz transzformáció megőrzi. Tehát a k körből és a k körre illeszkedő A, B, C pontokból Lorentz transzformációval a k_1', k_2' ciklusokat és az azokat érintő k_A, k_B, k_C ciklusokat kapjuk. A k ellenkező irányítású ciklusainak egymásra vonatkozó Steiner hatványa negatív, így a k_1', k_2' ciklusoknál is ugyanez lesz a helyzet.



9. ábra Thalész konfiguráció Lorentz transzformációja

Az AB szakasz a k kör *átmérője* volt. Ebből milyen geometriai kapcsolat következik a Lorentz transzformáció után kapott k_A, k_B, k_1', k_2' ciklusokra? A 8. b) ábrán berajzoltuk a k_1, k_2 ciklusok A, B pontokban állított u_1^A, u_1^B, u_2^A, u_2^B érintő igyeneseit. Az AB szakasz pontosan akkor átmérő, ha az u_1^A igyenes párhuzamos u_2^B-vel, és u_1^B is u_2^A-val.

Az u_1^A igyenest érintő ciklusokhoz rendelt pontok egy olyan síkot alkotnak, amely az alapsíkkal 45°-os szöget zár be. Megmutatható, hogy ilyen sík képe a

Lorentz transzformációnál ugyanilyen tulajdonságú sík[1]. Tehát az u_1^A igyenest érintő ciklusok képei valamely v_1^A igyenest fognak érinteni. Ebben az értelemben az u_1^B, u_2^A, u_2^B igyenesek képei a v_1^B, v_2^A, v_2^B igyenesek. Két igyenes pontosan akkor páhuzamos, ha nincsen olyan ciklus, amely mind a kettőt érinti. Emiatt párhuzamos igyenesek képei is párhuzamosak lesznek. Tehát most v_1^A párhuzamos v_2^B-vel és v_2^A v_1^B-vel.

A k_A, k_1' érintkező ciklusok hasonlósági középpontja a T_1^A érintési pontjuk. A T_1^A középpontú k_A-t k_1'-be képező nagyításnál a k_A-t érintő igyenes a k_1'-at érintő igyenesbe képződik és önmagával párhuzamos lesz. Mivel minden ciklusnak bármely igyenessel párhuzamosan pontosan egy érintő igyenese van, így szükségképpen a fenti nagyításnál v_2^A képe v_1^B és így a v_2^A, v_1^A, v_1^B igyenesek érintési pontjai kollineárisak. Hasonlóan igazolható, hogy az v_1^A, v_1^B, v_2^B igyenesek érintési pontjai is kollineárisak, azaz a négy kör négy érintési pontja egy egyenesen van.

A k körbe írt ABC derékszügű háromszög ($ACB\angle = 90°$) Lorentz transzformáltja tehát a

- (P1) k_1', k_2' ciklusokból
- (P2) és az azokat érintő k_A, k_B, k_C ciklusokból áll,
- (P3) ahol k_A-nak és k_B-nek a k_1', k_2' ciklusokkal való összesen négy érintési pontja egy egyenesen van,
- (P4) és a k_1', k_2' ciklusoknak nincs közös érintő igyenese.

Megfordítva, a (P1)-(P4) tulajdonságokkal rendelkező konfiguráció megkapható egy közönséges derékszögű háromszögből Lorentz transzformációval. Valóban, a (P4) tulajdonság azzal egyenértékű, hogy k_1', k_2' ciklusok Steiner hatványa negatív, tehát $-(2r)^2$ alakban írható. A k_1', k_2' ciklusoknak megfelelő pontpár a Minkowski térben átvihető a $Q_1(0,0,-r)$, $Q_2(0,0,r)$ pontpárba, hiszen azok Minkowski távolságnégyzete is $-(2r)^2$. Ez a pontpár az origó középpontú r sugarú kör két ciklusának felel meg. Az egybeeső ciklusok miatt k_A, k_B, k_C képe csak pont lehet, és (P3)-ból adódik, hogy a k_A, k_B pár képe egy AB átmérő.

Ezzel egyúttal megmutattuk, hogy a $P(1) - P(4)$ tulajdonsággal rendelkező konfigurációban a k_A, k_B, k_C ciklusok érintőinek hosszára fennáll a (1) összefüggés. Az 1. feladatot megoldottuk.

A ciklusok világában a Pitagorasz tételnek van a szokásos derékszögű háromszögre nem visszavezethető változata is. Cseréljük le a (P4) tulajdonságot a következőre:

- (P4$^+$) ... és a k_1', k_2' ciklusok nem érintkezők, de *van* közös érintő igyenesük.

[1] Az alapsíkkal 45°-os szöget bezáró síkok pontosan azok a síkok, amelyek a Minkowski térben 0 sugarú gömböket érintenek. A 0 sugarú gömb 0 sugarú gömbbe, sík síkba, érintkező alakzatok érintkező alakzatokba képződnek Lorentz transzformációnál.

Ez azt jelenti, hogy a k_1', k_2' ciklusok Steiner hatványa pozitív. E ciklusok most Lorentz transzformációval átvihetők két pontkörbe, K_1-be és K_2-be. (P3)-ból most az következik, hogy e Lorentz transzformációnál a k_A, k_B ciklusok képei egymás tükörképei a K_1K_2 egyenesre, míg k_C tetszőleges ciklus K_1-en és K_2-n át.

