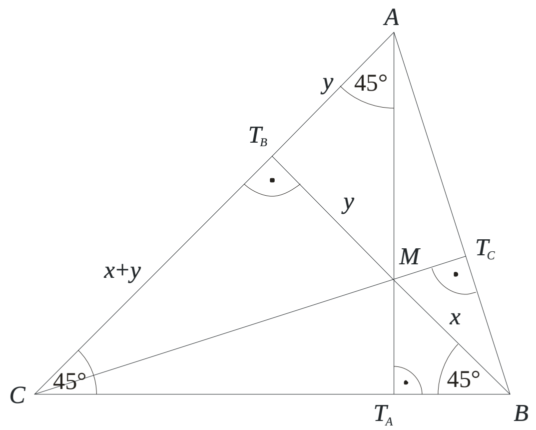
Laczkó László

Ismételjük a geometriát egy feladaton keresztül!

Készült a Fazekas Mihály Oktatási Kulturális és Sport Alapítvány támogatásával
Az ábrák elektronikus változatát Véges Márton (2009c) diák készítette

A feladat

Az ABC hegyesszögű háromszög C-nél levő szöge 45°. M a háromszög magasságpontja. Bizonyítsuk be, hogy $CM = AB$!



Az I., II. és III. megoldás ábrája

I. megoldás

A BM szakasz hossza legyen x, az MT_B szakaszé y. BT_BC háromszög egyenlő szárú, derékszögű. Ezért CT_B hossza $x+y$. Az AT_BM háromszög is egyenlő szárú, derékszögű. Ezért $AT_B=y$. A CMT_B, AT_BB háromszögek egybevágók, mert két-két oldaluk és közbezárt szögük egyenlő. Ezért $AB=CM$.

II. megoldás

$T_BBA\angle = ACM\angle$, mert merőleges szárú hegyesszögek. Az AT_BB, CMT_B háromszögek derékszögűek és még van egy-egy egyenlő szögük, ráadásul a BT_B és CT_B egymásnak megfelelő oldalak egyenlőek (a CBT_B háromszög egyenlő szárú derékszögű) ezért a két háromszög egybevágó. Ebből következik, hogy $CM=AB$.

III. megoldás

Az AC, CB oldalak hosszát jelölje b és a. AT_AC egyenlő szárú derékszögű háromszög, ezért

$CT_A = \dfrac{b}{\sqrt{2}}$, $BT_A = a - \dfrac{b}{\sqrt{2}}$. BT_AM egyenlő szárú derékszögű háromszög, ezért $MT_A = a - \dfrac{b}{\sqrt{2}}$.

Felírjuk a cosinus tételt az ABC háromszögre:

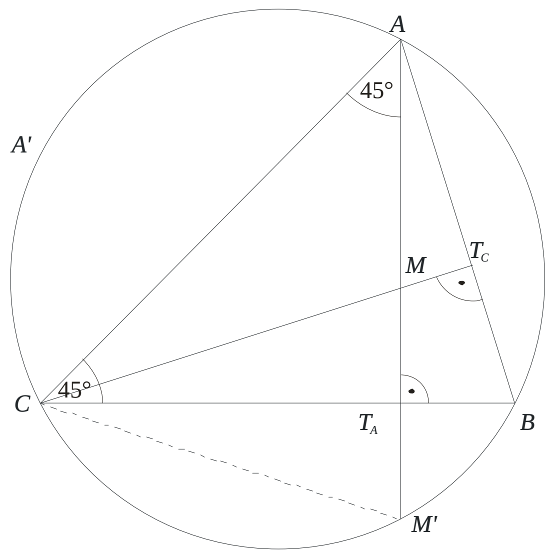
$$(*)\quad AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 45° = a^2 + b^2 - ab\sqrt{2} =$$

$$= \left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(a - \frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2 = CM^2.$$

Az utolsó egyenlőség a CMT_A derékszögű háromszögre felírt Pithagoras tétel. A (*) sor elejére és végére nézve látjuk, hogy már készen vagyunk.

