Pelikán József
Matematikai konstansok

Készítette Török Lajos, Hraskó András

Az előadást és az abból készült jegyzet elkészítését támogatta a
Budapest Bank Budapestért Alapítvány, a
Fővárosi Közgyűlés Oktatási Bizottsága és a
Typotex Elektronikus Könyvkiadó Kft.

A π származtatása

„Aztán öntött egy medencét is. 10 könyököt tett ki az egyik peremétől a másikig; kerek volt, a magassága 5 könyök, és egy 30 könyöknyi zsinór érte körül. ...”

Biblia, Királyok I. könyve, 7, 23. A bronz medence

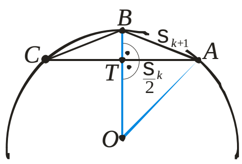
Definíció: a kör kerületének és átmérőjének arányát π-vel jelöljük.

A bibliai idézet szerint π értéke 3. Az i.e. 1650-ből származó egyiptomi Rhind papiruszon a $\left(\frac{16}{9}\right)^2 \approx 3{,}1605$ érték szerepel a kör kerületének és átmérőjének arányára (a tizedestört alak természetesen itt és a későbbiekben is modern átírás). A fennmaradt dokumentumok szerint a Szirakúzai Arkhimédesz (i.e. 287-212) volt az első, aki *becslést* adott π-re, tehát ő nem állította, sőt tudta, hogy nem találta el π pontos értékét . Számításai szerint:

$$3{,}140845 \approx \frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7} \approx 3{,}142857.$$

Arkhimédesz felső becslése a legjobb közelítés azok közül, ahol a nevező nem nagyobb, mint 7. Egy még jobb racionális közelítés viszonylag kis nevezővel a $\frac{355}{113} \approx 3{,}14159292$, amelynek π-től való eltérése kisebb, mint $2{,}67\cdot 10^{-7}$. Mielőtt megismerkedünk Arkhimédesz eljárásával lássunk egy π-hez tartó sorozatot!

A kör kerülete természetesen nagyobb, mint a körbe írt szabályos n-szög kerülete. Másrészt, ha nagyon nagy n-re kiszámítjuk a szabályos n-szög kerületét, akkor alig kapunk kisebb értéket a kör kerületénél. Az n szám növelésével tetszőlegesen megközelíthetjük π-t, ha képesek vagyunk kiszámolni a sokszög kerületét. De képesek vagyunk-e?



1. ábra

Ha pl. az $n = 2^k$ alakú számokra korlátozódunk, tehát a szabályos 2-szög (dupla átmérő), 4-szög, 8-szög, 16-szög stb. esetét vizsgáljuk, akkor esélyünk van rekurzió felállítására. Próbáljuk ezt meg! A számolás egyszerűsítése végett tekintsünk egy egységnyi sugarú kört, és az abba írt szabályos 2^k-szög oldalának hosszát jelölje σ_k, kerületét S_k.

Az 1. ábrán látható a körbe írt szabályos 2^k-szög AC oldala, valamint a szabályos 2^{k+1}-szög AB, BC oldalai. Az OA, OB szakaszok a kör sugarai, így egységnyi hosszúak. Az AOT derékszögű háromszögben

$$OT^2 = OA^2 - AT^2 = 1 - \left(\frac{\sigma_k}{2}\right)^2,$$

amiből

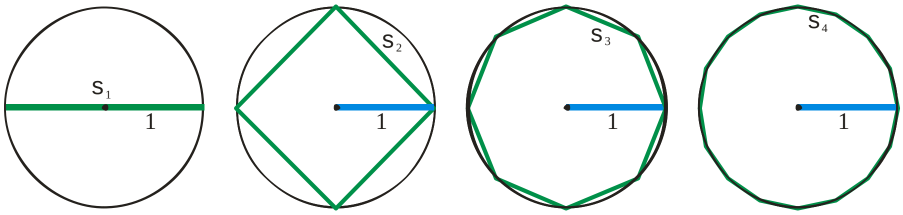
$$TB = 1 - OT = 1 - \sqrt{1 - \frac{\sigma_k^2}{4}},$$

így a TBA derékszögű háromszögben

$$\sigma_{k+1}^2 = TB^2 + TA^2 = \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\sigma_k^2}{4}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_k}{2}\right)^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{\sigma_k^2}{4}},$$

azaz

$$\sigma_{k+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - \sigma_k^2}}.$$



2. ábra

A σ_1=2 értékből kiindulva az alábbi oldalhosszakhoz jutunk:

$$\sigma_1 = 2,\quad \sigma_2 = \sqrt{2},\quad \sigma_3 = \sqrt{2-\sqrt{2}},\quad \sigma_4 = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}},\quad \sigma_5 = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}},\quad \ldots$$

A szabályos 2^k-szög kerülete: $S_k = 2^k \cdot \sigma_k$, tehát a kerület és az átmérő aránya $2^{k-1} \cdot \sigma_k$. Ennek közelítő értékei hiba-becslésekkel:

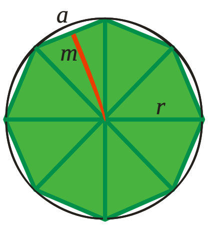
k	$2^{k-1}\cdot\sigma_k$	$\pi - 2^{k-1}\cdot\sigma_k$
1	2	1.141592653589793
2	2.828427124746190	0.313165528843603
3	3.061467458920718	0.080125194669075
4	3.121445152258052	0.020147501331740
5	3.136548490545939	0.005044163043853
6	3.140331156954752	0.001261496635040
7	3.141277250932772	0.000315402657020
8	3.141513801144301	0.000078852445492
9	3.141572940367091	0.000019713222701
10	3.141587725277159	0.000004928312633
20	3.141592653585093	0.000000000004700

A π közelítése ezzel a módszerrel lassú és meglehetősen nehézkes. A gyökvonás elvégzése még a középkorban sem volt könnyű.

Szoftver ajánló
További adatokért igénybe vehetjük a számítógépet. A számításokat háromféle szoftverrel is mellékeljük, bemutatjuk a Maple, a Mathematica és az Axiom matematikai programok használatát. Lásd az alábbi fájlokat:

program	**html**	**forrás**
	http://matek.fazekas.hu/portal/eloadas/2006/pj/compute	
Maple	pi_maple.html	pi.mws
Mathematica	pi_mathematica.html	pi.nb
Axiom	pi_axiom.html	pi.input

I. tétel: A kör területe $r^2\pi$.



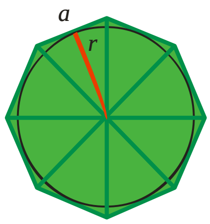
3. ábra

Valóban, ha a körbe írt szabályos n-szög egy oldala a, az oldalnak a középponttól való távolsága m, a kör sugara r, akkor az n-szög területe

$$\frac{a\cdot m}{2}\cdot n = \frac{a\cdot n}{2r}\cdot mr.$$

Ha n-et növeljük, akkor az $a\cdot n$ szorzat a kör kerületéhez tart, így a jobb oldal első tényezője a π-t közelíti, míg m értéke a sugár hosszához tart, így a második tényező r^2-hez közelít.

I. Következmény: A kör köré írt sokszög kerülete nagyobb a kör kerületénél.



4. ábra

Bizonyítás
Ha a kör kerülete *k*, a köréírt sokszög kerülete pedig *K*, akkor a kör területe *rk*/2, a sokszög területe pedig *rK*/2. Mivel a sokszöglap tartalmazza a körlapot, így a sokszög területe nagyobb a kör területénél. Az *r*/2 tényezővel leosztva kapjuk a fenti állítást.

Arkhimédesz a körbe írt és a kör köré írt szabályos hatszögekből indult ki. Módszerét feladatok formájában fogalmazzuk meg.

1. Feladat (Arkhimédesz módszerének Pfaff-féle interpretációja)

Jelölje az egységnyi sugarú körbe írt szabályos $3 \times 2^{n-1}$-szög félkerületét b_n, a kör köré írt ugyanekkora oldalszámú szabályos sokszög félkerületét pedig a_n. Mutassuk meg, hogy a_{n+1} az a_n, b_n értékek *harmonikus* közepe, míg b_{n+1} az a_{n+1}, b_n értékek *mértani* közepe:

$$\frac{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}}{2}=\frac{1}{a_{n+1}}, \qquad a_{n+1}\times b_n = b_{n+1}^2.$$

A π-re így kapható felső és alsó becslések:

	felső becslés	alsó becslés
1.	5,1961524227066318806	2,5980762113533159403
2.	3,4641016151377545871	3
3.	3,2153903091734724777	3,1058285412302491482
4.	3,1596599420975004833	3,1326286132812381972
5.	3,1460862151314349711	3,1393502030468672071
6.	3,1427145996453682982	3,1410319508905096381
7.	3,1418730499798238717	3,1414524722854620755
8.	3,1416627470568485262	3,1415576079118576455
9.	3,1416101766046895388	3,1415838921483184087
10.	3,141597034321526152	3,1415904632280500957

A pontos eljárás során gyökökkel kell számolni. Arkhimédesz természetesen nem így számolt, hanem mindenhol meglehetősen jó alsó vagy felső racionális közelítést alkalmazott.

Szoftver ajánló
A korábban említett oldalak ezt a számítást is tartalmazzák a Maple, a Mathematica és az Axiom programokkal.

I. Megjegyzés
Láttuk, hogy a kör, azaz a „2 dimenziós golyó” kerülete $2r\pi$, területe $r^2\pi$. Az „n-dimenziós egységnyi sugarú „golyó” térfogata és felszíne:

	térfogat	felszín (A)
$n = 2k$	$\frac{\pi^k}{k!} r^{2k}$	$\frac{2\pi^k}{(k-1)!} r^{2k-1}$
$n = 2k+1$	$2^{2k+1}\frac{k!\pi^k}{(2k+1)!} r^{2k+1}$	$2^{2k+1}\frac{k!\pi^k}{(2k)!} r^{2k}$

J. J. O'Connor és E. F. Robertson: A π kronológiája (MacTutor Ma.tört. Archívum)
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/HistTopics/Pi_chronology.html
J. J. O'Connor és E. F. Robertson: A π története (MacTutor Ma.tört. Archívum)
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/HistTopics/Pi_through_the_ages.html
Wikipedia a π-ről: http://en.wikipedia.org/wiki/Pi

Arkhimédesz módszeréről:
B. L. van der Waerden: Egy tudomány ébredése, Budapest: Gondolat, 1977
Xavier Gourdon & Pascal Sebah: Numbers, constants and computation:
http://numbers.computation.free.fr/Constants/constants.html
ezen belül elsősorban a constants/Archimedes’constant π/The geometric period fejezet:
http://numbers.computation.free.fr/Constants/Pi/pigeometry.pdf

Az *e* származtatása: kamatos kamat

2. feladat, Jacob Bernoulli problémája (1683)

Tegyük fel, hogy van egy bank, amely 1 év alatt 100%-os kamatot fizet. Ha a betett összeg *p*, akkor az 1 év múlva kivehető összeg

$$p\cdot(1+1)=2p.$$

A bank azt állítja magáról, hogy nem számít fel kezelési költséget és rövidebb futamidő esetén időarányosan kisebb kamattal számol. Mennyire lehetséges felkamatoztatni pénzünket a bankban?