Könnyen kiszámolható, hogy ebben a szituációban – és így a (P1)-(P3), (P4$^+$) tulajdonságokkal leírtban is – teljesül a (1) összefüggés, de most a közös érintő hossznégyezetének helyébe a Steinar hatvány értékét kell írni.

7. Appendix: A Lorentz-tükrözés megtartja a Minkowski távolságot

Igazoljuk, hogy a 5. fejezetben leírt Lorentz transzformáció megtartja bármelyik két pont Minkowski távolságnégyzetét.

Az $\vec{u}(u_1;u_2)$, $\vec{v}(v_1;v_2)$ vektorok Euklideszi skaláris szorzata a

$$< \vec{u}|\vec{v} >_E = u_1v_1 + u_2v_2 \tag{11}$$

szorzatösszeg, és ezzel a $\vec{u}$ vektor hossznégyzete is értelmezhető:

$$< \vec{u}|\vec{u} >_E = u_1u_1 + u_2u_2. \tag{12}$$

A fenti $\vec{u}$, $\vec{v}$ vektorok Minkowski skaláris szorzatán értsük a

$$< \vec{u}|\vec{v} >_M = u_1v_1 - u_2v_2 \tag{13}$$

kifejezés értékét, hogy ebből visszakapjuk az $\vec{u}$ vektor Minkowski hossznégyzetére már korábban felállított

$$< \vec{u}|\vec{u} >_M = u_1u_1 - u_2u_2 \tag{14}$$

formulát. Könnyen igazolható, hogy a Minkowski skaláris szorzás mindkét komponensében lineáris, azaz bármely α szám és tetszőleges $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ vektorok esetén

$$< \alpha\vec{u}|\vec{v} >_M = < \vec{u}|\alpha\vec{v} >_M = \alpha < \vec{u}|\vec{v} >_M$$

és

$$< \vec{u}|\vec{v} + \vec{w} >_M = < \vec{u}|\vec{v} >_M + < \vec{u}|\vec{w} >_M,$$
$$< \vec{v} + \vec{w}|\vec{u} >_M = < \vec{v}|\vec{u} >_M + < \vec{w}|\vec{u} >_M .$$

Ezekből következik, hogy

$$< \alpha\vec{u}+\beta\vec{v}|\alpha\vec{u}+\beta\vec{v} >_M = \alpha^2 < \vec{u}|\vec{v} >_M + \alpha\beta < \vec{u}|\vec{v} >_M + \alpha\beta < \vec{v}|\vec{u} >_M + \beta^2 < \vec{u}|\vec{w} >_M,$$

amit hamarosan felhasználunk.

A Lorentz-tükrözést vektorokkal is megadhatjuk. Válasszuk kényelmesen a bázisvektorokat! A $\vec{j}$ bázisvektor legyen párhuzamos az eredetileg választott egyenesiránnyal, az $\vec{i}$ bázisvektor pedig azzal az egyenessel, amelyet a felezőpontok alkottak d)-ben. Ha a P pont koordinátái ebben a bázisban $(\alpha;\beta)$ – azaz $\overrightarrow{OP}=\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}$ –, akkor képe: $P'(\alpha,-\beta)$ – tehát $\overrightarrow{OP'}=\alpha\vec{i}-\beta\vec{j}$.

Az $\vec{i}$, $\vec{j}$ vektorok a (6-7) egyenletek szerint lehetnek pl. $\vec{i}(m,1)$, $\vec{j}(1,m)$. Ezek a vektorok Minkowski értelemben merőlegesek: $<\vec{i};\vec{j}>_M = m\cdot 1 - 1\cdot m = 0$.

Határozzuk most meg a P, Q pontok Minkowski távolságnégyzetét, illetve képeik Minkowski távolságnégyzetét! Ha ebben a bázisban $P(\alpha;\beta)$, $Q(\gamma;\delta)$, akkor

$$<\overrightarrow{PQ}|\overrightarrow{PQ}>_M = <(\gamma-\alpha)\vec{i}+(\delta-\beta)\vec{j}|(\gamma-\alpha)\vec{i}+(\delta-\beta)\vec{j}>_M =$$

$$=(\gamma-\alpha)^2<\vec{i}|\vec{i}>_M+(\delta-\beta)^2<\vec{j}|\vec{j}>_M .$$

A P, Q pontok P', Q' képeinek koordinátái $P'(\alpha;-\beta)$, $Q'(\gamma;-\delta)$, így távolságuk

$$<\overrightarrow{P'Q'}|\overrightarrow{P'Q'}>_M = <(\gamma-\alpha)\vec{i}+(-\delta+\beta)\vec{j}|(\gamma-\alpha)\vec{i}+(-\delta+\beta)\vec{j}>_M =$$

$$=(\gamma-\alpha)^2<\vec{i}|\vec{i}>_M+(-\delta+\beta)^2<\vec{j}|\vec{j}>_M .$$

A két távolságnégyzet megegyezik, ezzel a bizonyítást befejeztük.

8. Irodalomjegyzék

Jay P. Fillmore és **Arthur Springer**: *New euclidean theorems by the use of Laguerre transformations – Some geometry of Minkowski (2+1)-space*,

Journal of Geometry, Birkhäuser Basel, 52 kötet, 1-2. (márciusi) szám, 1995, 74-90. oldal

http://www.springerlink.com/content/xq118w38l0681672/

Daniel Pedoe: *A forgotten geometrical transformation*,
L'Enseignement Math., 28. szám, 1972, 255-267. oldal