Érdemes-e fél év után kivenni a pénzt és azonnal visszatenni? Persze, hiszen így a félév alatt szerzett kamat is kamatozódik a második félévben. 1 év alatt a betett *p* összegből így

$$p\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=2.25p$$

lesz. Érdemes folytatnunk: 3 évharmaddal számolva

$$p\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)^3=2.\overline{370}p$$

-re növelhetjük az összeget, míg ha *n* egyenlő részre osztjuk az évet és mindig ki-betesszük a pénzt, akkor a

$$e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

képlet adja meg a szorzótényezőt. Lehet-e e_n akármilyen nagy? Alább látni fogjuk, hogy nem, hanem az e_n sorozat egy véges határértékhez tart. Ez a határérték az *e* szám:

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\approx 2{,}7182818284590452354.$$

A véges határérték létezését két lépésben igazoljuk.

II. Tétel: az e_n sorozat szigorúan monoton nő.

Azt kell igazolnunk, hogy

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

ha *n* pozitív egész szám. Írjuk fel a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget *n* darab $\left(1+\frac{1}{n}\right)$-nel és egy darab 1-essel:

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot 1}<\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}.$$

A jobb oldalon álló kifejezés értéke éppen $\frac{n+2}{n+1}=1+\frac{1}{n+1}$, így (*n*+1)-edik hatványra emelés után épp a bizonyítandó állítást kapjuk.

II. Megjegyzés

Hasonlóan igazolható, hogy az

$$\mathrm{e}_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

sorozat is szigorúan monoton nő. Valóban,

$$\sqrt[n+1]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\cdot 1}<\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)+\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+\left(1-\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}=\frac{n}{n+1}=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

III. Megjegyzés
Az e_n sorozattól alig eltérő

$$E_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

sorozat viszont szigorúan monoton fogyó, hiszen

$$\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{n+1}{n} = \frac{1}{\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{n+1}},$$

és így $E_n = \frac{1}{\varepsilon_{n+1}}$.

III. Tétel: az e_n sorozat felülről korlátos.

Valóban, $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) = E_n \le E_1 = 2^2 = 4$. Az utolsó egyenlőtlenségnél azt használtuk fel, hogy az E_n sorozat monoton fogyó.

A két állításból az analízis alaptételei alapján már következik, hogy az e_n sorozatnak létezik véges határértéke, de ezt az alábbi táblázat segítségével meg is magyarázzuk. A táblázat 2. oszlopában találhatók az e_n sorozat elemei, ezek lefelé haladva egyre nőnek. A 3. oszlopban az E_n sorozat elemei láthatók, ennek elemei egyre csökkennek.

n	e_n	E_n
1	2	4
2	2,25	3,375
3	2,3703703703703703704	3,1604938271604938272
4	2,4414062500000000000	3,0517578125000000000
5	2,4883200000000000000	2,9859840000000000000
10	2.5937424601000000000	2,8531167061100000000
20	2,6532977051444201339	2,7859625904016411406
50	2,6915880290736053939	2,7454197896550775018
100	2,7048138294215260933	2,7318619677157413542
1000	2,7169239322358924574	2,7196408561681283498

Szoftver ajánló További adatokért lásd az alábbi oldalakat:

program	**html**	**forrás**
	http://matek.fazekas.hu/portal/eloadas/2006/pj/compute	
Maple	e_maple.html	e.mws
Mathematica	e_mathematica.html	e.nb
Axiom	e_axiom.html	e.input

Az azonos sorban található két elem különbsége:

$$E_n - e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}-1\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} < \frac{4}{n}.$$

Az $[e_n, E_n]$ intervallumok tehát egymásba vannak skatulyázva

$$[e_1,E_1] \supset [e_2,E_2] \supset [e_3,E_3] \supset \ldots$$

és hosszuk a 0-hoz tart. Legfeljebb egy olyan szám lehet, amelyik mindegyik intervallumban benne van, hiszen, az intervallumok hossza bármely két szám különbségénél kisebb lesz. De van-e egyáltalán ilyen szám? A valós számokra vonatkozó Cantor axióma szerint, ha egymásba skatulyázott zárt intervallumok (olyan intervallumok, amelyeknek a határpontjai is az intervallumhoz tartoznak) hossza a 0-hoz tart, akkor van közös elemük. Tehát van ilyen szám. Ezt nevezzük *e*-nek.

Az *e* szám I. definíciója: a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ határértéket *e*-vel jelöljük.

Ez a két sorozat nem alkalmas arra, hogy *e*-t nagy pontossággal meghatározzuk, hiszen még az 1000. közelítő értékek is csak a tizedesvessző utáni első két jegyét adják meg.

Az *e* származtatása: természetes logaritmus

A matematika részben a számolás tudománya. Évezredeken keresztül komoly gondot jelentett a szorzás és az osztás, különösen pedig a gyökvonás elvégzése. Talán először Arkhimédész hívta fel a figyelmet egy esetre, amikor szorozni könnyű:

Ha adottak számok, melyek egyenlő arányban állnak egymással és az egységtől kezdődnek, akkor közülük bármelyik kettő szorzata is közöttük található, méghozzá a (sorozatban) olyan messze a nagyobbiktól, mint amilyen messze a kisebbik van az egységtől...

Itt tehát az 1, a, a^2, a^3, a^4, ... sorozatról és az $a^k \times a^m = a^{m+k}$ azonosságról van szó. A sorozat ismeretében tehát a szorzást úgy lehet elvégezni, hogy közben csak összeadnunk kell. Minden második tag gyökét is megleljük a sorban és az osztást is megkönnyíti a sorozat. Kényelmes lenne, ha minden szám benne lenne egy ilyen sorozatban és az közzé lenne téve egy kézikönyvben, mint ahogy a szögek trigonometriai függvényeiről már az Ókorban is készült, és könyvtárakban elérhető volt táblázat.

A kérdést megoldja az exponenciális függvény és inverze, a logaritmus. A „kívánt" kézikönyv a négyjegyű függvénytáblázat, ill. benne a logaritmustábla. A logaritmus függvény ismert azonosságai alapján érthető is a számolásban való hasznossága. Csakhogy a függvény-szemlélet modern korunk terméke, a Bernoullik kora előtt ilyesmiről nem volt szó. Mégis, a skót John Napier 1614-ben, tehát jóval a kamatos kamat probléma vizsgálata előtt létrehozta az első logaritmustáblát.

Napier két mozgást tekintett, az egyik az *AB* szakaszon történt *A*-ból *B*-felé, a másik egy *A'* végpontú félegyenesen. A két mozgó pont – *C* és *C'* – az *A*, illetve az *A'* végpontból indult azonos kezdősebességgel, az utóbbi sebessége állandó volt, míg az *AB* szakaszon mozgó pont sebessége a *CB* szakasz hosszával egyezett meg. Napier táblázata megfeleltette a $CB = x$ távolságot, az $A'C' = y$ távolságnak, az utóbbit maga Napier nevezte el az előbbi ***logaritmus***ának. A skót tudós az akkori trigonometriai táblázatok pontosságát alapul véve az *AB* távolságot konkrétan 10^7-nek vette és műve részletes magyarázatot tartalmazott miként is alkalmazható táblázata a három említett algebrai művelet elvégzésében.

Xavier Lefort: A logaritmus története,
http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/penelope/uk_conflefort.htm
The MacTutor History of Mathematics archive: John Napier,
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/%7Ehistory/Biographies/Napier.html
Henry Briggs: Arithmetica Logarithmica,
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/%7Ehistory/Miscellaneous/Briggs/index.html
Mathworld: Napierian Logarithm,
http://mathworld.wolfram.com/NapierianLogarithm.html
J. J. O'Connor és E. F. Robertson: A függvény fogalmának kialakulása (MacTutor Ma.tört. Archívum)
http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/HistTopics/Functions.html

Vegyük szemügyre Napier modelljének egy egyszerűsített változatát!

3. feladat, módosított Napier-logaritmus

Mérjük *t*-tengelyen az idő múlását, az *x*-tengelyen pedig tekintsünk egy olyan mozgást, amely a tengely origójától egységnyi távolságban, attól távolodva indul és sebessége az origótól való távolsággal egyezik meg. Határozzuk meg az $x(t)$, $t(x)$ függvényeket!

Megoldás vázlat

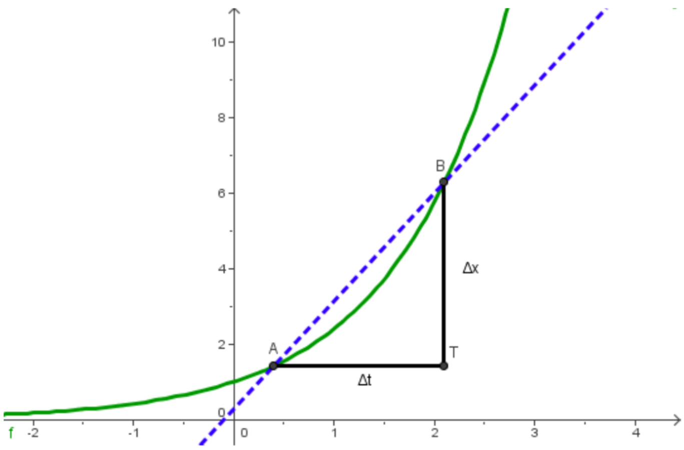
Jelölje a mozgó pont *x*-tengelyen elfoglalt helyét a *t* időpontban $x(t)$. Fejezzük ki a mozgó pont sebességét a $t=t_0$ időpontban! A pont Δt idő alatt t_0 pontból az $x(t_0+\Delta t)$ pontba megy át, így elmozdulása

$$\Delta x = x(t_0+\Delta t) - x(t_0),$$

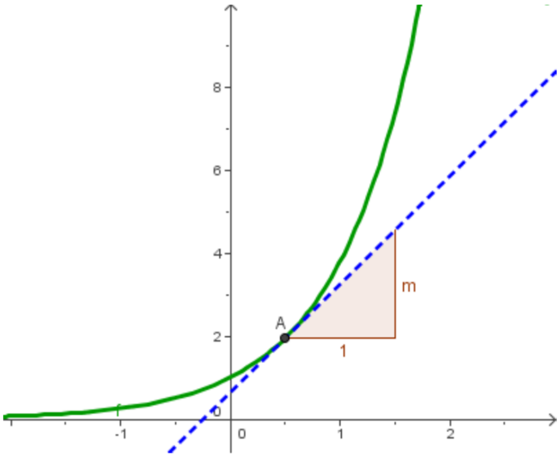
átlagsebessége pedig

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_0+\Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}.$$

A fenti $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ hányadost az $x(t)$ függvény t_0 és $(t_0 + \Delta t)$ közti *differenciahányados*ának nevezik. A differenciahányados a függvénygrafikon két megfelelő pontja közti szelő meredeksége.



5. ábra
A html verzióban az ábra animációt rejt



6. ábra

A html verzióban az ábra animációt rejt

A mozgó pont pillanatnyi sebességét a t_0 időpontban $x'(t_0)$-lal jelöljük, ez az átlagsebesség határértéke, amint Δt tart a 0-hoz:

$$x'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}.$$

Az $x'(t_0)$ mennyiséget az $x(t)$ függvény t_0–beli ***meredekség***ének vagy ***differenciálhányados***ának is nevezik. Az $x'(t_0)$ mennyiség tehát az $x(t_0)$ függvény grafikonjához a $(t_0,\ x(t_0))$ pontban húzott érintő meredeksége.

A mozgásra kirótt feltétel szerint

$$x'(t_0) = x(t_0)$$

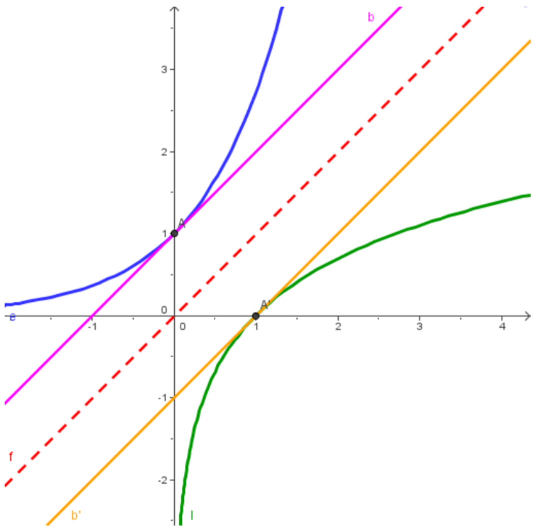
minden t_0 valós számra. Olyan függvényt keresünk, amelynek deriváltja minden pontjában megegyezik az ottani függvényértékkel, azaz a függvény ***deriváltfüggvénye*** maga a függvény. Látni fogjuk, hogy az exponenciális függvények között találunk ilyet: épp az e^x a megfelelő.

Legyen tehát $x(t) = a^t$, ahol a tetszőleges pozitív szám. Az exponenciális függvény differenciahányadosa:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{a^{t_0+\Delta t} - a^{t_0}}{\Delta t} = a^{t_0}\frac{a^{0+\Delta t} - a^0}{\Delta t}.$$

Vegyük észre, hogy a jobb oldali tört értéke független t_0-tól és nem más, mint az a alapú exponenciális függvény differenciahányadosa 0 és Δt között. Ennek határértéke az exponenciális függvény deriváltja a 0-ban. Máris beláttuk, hogy – bármelyik alap esetén – az exponenciális függvény deriváltja arányos az eredeti függvénnyel és az arányossági tényező ugyanezen függvény deriváltja a 0-ban. Az a alap tehát akkor megfelelő feladatunk szempontjából, ha az a^t függvény deriváltja a 0-ban 1. Tekintsük most a $t \to a^t$ függvény inverzét, az $a^t \to t$, tehát az $x \to \log_a(x)$ függvényt. E két függvény grafikonja egymás tükörképe a $t=x$ egyenesre. Megfelelő érintőik is egymás tükörképei. A $(0; a^0)=(0;1)$ pont tükörképe az $(1;0)=(1; \log_a 1)$ pont. Az a^t függvény grafikonjának (0;1) pontbeli érintője pontosan akkor 1 meredekségű, ha a $\log_a x$ függvény grafikonja (1;0) pontbeli érintőjének meredeksége 1. Ez a meredekség:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\log_a(1+\Delta x) - \log_a 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\log_a(1+\Delta x)}{\Delta x}.$$



7. ábra

Tekintsük pl. a 0-hoz tartó $1/n$ sorozatot. Így:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\log_a(1+\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{n \to \infty}\frac{\log_a(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} n\log_a(1+\frac{1}{n}) = \lim_{n \to \infty}\log_a\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = \log_a\left(\lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = \log_a e.$$

A meredekség tehát pontosan akkor 1, ha $a=e$. Ezzel beláttuk, hogy az $x(t)=e^t$, $t(x)=\log_e(x)=\ln x$ függvények megoldásai a feladatnak. Az analízis eszközeivel megmutatható, hogy más megoldás nincs. A „módosított Napier-féle logaritmus” tehát a természetes (azaz e alapú) logaritmus.

Fent a $\Delta x \to 0$ típusú függvényhatárértékről áttértünk az $1/n$ speciális sorozatra ($n \to \infty$). Egy matematikailag precíz bizonyításnál szükséges lenne megmutatni, hogy $1/n$ helyett bármely 0-hoz tartó Δx_n sorozatnál is fennáll a $\lim_{n \to \infty}\frac{\log_a(1+\Delta x_n)}{\Delta x_n} = \log_a e$ összefüggés.

IV. Megjegyzés

Egyúttal beláttuk, hogy a $t \to e^t$ függvény deriváltja önmaga.

> **Az *e* szám II. definíciója:** *e*-vel jelöljük azt az alapot, amelyre az $f(t)=e^t$ függvény deriváltfüggvénye önmaga, azaz $f'(t) = f(t) = e^t$.

V. Megjegyzés

Eredményeinkből az $x \to \log_e x = \ln x$ függvény deriváltfüggvénye is meghatározható. Az ln*x* függvény grafikonjának tükörképe az $y=x$ egyenesre megegyezik az e^x függvény grafikonjával. Az $(x, \ln x)$ pont tükörképe az $(\ln x, x)$ pont, a logaritmus függvény $(x, \ln x)$ pontbeli érintőjének képe az exponenciális függvény $(\ln x, x)$ pontbeli érintője. Az utóbbi egyenes meredeksége x (ugyanis most $t=\ln x$, $x=e^t$, a meredekség tehát $e^t=x$), így tükörképének meredeksége $1/x$, azaz $(\ln x)'=1/x$.

VI. Megjegyzés

A természetes logaritmus elnevezés vélhetően Mercatortól (1668, *Logarithmo-technica*) származik. Ő határozta meg az alábbi hatványsort:

$$\log_e(1+x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots, \quad \text{ha } -1 < x \le 1.$$

VII. Megjegyzés

A XVI. század folyamán számos olyan probléma került terítékre, amelynek köze volt az *e* számhoz, de az *e* elnevezést csak némileg később, Leonhardt Euler adta. A névadó kezdőbetűjének a jellel való egyezése valószínűleg véletlen.

Ajánló

Mathworld a Mercator-sorról: http://mathworld.wolfram.com/MercatorSeries.html
Wikipedia a deriválásról: http://en.wikipedia.org/wiki/Derivative
J. J. O'Connor és E. F. Robertson: Az analízis története (MacTutor Matematikatörténeti Archívum)
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/%7Ehistory/HistTopics/The_rise_of_calculus.html

Az e^t függvény hatványsora

Viszonylag egyszerű függvények a *polinom*ok.

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots + a_n t^n$$

Polinomokat pl. könnyű deriválni. A $g(t) = t^k$ egytagú polinom deriváltja a t_0 pontban:

$$g'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(t_0 + \Delta t)^k - t_0^{\,k}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{t_0^{\,k} + k t_0^{\,k-1} \Delta t + \binom{k}{2} t_0^{\,k-2} \Delta t^2 + \ldots + \Delta t^k - t_0^{\,k}}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} k t_0^{\,k-1} + \binom{k}{2} t_0^{\,k-2} \Delta t + \ldots + \Delta t^{k-1} = k t_0^{\,k-1}.$$

Ennek alapján megmutatható, hogy a fenti $p(t)$ polinomfüggvény deriváltja:

$$p'(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + \ldots + n a_n t^{n-1}.$$

Számos olyan függvény, amely nem polinom, előállítható végtelen polinom, azaz *hatványsor* alakjában:

$$h(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots + a_n t^n + \ldots$$

A XVII. és a XVIII. században a matematikai, fizikai, kartográfiai stb. problémákban felmerülő függvények jelentős részének előállították a hatványsorát. Pl. Newton (1643 - 1727) már virtuózan bánt a hatványsorokkal. Egyáltalán nem nyilvánvaló, hogy mely függvényeknek létezik hatványsora és az mely tartományon milyen értelemben állítja elő a függvényt. Ennek részleteibe itt nem megyünk bele.

Adunk egy vázlatos gondolatmenetet az $e(t)= e^t$ függvény hatványsorának meghatározására. A hatványsor együtthatói meghatározhatók az exponenciális függvény alábbi két tulajdonságából:

a) $e(0) = 1$, b) $e'(t) = e(t)$.

Az a) tulajdonságból következik, hogy $a_0 = 1$. A b) tulajdonság egyszerre nagyon sok összefüggést ad az együtthatókra, ha a hatványsort szabad tagonként differenciálni, azaz ha

$$h'(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + \ldots + n a_n t^{n-1} + \ldots$$

Ekkor ugyanis (amennyiben a hatványsor együtthatóira az egyértelműség is teljesül) a két sor összevetéséből:

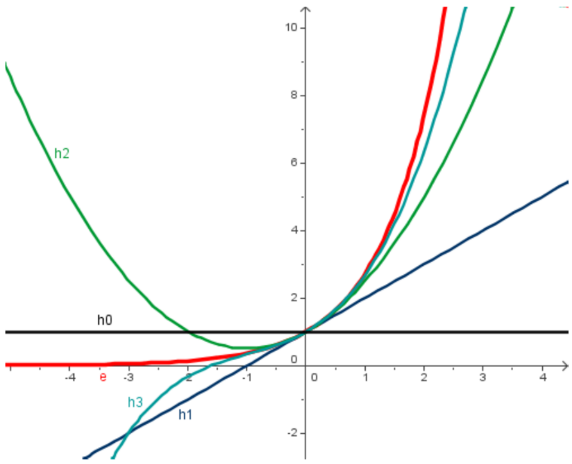
$$a_0 = a_1,\ a_1 = 2a_2,\ a_2 = 3a_3,\ \ldots,\ a_{n-1} = n a_n,$$

tehát

$$a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = \frac{1}{3!}, a_4 = \frac{1}{4!},\ \ldots,\ a_n = \frac{1}{n!},\ \ldots$$

Ebből

IV. tétel:



8. ábra
Az e^t függvény grafikonja (pirossal) és hatványsorának közelítőösszegei

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}.$$

Pl. $x = 1$ esetén

2. Következmény

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} \ldots = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!},$$

ami a korábbi összefüggésnél sokkal jobb lehetőséget ad *e* kiszámítására:

n	$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$
0	1
1	2
2	2,5
3	2,6666666666666666666666666666666666666666666666667
4	2,7083333333333333333333333333333333333333333333333
5	2,7166666666666666666666666666666666666666666666667
10	2,7182818011463844797178130511463844797178130511464
15	2,7182818284589944642854695764748674801584854494907
20	2,7182818284590452353397844906664158861464034345403
21	2.7182818284590452353593574317298071473772510089137
40	2,7182818284590452353602874713526624977572470936999
41	2,7182818284590452353602874713526624977572470937000
42	2,7182818284590452353602874713526624977572470937000

n=10-re-ig, már az első hét, *n*=21-re az első húsz, *n*=41-re pedig az első ötven jegyre jó a kerekített eredmény.

Szoftver ajánló További adatokért lásd az alábbi oldalakat:

program	html	forrás
	http://matek.fazekas.hu/portal/eloadas/2006/pj/compute	
Maple	e_maple.html	e.mws
Mathematica	e_mathematica.html	e.nb
Axiom	e_axiom.html	e.input

A sin *z*, cos *z* függvények hatványsora is könnyen meghatározható a függvények 0-beli értékéből és a deriváltjaikra vonatkozó alábbi összefüggésekből:

$$(\sin z)' = \cos z, \qquad (\cos z)' = -\sin z,$$

és így

$$(\sin z)'' = -\sin z, \qquad (\cos z)'' = -\cos z,$$

Az e^t-re már látott gondolatmenet mintájára levezethető, hogy

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots \pm \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots \pm \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}.$$

A hatványsorok segítségével az e^z, sin *z*, cos *z* függvények a komplex számsíkon is értelmezhetők. Bármely komplex számot is írunk be hatványsor alakjukba mindig konvergens sort kapunk és a kapott függvények komplex értelemben is differenciálhatók lesznek (az ugyanúgy képzett differenciahányadosnak mindenhol van komplex határértéke).

Számoljuk ki példaként $e^{i\pi}$ értékét, ahol $i^2 = -1$! Tetszőleges *x* valós számra

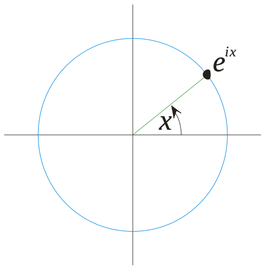
$$e^{i\cdot x} = 1 + \frac{i\cdot x}{1!} + \frac{(i\cdot x)^2}{2!} + \frac{(i\cdot x)^3}{3!} + \frac{(i\cdot x)^4}{4!} + \frac{(i\cdot x)^5}{5!} + \frac{(i\cdot x)^6}{6!} + \ldots = 1 + \frac{i\cdot x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{i\cdot x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{i\cdot x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right) + i\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right) = \sin x + i \cos x,$$

tehát

V. tétel (Euler-formula)

$$e^{ix} = \sin x + i\cos x.$$



9. ábra

Geometriai interpretáció: e^{ix} az a komplex szám, amelybe az origóból az x forgásszögű egységvektor mutat. Az e alapú exponenciális függvény tehát felcsavarja a komplex számsík képzetes tengelyét az egységkörre. Ebből, vagy a formulába való behelyettesítéssel ($e^{ip} = \sin p + i\cos p$) megkaphatjuk e^{ip} értékét:

III. Következmény

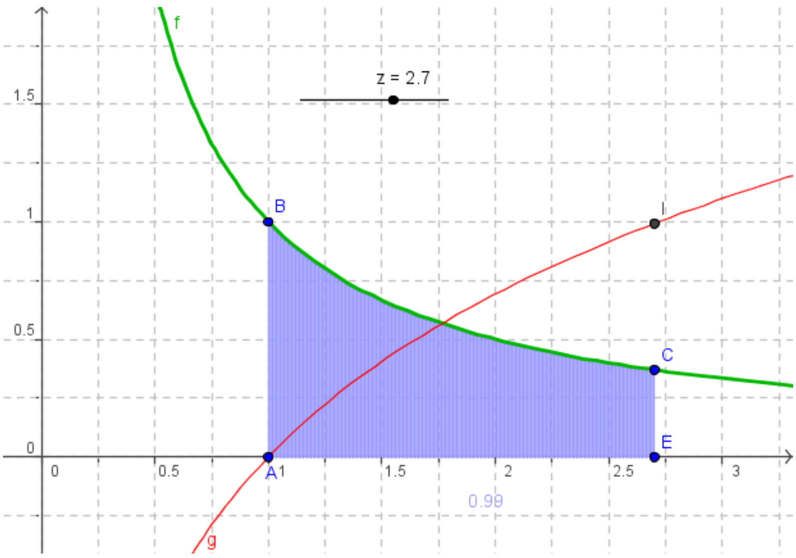
$$e^{ip} = -1.$$

Wikipedia, the free encyclopedia: The exponential function
http://en.wikipedia.org/wiki/Exponential_function
Wikipedia, the free encyclopedia: Characterizations of the exponential function
http://en.wikipedia.org/wiki/Characterizations_of_the_exponential_function
Julian Havil, Freeman Dyson: Gamma: Exploring Euler's Constant,
http://www.amazon.com/gp/reader/0691099839/ref=sib_dp_pt/104-8614283-5638337#reader-link
John H. Mathews: A komplex exponenciális függvény (alsóéves egyetemi óra anyaga)
http://math.fullerton.edu/mathews/n2003/ComplexFunExponentialMod.html
George Cain: Komplex függvénytan (egyetemi alsóéves bevezető kurzus)
http://www.math.gatech.edu/~cain/winter99/complex.html

Az e származtatása: a hiperbola alatti terület

4. Feladat

Határozzuk meg az $x \to 1/x$ hiperbolagörbe x=1 és x=t értékek közti íve alatti $I(t)$ területét!



10. ábra

Az *ABCE* négyszög *BC* oldala az $x \to 1/x$ hiperbola íve. A négyszög *I* területe az *EC* párhuzamos eltolásakor változik, a piros grafikonon mozog. Vajon a piros grafikon egy ismert függvény grafikonja?

Határozzuk meg az $I(t)$ függvény deriváltját! Az $I(t+\Delta t)-I(t)$ differencia a hiperbola $x=t$ és $x=t+\Delta t$ közti íve alatti területtel egyenlő. Mivel az $1/x$ függvény monoton fogyó, így

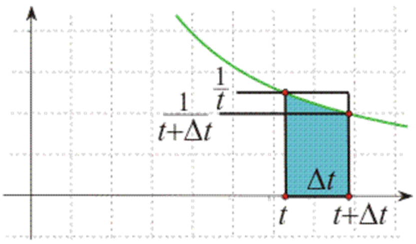
$$\frac{\Delta t}{t} < I(t+\Delta t) - I(t) < \frac{\Delta t}{t+\Delta t},$$

azaz

$$\frac{1}{t} < \frac{I(t+\Delta t) - I(t)}{\Delta t} < \frac{1}{t+\Delta t},$$

és így

$$I'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{I(t+\Delta t) - I(t)}{\Delta t} = \frac{1}{t}.$$



11. ábra

Találkoztunk már olyan függvénnyel, amelynek deriváltja a reciprokfüggvény. Az V. Megjegyzésben láttuk, hogy az ln$t$ függvény is ilyen. Nyilván tetszőleges c konstans esetén az (c + ln$t$) függvény is hasonló tulajdonságú, és megmutatható, hogy más függvény deriváltja nem az $1/t$ függvény. Így $I(t)$ meghatározásához már csak a c állandó meghatározása van hátra. Mivel $I(1)$ = ln1=0, így c=0, $I(t)$=ln$t$.

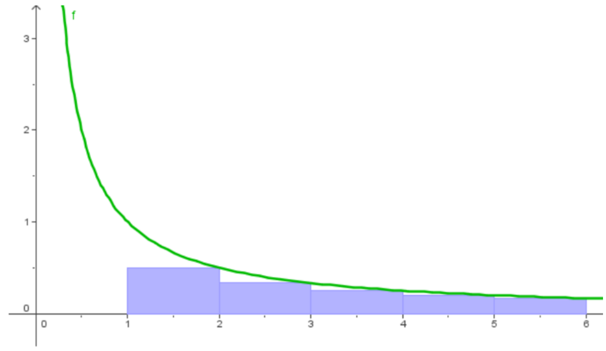
Az *e* szám III. definíciója: *e* az a szám, amelyre az $1/x$ függvény grafikonja alatti terület 1 és *e* között egységnyi.

VIII. Megjegyzés

Fenti eredményünk segítségével jó becslés adható az

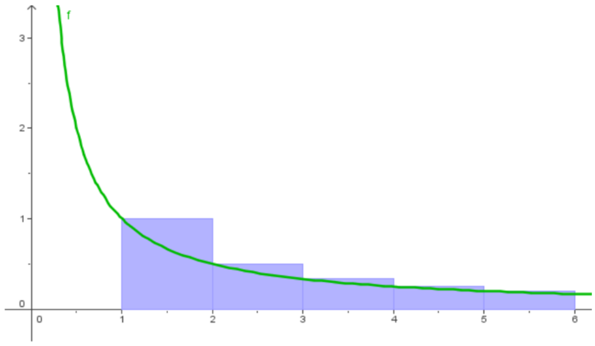
$$H(n) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

úgynevezett *harmonikus* összegre.



12.a. ábra: Az 1/*x* alatti terület alsó becslése

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}<\ln 6.$$



12.b. ábra: Az 1/*x* alatti terület felső becslése

$$\ln 6<\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}.$$

Az $1/x$ függvény görbe alatti, x=1 és x=n (n egész szám) értékek közötti területre az x-tengely egész beosztásaira emelt téglalapokkal (lásd a 12.a. és b. ábrát) az alábbi alsó és felső becslés adható:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}<\ln n<\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}.$$

Ebből, a jobb oldali egyenlőtlenséget n helyett (n+1)-re alkalmazva:

$$\ln(n+1)<\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}<1+\ln n,$$

tehát a pozitív egész számokon értelmezett $H(n)$ függvény „alig” tér el az ln$n$ függvénytől.

IV. Következmény: A pozitív egész számok reciprokösszege végtelenhez tart:

$$\lim_{n\to\infty} H(n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+..+\frac{1}{n}\right)=\infty.$$

IX. Megjegyzés

Leonhardt Euler a fent említett Következmény, valamint a Számelmélet Alaptételének segítségével igazolta, hogy végtelen sok prím van. Gondolatmenetét alább vázoljuk.

VI. Tétel: a prímszámok száma végtelen.

Euler gondolatmenete:

Ismeretes az

$$(1-x)(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{n-1})=1-x^n$$

azonosság, amelyből

$$\frac{1-x^n}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{n-1}.$$

Ha $|x|<1$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} x^n=0$, így

$$1+x+x^2+x^3+\ldots=\lim_{n\to\infty}1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{n-1}=\frac{1}{1-x}.$$

Tegyük fel, hogy a prímek száma véges. Itt felsoroljuk őket: p_1, p_2, …, p_k. Ebben az esetben az

$$\Pi=\frac{1}{1-\frac{1}{p_1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{p_2}}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{p_n}}$$

szorzat értéke is egy véges szám. Másrészt azonban

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p_1}}=1+\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_1^2}+\frac{1}{p_1^3}+\ldots,$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p_2}}=1+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_2^2}+\frac{1}{p_2^3}+\ldots,$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}=1+\frac{1}{p_k}+\frac{1}{p_k^2}+\frac{1}{p_k^3}+\ldots.$$

Képezzük úgy a Π szorzatot, hogy a fenti jobb oldali végtelen összegeket szorozzuk össze!

$$\Pi=1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1+\frac{1}{p_1}\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1+1\cdot\frac{1}{p_2}\cdot\ldots\cdot 1+\ldots+1\cdot 1\cdot\ldots\cdot\frac{1}{p_k}+\frac{1}{p_1}\cdot\frac{1}{p_2}\cdot\ldots\cdot 1+\ldots+\frac{1}{p_1^2}\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1+\ldots$$

A Π kifejezés ebben a formában egy végtelen összeg, melynek tagjai

$$\frac{1}{p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}}$$

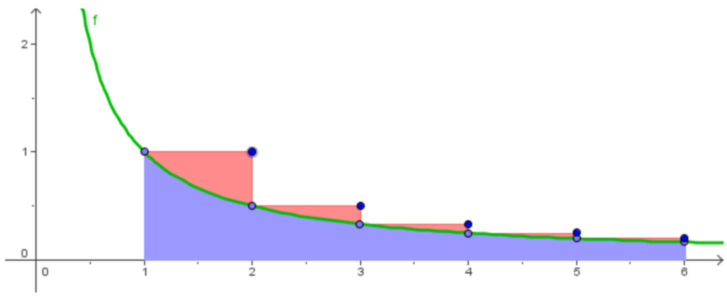
alakúak, ahol az $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ kitevők nemnegatív egész számok. A Számelmélet Alaptétele szerint (minden egész szám egyértelműen írható fel prímszámok szorzataként, azaz $p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$ alakban) a Π összeg tagjai épp a pozitív egész számok reciprokai. Megmutatható, hogy az adott szituációban a végtelen összeg értéke nem függ a tagok sorrendjétől, így

$$\Pi=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots=\lim_{n\to\infty}H(n)=\infty,$$

ami ellentmond annak, hogy a Π szorzat értéke véges. Az ellentmondás mutatja, hogy végtelen sok prímszám van.

A $H(n)$ harmonikus összeg és $\ln n$ értékének különbségét szemléltetjük a 13. ábrán és bevezetünk rá egy jelölést. A piros területösszeg:

$$\gamma(6)=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ln 6,$$



13. ábra
A harmonikus összeg és a logaritmus

általában

$$\gamma(n)=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\ln n=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)-\frac{1}{n}.$$

Euler-Mascheroni konstans (γ): A 13. ábrán látható grafikon elképzelt folytatásán a piros területek végtelen összege, azaz

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\gamma(n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)\approx 0{,}5772156649.$$

X. Megjegyzés: nem ismert, hogy a γ szám racionális, vagy irracionális.

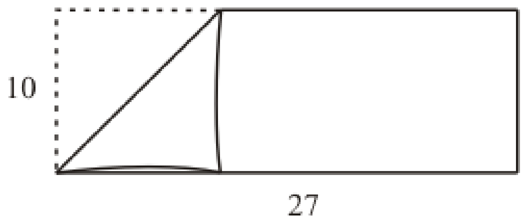
Törtek és lánctörtek

Minden racionális szám felírható

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots \, \cfrac{1}{a_n}}}}}$$

alakban, ahol a_0 egész szám, $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ pedig pozitív egész számok. A fenti emeletes törtet, – úgynevezett véges *lánctört*et – röviden így szokás lejegyezni: $[a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n]$. Az

$$a_0, \quad a_0 + \frac{1}{a_1}, \quad a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}}, \quad a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}}, \quad \ldots, \quad a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots \, \cfrac{1}{a_n}}}}},$$



14. ábra

törteket a láctört ***kezdeti részlettörtje***inek nevezzük. Minden irracionális számhoz van olyan lánctört, amelynek kezdeti részlettörtjei olyan sorozatot alkotnak, amely hozzá tart. Ráadásul ez a lánctört (tehát a végtelen sok a_i együttható) egyértelmű. Alább egy feladaton keresztül ismerkedünk meg a lánctörtalak képzésével.

5. Feladat

Egy 10 cm´ 27 cm-es téglalap alakú papírlapnak behajtjuk a sarkát (a kisebbik oldalt ráhajtjuk a nagyobbikra) és 10 cm oldalú négyzeteket hajtogatunk belőle, amennyit csak lehet.

A négyzeteket levágjuk, és a megmaradó csíkból olyan négyzeteket hajtogatunk, amelyeknek az oldala a papírcsík kisebbik oldalával egyezik meg (esetünkben 7-tel). Ebből is annyit hajtogatunk, amennyit csak tudunk. A négyzetet levágjuk, és a megmaradó csíkból hasonló módon mindig négyzeteket hajtogatunk, egészen addig, amíg sikerül a papírcsíkot csupa négyzetre hajtogatni.

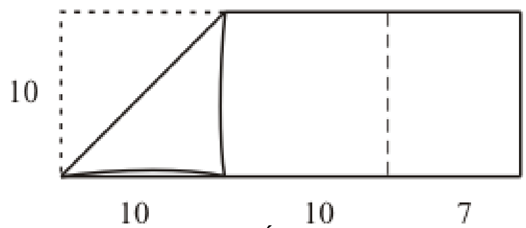
Véget ér-e véges sok lépésben az eljárás? Milyen méretű négyzetekből hányat kapunk?

Megoldás

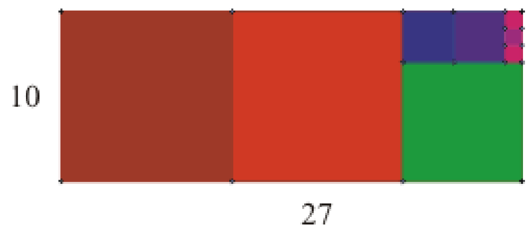
Maradékos osztásokat hajtunk végre:

$$27 = 2 \times 10 + 7,$$
$$10 = 1 \times 7 + 3,$$
$$7 = 2 \times 3 + 1,$$
$$3 = 3 \times 1 + 0.$$

Az eljárással a téglalapot 2 db 10´ 10-es, 1 db 7´ 7-es 2 db 3´ 3-as és 3 db 1´ 1-es négyzetre vágjuk.



15. Ábra



16. ábra

XI. Megjegyzés

A feladatban vizsgált eljárás az Euklideszi algoritmus. Ennek segítségével meghatározható két pozitív egész szám legnagyobb közös osztója a számok prímtényezős alakjának meghatározása nélkül, csak kivonással:

(27, 10) = (17, 10) = (7, 10) = (10, 7) = (3, 7) = (7, 3) = (4, 3) = (1, 3) = (3, 1) = (2, 1) = (1, 1) = (0, 1) = 1,

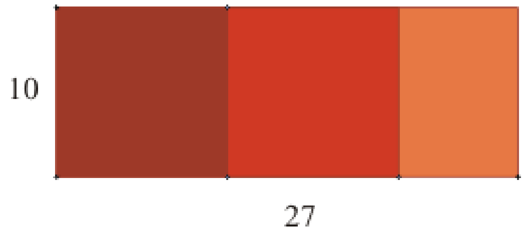
vagy kissé gyorsítva, maradékos osztással:

(27, 10) = (7, 10) = (10, 7) = (3, 7) = (7, 3) = (1, 3) = (3, 1) = (0, 1)=1.

A fent vizsgált eljárás arra is alkalmas, hogy megbecsüljük a $\frac{27}{10}$ törtet kisebb nevezőjű törtek segítségével. Az első hajtogatást, a kisebb oldal behajtását annyiszor tudjuk elvégezni, amennyi a tört egész része:

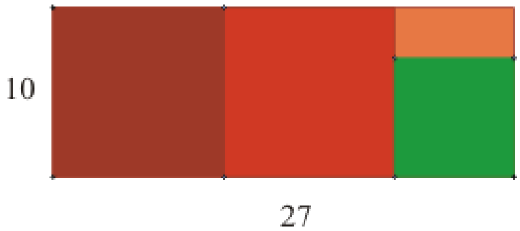
$$2 \le \frac{27}{10}.$$

A megmaradt rész méretei egyszerű kivonással állapíthatók meg:



17. ábra

$$\frac{27}{10} - 2 = \frac{7}{10},$$



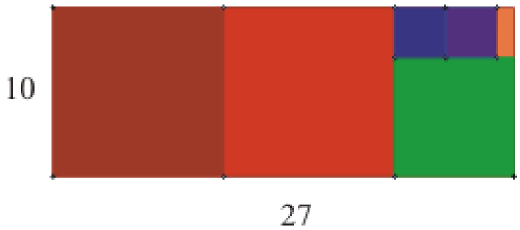
18. ábra

tehát a rövidebbik oldal 7, a hosszabbik 10. $\frac{27}{10}$-re az első becslésünk a 2, a hiba $\frac{7}{10}$.

A továbbiakban a hibatag reciprokával, $\frac{10}{7}$-del dolgozunk tovább.

$$1 \le \frac{10}{7}.$$

Ez a becslés az eredeti törttel kapcsolatos becslést is pontosítja. Térjünk vissza a reciprok értékre:



19. ábra

$$1 \ge \frac{7}{10}, \quad \Rightarrow \quad 2+1 \ge 2+\frac{7}{10}, \quad \Rightarrow \quad 3 \ge \frac{27}{10}.$$

Menjünk tovább!

$$\frac{10}{7} - 1 = \frac{3}{7}, \quad 2 \le \frac{7}{3},$$

így

$$\frac{1}{2} \ge \frac{3}{7}, \quad \Rightarrow \quad 1+\frac{1}{2} \ge 1+\frac{3}{7} = \frac{10}{7}, \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1+\frac{1}{2}} \le \frac{7}{10}, \quad \Rightarrow \quad 2+\frac{1}{1+\frac{1}{2}} \le 2+\frac{7}{10} = \frac{27}{10}.$$

Menjünk tovább!

$$\frac{7}{3} - 2 = \frac{1}{3}, \quad 3 = \frac{3}{1},$$

így

$$\frac{7}{3} = 2+\frac{1}{3}, \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{7} = \frac{1}{2+\frac{1}{3}}, \quad \Rightarrow \quad 1+\frac{1}{2+\frac{1}{3}} = 1+\frac{3}{7} = \frac{10}{7}, \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}} = \frac{7}{10}, \quad \Rightarrow \quad 2+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}} = 2+\frac{7}{10} = \frac{27}{10},$$

tehát megkaptuk törtünk lánctört alakját: $\frac{27}{10} = [2,1,2,3]$. Látható, hogy a lánctört *i*-edik együtthatója (*i*=0, 1, 2, …) a nagyságrendi sorban (*i*+1)-edik méretű egyforma négyzetek száma.

A lánctört alak előnye a tizedestört alakhoz képest, hogy minden racionális szám esetén (és csakis azoknál) véges. Ez állítás lényegében egyenértékű azzal, hogy az euklideszi algoritmus véges. Mely számoknak ismétlődő a lánctört alakja?

Egy számról akkor mondjuk, hogy algebrai szám, ha van olyan egész együtthatós polinom, aminek gyöke. Az ilyen polinomok közül a legalacsonyabb foka az algebrai szám foka. A $\sqrt{2}$ és $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (φ az

„aranymetszés” konstansa) másodfokú algebrai számok. Egy szám lánctört alakja pontosan akkor periodikus (nem feltétlenül az elején kezdődik a periódus), ha másodfokú algebrai szám.
Pl.:

$$[\varphi] = [\overline{1}] = [1,1,1,1,\ldots],\quad \sqrt{2}+1 = [\overline{2}],\quad \sqrt{2} = [1,\overline{2}],\quad \sqrt{3} = [1,\overline{1,2}],\quad \sqrt{7} = [2,\overline{1,1,1,4}]$$

Gyakran előfordul, hogy valamely c irracionális számot racionális számokkal szeretnénk közelíteni. Ha rögzítjük, hogy a nevező ***legfeljebb*** mekkora lehet, akkor a szóbajövő törtek között létezik egy, amelynek eltérése c-től minimális. Ezt a törtet a c valós szám ***legjobb közelítés***ének nevezzük. Természetesen egy törtnek több különböző legjobb közelítése is van aszerint, hogy mekkora nevezőt engedünk meg. Nevezetes tény, hogy a legjobb közelítések a c szám lánctört alakjának kezdeti részlettörtjei.
Pl. φ legjobb közelítései a

$$1,\quad 1+\frac{1}{1}=2,\quad 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}=\frac{3}{2},\quad 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}=\frac{5}{3},\quad 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}=\frac{8}{5},\quad 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}}=\frac{13}{8},\ldots$$

törtek, azaz a $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ alakú számok, a szomszédos Fibonacci-számok hányadosai.

π és e nem racionális, sőt nem is algebrai számok. Az ilyen számokat ***transzcendens***nek nevezzük. Az e π transzcendenciáját Hermite igazolta 1873-ban, a π-ről ugyanezt Lindemann mutatta meg 1882-ben. π lánctört alakjában nem sok szabályosság fedezhető fel:

$$\pi = [3,7,15,1,292,1,1,1,2,1,3,1,14,2,1,\ldots],$$

Az első öt kezdeti részlettörtnek megfelelő legjobb közelítő tört:

$$3,\quad \frac{22}{7},\quad \frac{333}{106},\quad \frac{355}{113},\quad \frac{103993}{33102}.$$

Az e szám lánctört alakja sem periodikus, mégis, feltűnő benne a szabályosság:

$$e = [2,1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,1,1,10,\ldots]$$

és így tovább.

Szoftver ajánló Az e számítása lánctört alakjának kezdeti részlettörtjeivel:

program	html	forrás
	http://matek.fazekas.hu/portal/eloadas/2006/pj/compute	
Maple	e_maple.html	e.mws
Mathematica	e_mathematica.html	e.nb
Axiom	e_axiom.html	e.input

Alapos könyv a lánctörtekről magyarul (pl. transzcendens számok konstrukciója)**:**
Maurer I. Gyula: Tizedes törek és lánctörtek, Dacia könyvkiadó, Kolozsvár-Napoca, 1981

A lánctörtek első előfordulásai, eredeti cikkek angol fordításai:
D. E. Smith: A Source Book in Mathematics (benne: Bombelli és Cataldi a lánctörtekről), Dover Publications, New York, 1959 (az 1929-es első kiadás változatlan utánnyomása)
http://www.amazon.com/Source-Mathematics-David-Eugene-Smith/dp/0486646904

Cinderella animáció:
http://cinderella.de/files/HTMLDemos/3D04_Kettenbruch.html

Összefoglalók:
Ron Knott: http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/cfINTRO.html
Mathworld: http://mathworld.wolfram.com/ContinuedFraction.html
Wikipédia: http://en.wikipedia.org/wiki/Continued_fraction
Cut-the-knot: http://www.cut-the-knot.org/do_you_know/fraction.shtml
Darren C. Collins: www-math.mit.edu/phase2/UJM/vol1/COLLIN~1.PDF

Egyéb:
Edward G. Dunne: Zongorák és lánctörtek, *Mathematics Magazine*, vol. 72, no. 2 (1999), 104-115.
http://www.research.att.com/~njas/sequences/DUNNE/TEMPERAMENT.HTML

Most a korábban említett állítások közül egyet igazolunk is

VII. Tétel: *e* irracionális.

Bizonyítás: Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy *e* racionális, legyen nevezője *k*.

$$\frac{l}{k}=e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{k!}+\frac{1}{(k+1)!}+\frac{1}{(k+2)!}+\dots$$

Szorozzunk be k!-sal és jelöljük a $\left(k!+\frac{k!}{1!}+\frac{k!}{2!}+\dots+\frac{k!}{k!}\right)$ egész számot *N*-nel!

$$l\cdot(k-1)!-N=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}+\dots<\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{1}{(k+1)^3}\dots=$$

$$=\frac{1}{k+1}\left(1+\frac{1}{k+1}+\dots\right)=\frac{1}{k+1}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{k+1}}\right)=\frac{1}{k+1}\cdot\frac{k+1}{k}=\frac{1}{k}.$$

Mivel $l\cdot(k-1)!-N=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}+\dots$ pozitív egész, ezért ellentmondásra jutottunk. Tehát *e* tényleg irracionális.

Bár a téma klasszikus, mégis az mai napig elég sok számról – pl.: $\pi+e, e\cdot\pi, \pi^e$ – eldöntetlen a kérdés, hogy irracionális-e. e^π -ről viszont tudjuk, hogy transzcendens.

Néhány különleges, π-t előállító sor

A π-nek léteznek egyéb előállítási módjai is:

VIII. Tétel (Gregory 1671, Leibniz 1673)

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

Bizonyítás (vázlat)

A fenti formula egy általánosabb összefüggés speciális esete. Az arctg$x$ függvény hatványsora:

$$arctgx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots$$

Ez a hatványsor $|x|<1$ és $x=1$ esetén konvergens. Az $x=1$ helyettesítéssel épp a bizonyítandó állítást kapjuk.

Az arctg függvény a tg függvény inverze. Nem nehéz belátni, hogy deriváltja:

$$\left(arctg(x)\right)'=\frac{1}{1+x^2}.$$

Másrészt ismeretes, hogy

$$(1+a)(1-a+a^2-a^3+a^4-a^5+\ldots-a^{2n-1})=1-a^{2n},$$

amiből az $a=x^2$ helyettesítéssel és az $n\to\infty$ határátmenettel adódik az $\frac{1}{1+x^2}$ függvény hatványsora. Ha $|x|<1$, akkor:

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+x^8-x^{10}+\ldots$$

Minek a deriváltja lehet a jobb oldali végtelen sor? Messzemenően nem nyilvánvaló, de itt is működik, hogy tagonként próbálkozunk: az „1” az „$x+c_1$” függvény deriváltja, a „$-x^2$” a $-\frac{x^3}{3}+c_2$ függvényé ... A konstansokat összevonva:

$$arctgx=c+x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots,$$

ahol a c állandó a 0 behelyettesítése után 0-nak adódik, bizonyítva(?) az állítást.

E különleges összefüggésre a rácsgeometria és a számelmélet módszereit használó másik bizonyítást írt le Laczkovich Miklós a Középiskolai Matematikai Lapok 1983. évi 3. számában „Osztók és rácspontok” címmel megjelent cikkében. A cikk elérhető a neten is: http://www.sulinet.hu/komal/.

Sajnos a Gregory és Leibnitz által talált sor nagyon lassan tart a π-hez. Machin talált rá, hogy sorukkal miképp lehet gyorsabban megközelíteni π-t.

IX. Tétel (Machin formulája)

$$\frac{\pi}{4}=4\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{239}\right)$$

Ebből a formulából az arctg függvényre fent kapott sor alkalmazásával

$$\pi=4\cdot\left(\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{239}\right)-\frac{\left(\frac{4}{5^3}-\frac{1}{239^3}\right)}{3}+\frac{\left(\frac{4}{5^5}-\frac{1}{239^5}\right)}{5}-\frac{\left(\frac{4}{5^7}-\frac{1}{239^7}\right)}{7}+\ldots\right)=4\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{4}{5^{2k+1}}-\frac{1}{239^{2k+1}}\right)}{2k+1},$$

a sor első néhány részletösszege és a hiba:

1	$\frac{3804}{1195}$	0,04167094473656659417
2	$\frac{5359397032}{1706489875}$	-0.00099562426373292416
3	$\frac{38279241713339684}{12184551018734375}$	0.00002837573524118658
4	$\frac{76528487109180192540976}{24359780855939418203125}$	-0,00000088140761594344
5	$\frac{327853873402258685803048818236}{104359128170408663038552734375}$	0,00000002881460627878

A tizedik közelítőösszegnél a hiba abszolútértéke $1,55\times10^{-15}$ alatt van.

6. Feladat: Igazoljuk Machin formuláját!

Megoldás
Alkalmazzuk a tangensfüggvény addíciós formuláját, a kétszeres szög tangensére vonatkozó összefüggést!
Ha $tg(\beta)=\frac{1}{5}$, akkor $tg(2\beta)=\frac{2tg(\beta)}{1-tg^2(\beta)}=\frac{5}{12}$ és ehhez hasonlóan $tg(4\beta)=\frac{120}{119}$. Végül
$tg(4\beta-\frac{\pi}{4})=\frac{tg(4\beta)-1}{1+tg(4\beta)}=\frac{1}{239}$, amelyből a két oldal arcustangensét véve következik Machin formulája.

Szoftver ajánló: A számítások láthatók, folytathatók az alábbi fájlokban.

program	**html**	**forrás**
	http://matek.fazekas.hu/portal/eloadas/2006/pj/compute	
Maple	pi_maple.html	pi.mws
Mathematica	pi_mathematica.html	pi.nb
Axiom	pi_axiom.html	pi.input

Ajánlott olvasmány:
Xavier Gourdon & Pascal Sebah: Numbers, constants and computation:
http://numbers.computation.free.fr/Constants/constants.html
ezen belül elsősorban a constants/Archimedes'constant π/The classic period fejezet és a „π and its computation through the ages" cikk: http://numbers.computation.free.fr/Constants/Pi/piCompute.pdf

Összefüggések több nevezetes konstanssal

A végtelen sorokkal való játszadozás veszélyeire, valamint e és π kapcsolatára is utal következő példánk. Ha előbb vizsgált végtelen sorunkat átrendezzük, akkor megváltozik az összeg eredménye:

X. Tétel

$$1+\frac{1}{5}-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{13}-\frac{1}{7}+\frac{1}{17}+\frac{1}{21}-\frac{1}{11}\ldots=\frac{\pi+\ln 2}{4}.$$

Általában, ha egy végtelen sor *abszolút konvergens*, azaz a sor tagjainak abszolútértékeiből álló összeg korlátos, akkor a sor „büntetlenül” átrendezhető, azaz összege nem változik ilyen módosításnál. Ha azonban a sor nem abszolút konvergens, pl. most az

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\ldots$$

összeg értéke minden korlát fölé nő, akkor átrendezésekor módosulhat az értéke.

Az $n!$ függvény értékét egy rekurzív eljárással számítjuk ki. Ahhoz tehát, hogy kiszámoljuk pl. 2007!-t, ki kell számítanunk 2006!, 2005!, ... 2!, 1! értékét is. Lehet-e ezt másképp csinálni? Klasszikus probléma olyan c konstans keresése, amelyre

$$n!=\left(\frac{n}{c}\right)^n.$$

Ilyen univerzális, n-től független konstans nincs, de majdnem van. Egy hasznos összefüggés, amelyben e és π együtt szerepel:

XI. Tétel (Stirling-formula): $n!\approx\sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Az első néhány n-re:

n	$n!$	$\sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n$
1	1	0,92213700889578911688
2	2	1,9190043514889831579
3	6	5,8362095913458639956
4	24	23,506175132893293432
5	120	118,01916795759007999
6	720	710,07818464218477371
7	5040	4980,3958316124608996
8	40320	39902,395452656707907
9	362880	359536,87284194826047
10	3628800	3598695,6187410359216
11	39916800	39615625,050577483915
12	479001600	475687486,47277590114
13	6227020800	6187239475,192710268
14	87178291200	86661001740,598787291
15	1307674368000	1300430722199,4658517

A „$\approx$” jel aszimptotikus egyenlőséget jelent: a két oldal hányadosa 1-hez tart, ha n-nel tartunk a végtelenbe.

$P(n)$ az n egész szám partícióinak száma, tehát azt mondja meg, hogy hányféleképpen állítható elő az n egész szám pozitív egészek összegeként, ha a sorrend nem számít. Pl. $P(4)=5$, hiszen

$$4=3+1=2+2=2+1+1=1+1+1+1,$$

míg $P(5)=7$, hiszen

$$5=4+1=3+2=3+1+1=2+2+1=2+1+1+1=1+1+1+1+1$$

(az egytagú összeg is összeg).

XII. Tétel (Hardy és Ramanujan, 1918): $P(n) \approx \frac{1}{4\sqrt{3}n} e^{\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)}$.

Az egyenlőség itt is aszimptotikus egyenlőséget jelent.

Mathworld a partíciós függvényről: http://mathworld.wolfram.com/PartitionFunctionP.html,
a Stirling-formuláról: http://mathworld.wolfram.com/StirlingsApproximation.html.
Wikipédia a Stirling-formuláról (magyarul): http://hu.wikipedia.org/wiki/Stirling-formula
a partíciós függvényről: http://en.wikipedia.org/wiki/Partition_function_%28number_theory%29

Szoftver ajánló: A számítások láthatók, folytathatók az alábbi fájlokban.

<table>
<tr><th rowspan="2">program</th><th>html</th><th>forrás</th></tr>
<tr><td colspan="2">http://matek.fazekas.hu/portal/eloadas/2006/pj/compute</td></tr>
<tr><td>Maple</td><td>nfakt_maple.html</td><td>nfakt.mws</td></tr>
<tr><td>Mathematica</td><td>nfakt_mathematica.html</td><td>nfakt.nb</td></tr>
</table>

A Bázeli probléma

A XVII. században többet is megpróbálták meghatározni a négyzetszámok reciprokösszegét, tehát a

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$$

végtelen összeget. Jacob Bernoulli 1689-ben megjelent könyvében már némi előrehaladást ért el ezzel kapcsolatban. Észrevette, hogy

$$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n\cdot(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n},$$

és így

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots<1+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots<2.$$

Az általa ilymódon exponált kérdés „Bázeli probléma” néven vált híressé. Majdnem ötven évet kellett várni, míg sikerült meghatározni a vizsgált összeget.

XIII. Tétel (Euler, 1734):

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}.$$

Euler bizonyításának vázlata:
Tekintsük a

$$p(x)=\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots$$

függvényt. Ismeretes, hogy ha egy polinom gyökei x_1, x_2, …, x_n és a polinomnak nincs más gyöke, akkor ez a polinom $a(x–x_1)\cdot(x–x_1)\cdot..\cdot(x–x_n)$ alakban – úgynevezett *gyöktényezős* alakban – írható, ahol a megfelelő valós vagy komplex szám. Ennek az állításnak egy variációja arra az esetre vonatkozik, amikor a polinom konstans tagja 1. Az ilyen polinom gyöktényezős alakjának kényelmes formája:

$$\left(1-\frac{x}{x_1}\right)\cdot\left(1-\frac{x}{x_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{x}{x_n}\right)$$

Euler a $p(x)$ függvényt polinomnak kezelte és felhasználta, hogy gyökei csak a valós számegyenesen vannak. Ottani gyökeit jól ismerjük: $\pm\pi$, $\pm2\pi$, $\pm3\pi$, …. Az x=0 érték gyöke a sin$x$ függvénynek, de $p(x)$-nek már nem, ez jól látszik a végtelen sorából. Mivel a konstans tag itt 1, így

$$p(x)=\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\cdot\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\cdot\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\cdot\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\cdot\left(1-\frac{x}{3\pi}\right)\cdot\left(1+\frac{x}{3\pi}\right)\cdot..,$$

azaz

$$1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots=\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\cdot\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdot\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdot\ldots$$

Hasonlítsuk össze a két oldalon x^2 együtthatóját!

$$-\frac{1}{3!}=-\frac{1}{\pi^2}-\frac{1}{4\pi^2}-\frac{1}{9\pi^2}-\ldots,$$

amiből $(–\pi^2)$-tel való átszorzás után kapjuk a bizonyítandó állítást.

A Bázeli probléma könyvben és a neten:

Euler: The Master of us all, Mathematical Association of America, Dolciani Mathematical Expositions No. 22, 1999. ISBN 0-88385-328-0,
http://www.amazon.com/Euler-Master-Dolciani-Mathematical-Expositions/dp/0883853280

Ed Sandifer: How Euler did it,
http://www.maa.org/editorial/euler/How%20Euler%20Did%20It%2002%20Estimating%20the%20Basel%20Problem.pdf

Ed Sandifer: Euler’s Solution of he Basel Problem – The Longer Story,
http://www.southernct.edu/~sandifer/Ed/History/Preprints/Talks/NYU%20Basel%20Problem%20Paper.PDF

Wikipédia: A Basel probléma (egy másik bizonyítás is) http://en.wikipedia.org/wiki/Basel_problem

XII. Megjegyzés

Bemutatjuk az előbb kapott eredmény egy számelméleti következményét. Állítjuk, hogy annak esélye, hogy két véletlenszerűen választott pozitív egész szám relatív prím épp $\frac{6}{\pi^2}$. Alább pontosítjuk az állítást.

> **XIV. Tétel:** Válasszunk ki az 1, 2, 3, …, N egész számok között kettőt véletlenszerűen (mindegyik szám egyenlő eséllyel választható elsőnek kihúzott számnak és másodiknak is). Jelöje v_N annak valószínűségét, hogy a két szám relatív prím egymáshoz. Ekkor
> $$\lim_{N\to\infty} v_N = \frac{6}{\pi^2}.$$

Bizonyítás vázlat:

Két szám pontosan akkor relatív prím egymáshoz, ha nincs közös prímosztójuk. Annak esélye pl. hogy az 1, 2, 3, …, N számok közül egyet kiválasztva páros számot kapunk $\frac{1}{2}$, illetve alig tér el ettől (ha N páratlan). Annak esélye, hogy mindkét kiválasztott szám páros $\left(\frac{1}{2}\right)^2$. Végül annak esélye, hogy a két kiválasztott számnak nem közös osztója a 2

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Ehhez hasonlóan, annak esélye, hogy a két kiválasztott számnak nem közös osztója a p prím

$$1-\left(\frac{1}{p_i}\right)^2.$$

Annak esélye, hogy egyik prím sem közös osztó a

$$\left(1-\frac{1}{p_1^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{p_2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{p_3^2}\right)\cdot\ldots$$

végtelen szorzattal egyenlő. Vegyük észre, hogy

$$1-\frac{1}{p^2}=\frac{p^2-1}{p^2}=\frac{1}{\frac{p^2}{p^2-1}}=\frac{1}{\frac{1}{1-\frac{1}{p^2}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^4}+\frac{1}{p^6}+\ldots},$$

így

$$\left(1-\frac{1}{p_1^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{p_2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{p_3^2}\right)\cdot\ldots=\frac{1}{1+\frac{1}{p_1^2}+\frac{1}{p_1^4}+\frac{1}{p_1^6}+\ldots}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{p_2^2}+\frac{1}{p_2^4}+\frac{1}{p_2^6}+\ldots}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{p_3^2}+\frac{1}{p_3^4}+\frac{1}{p_3^6}+\ldots}\cdot\ldots=$$

$$=\frac{1}{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\ldots},$$

hiszen minden négyzetszám egyértelműen írható fel különböző prímek páros kitevőjű hatványának szorzataként. A kapott tört a négyzetszámok reciprokösszegének reciproka, tehát értéke $\frac{6}{\pi^2}$.

XIII. Megjegyzés

Olyan számokból, melyek különböző prímszámok szorzataként állnak elő n-ig kb.: $\frac{6}{\pi^2}n$ db van.

XIV. Megjegyzés
Bernhardt Riemann (1826-1866) vezette be a

$$\zeta(s)=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\ldots+\frac{1}{n^s}+\ldots$$

jelölést. $\zeta(s)$ – ejtsd „a Riemann-féle dzeta függvény az *s* helyen" – tehát egy végtelen összeg, egy határérték. Láttuk, hogy $\zeta(1)=\infty$ és $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$. Megmutatható, hogy ha $s>1$, akkor $\zeta(s)$ egy véges szám, tehát a hozzá tartozó sor konvergens. A dzeta függvény sokat elmond az egész számok világáról, láttuk pl. hogy az 1 helyen felvett „értéke" a prímszámok számával, 2-beli értéke a relatív prímséggel kapcsolatos. Riemann megmutatta, hogy a dzeta függvény kiterjeszthető a komplex számsíkra és ott csak s=1-ben van szingularitása. Riemann azt sejtette, hogy a dzeta függvény minden zérushelye olyan komplex szám, amelynek valós része ½. Sejtéséből nagyon erős állítások következnének a prímszámok eloszlásával kapcsolatban. A Riemann sejtés már majdnem 150 éve eldöntetlen, a Clay Intézet 1 millió dollárt ajánlott a megoldónak.

XV. Megjegyzés
A ζ függvény az 1-ben ahhoz hasonlóan viselkedik, mint az $1/x$ függvény a 0-ban. Megmutatható, hogy

$$\lim_{s\to 1}\left(\zeta(s)-\frac{1}{s-1}\right)=\gamma,$$

ahol a γ állandó nem más, mint az Euler-Mascheroni konstans.

XVI. Megjegyzés
Megmutatható, hogy

$$\zeta(4)=\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots+\frac{1}{n^4}+\ldots=\frac{\pi^4}{90}$$

és általában $\zeta(s)=\pi^s\cdot Q$, ahol *s* páros egész szám, *Q* pedig racionális.

7. (Házi) feladat

Mutassuk meg, hogy a dzeta függvény felírható az alábbi végtelen szorzat formájában (a p_n sorozat a prímszámok sorozata, mindegyik prímet tekintetbe kell venni):

$$\zeta(s)=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{p_1^s}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{p_2^s}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{p_3^s}\right)\cdot\ldots}.$$

A Dzeta-függvény a neten:
Mathworld: http://mathworld.wolfram.com/RiemannZetaFunction.html
Wikipédia: http://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_zeta_function
Tom Apostol verse: http://www.aimath.org/~hughes/poem.html

A Riemann-sejtés a neten:
Wikipédia (magyarul): http://hu.wikipedia.org/wiki/Riemann-sejt%C3%A9s
Mathworld: http://mathworld.wolfram.com/RiemannHypothesis.html
Riemann eredeti cikke: http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Riemann/Zeta/
Clay Intézet: http://www.claymath.org/millennium/Riemann_Hypothesis/

A „nézd és mondd!” sorozat

Ugorjunk a XX. századba, hogy találkozzunk napjaink egy furcsa konstansával!

Írjunk le egy számjegyekből álló sorozatot! Pl.:	13	(2)	
Most írjuk le, amit látunk! 1 darab 1-es és 1 db 3-as. Röviden:	1113	(4)	[2]
Most mit látunk? 3 db 1-es, 1 db 3-as:	3113	(4)	[1]
És így tovább:	132113	(6)	[1.5]
	1113122113	(10)	[1.66666667]
	311311222113	(12)	[1.2]
	13211321312113	(14)	[1.16666667]

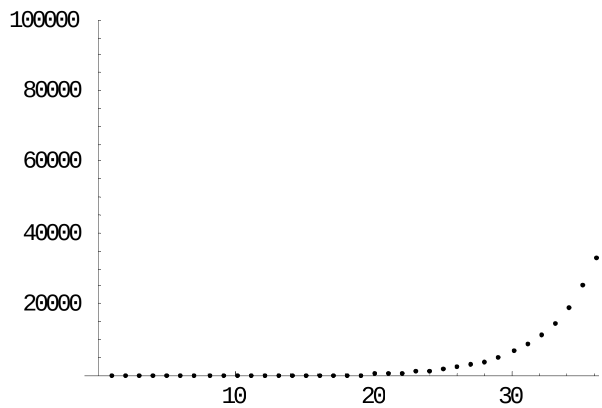
Ezzel a módszerrel tetszőleges számjegysorozatból indulva képezhetünk számjegysorozatot. Az érdekel bennünket, hogy milyen hosszú lehet ez a sorozat, le lehet-e írni a hosszát egyszerű általános képlettel. A fenti példában a sorok mellé, kerek zárójelbe írtuk az aktuális sorozat hosszát, szögletes zárójelbe az egymást követő elemek hányadosát.

Szoftver ajánló:
A http://www.btinternet.com/~se16/js/looknsay.htm weboldalon találhatunk egy sorozatgenerálót, ott lekérhetjük tetszőleges számjegysorozatból kiindulva a sorozat elemeit és azt is leolvashatjuk, hogy mennyi az egymást követő sorozatok hosszának hányadosa. Az alsó, hosszú sorba beírjuk a vizsgálandó sorozatot és a „Look and Write” gombra való ismételt klikkeléssel kapjuk az egymást követő elemeket, feltüntetve hosszukat és az egymást követő elemek hosszának arányát.

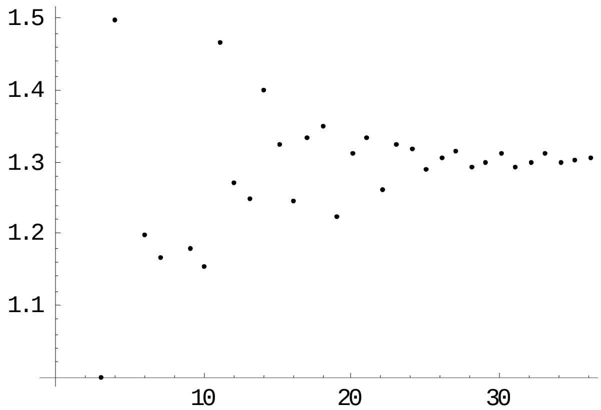
A számítások láthatók, folytathatók az alábbi fájlokban is. Az itt található Maple és Mathematica fájlokban nyomonkövethető a 20. ábra létrehozása is.

program	html	forrás
	http://matek.fazekas.hu/portal/eloadas/2006/pj/compute	
Maple	nezdesmondd_maple.html	nezdesmondd.mws
Mathematica	nezdesmondd_mathematica.html	nezdesmondd.nb
Axiom	nezdesmondd_axiom.html	nezdesmondd.input

Az 13 kezdeti sorozatból indítva 50 léptetés után 1 766 402 hosszúságú sorozatot kapunk, amely az előző sorozat hosszának 1,3030887 –szerese. A programmal játszogatva észrevehetjük, hogy az arány értéke egy idő után már keveset változik.



20. a. ábra
Az 13-ból indított „nézd és mondd” sorozat első 40 elemének hossza



20. b. ábra
Az 13-ból indított „nézd mondd” sorozat egymást követő elemei hosszának aránya

Egy 1986-ban megjelent írásában John Conway megmutatta, hogy ha nem a 22 sorozatból indítjuk a rekurziót, akkor az egymást követő elemek aránya mindig ugyanahhoz a $\lambda \approx 1,303577269$ számhoz tart, tehát az n-edik sorozat hosszát aszimptotikusan a $c\lambda^n$ képlet adja meg (a sorozat hosszának és e kifejezés értékének hányados 1-hez tart, ha n tart a végtelenhez). A c szám ugyan függ a sorozat kezdeti elemétől, de λ nem.

Gondolhatnánk, hogy a λ konstans is transzcendens, de ez tévedés. A λ szám irracionális, de algebrai, a legkisebb olyan racionális együtthatós polinom, amelynek gyöke a λ épp 71-edfokú. Íme:

$$x^{71} - x^{69} - 2x^{68} - x^{67} + 2x^{66} + 2x^{65} + x^{64} - x^{63} - x^{62} - x^{61} - x^{60} - x^{59} + 2x^{58} + 5x^{57} + 3x^{56} - 2x^{55} - 10x^{54} - 3x^{53} - 2x^{52} + 6x^{51} + 6x^{50} + x^{49} + 9x^{48} - 3x^{47} - 7x^{46} - 8x^{45} - 8x^{44} + 10x^{43} + 6x^{42} + 8x^{41} - 5x^{40} - 12x^{39} + 7x^{38} - 7x^{37} + 7x^{36} + x^{35} - 3x^{34} + 10x^{33} + x^{32} - 6x^{31} - 2x^{30} - 10x^{29} - 3x^{28} + 2x^{27} + 9x^{26} - 3x^{25} + 14x^{24} - 8x^{23} - 7x^{21} + 9x^{20} + 3x^{19} - 4x^{18} - 10x^{17} - 7x^{16} + 12x^{15} + 7x^{14} + 2x^{13} - 12x^{12} - 4x^{11} - 2x^{10} + 5x^{9} + x^{7} - 7x^{6} + 7x^{5} - 4x^{4} + 12x^{3} - 6x^{2} + 3x - 6.$$

A Conway konstans ennek a csinos polinomnak a legnagyobb abszolútértékű gyöke.

Ajánló

John Conway eredeti cikke: "The Weird and Wonderful Chemistry of Audioactive Decay" (az *Open Problems in Communication and Computation* kötetben, melynek szerkesztői Thomas M. Cover, B. Gopinath, Springer (December 1987) ISBN: 0-387-96621-8).

http://www.amazon.com/Problems-Communication-Computation-Thomas-Cover/dp/0387966218

Wikipedia a Nézd és mondd sorozatról: http://en.wikipedia.org/wiki/Look-and-say_sequence

Mathworld a Nézd és mondd sorozatról: http://mathworld.wolfram.com/LookandSaySequence.html

Sorozatgenerátor: http://www.btinternet.com/~se16/js/looknsay.htm