IV. megoldás

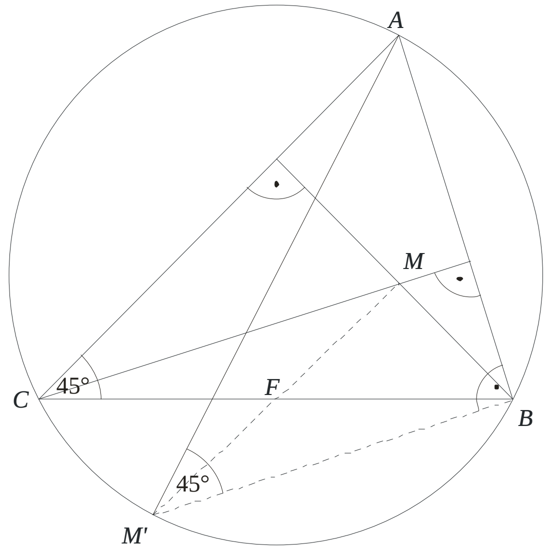
Tükrözzük az M pontot a CB oldalra, a tükörképet M' jelöli. Ismeretes, hogy M' a háromszög köré írt körön van. $CM = CM'$ a tükrözés miatt. $CAM\angle = 45°$. $AB=CM'$, mert mindegyikhez 45°-os kerületi szög tartozik. Így $AB=CM$.



A IV. megoldás ábrája

V. megoldás

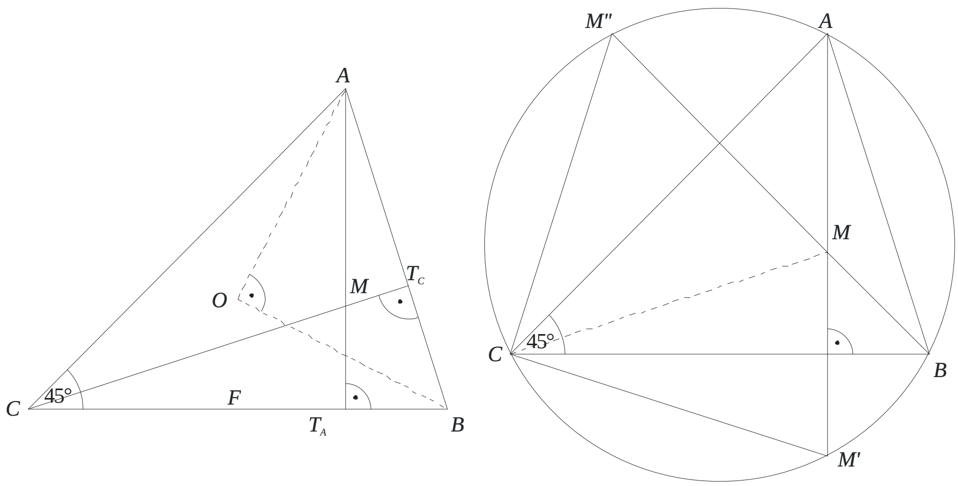
A *CM* szakaszt *CB* oldal felezőpontjára tükrözve kapjuk *BM’*-t. *M’* a körülírt körön van. Tudjuk, hogy *AM’* átmérője a körnek, ezért $M'BA\angle = 90°$. $AM'B\angle = 45°$, mert *AB* ívhez tartozó kerületi szög. *AM’B* egyenlő szárú derékszögű háromszög, ezért *BM’* = *AB*. A tükrözés miatt *CM* = *BM’*, ezért készen vagyunk.



Az V. megoldás ábrája

VI. megoldás

Legyen *O* a háromszög köré írható körének középpontja. Az $\overrightarrow{OM}$ vektort jelölje $\underline{m}$, az $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{CM}$ vektorokat $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$. Felhasználjuk, hogy $\underline{m} = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$. Ebből pld $\underline{d} = \underline{m} - \underline{c} = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c} - \underline{c} = \underline{a} + \underline{b}$. $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$. Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma egyik átlója *AB*, a másik *CM*. A kerületi és középponti szögek tétele miatt $BOA\angle = 90°$. Így az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma négyzet, mert az $\underline{a}$, $\underline{b}$ vektorok hossza a köré írt kör sugarával egyenlő. A négyzet átlói egyenlőek, így *AB* = *CM*.

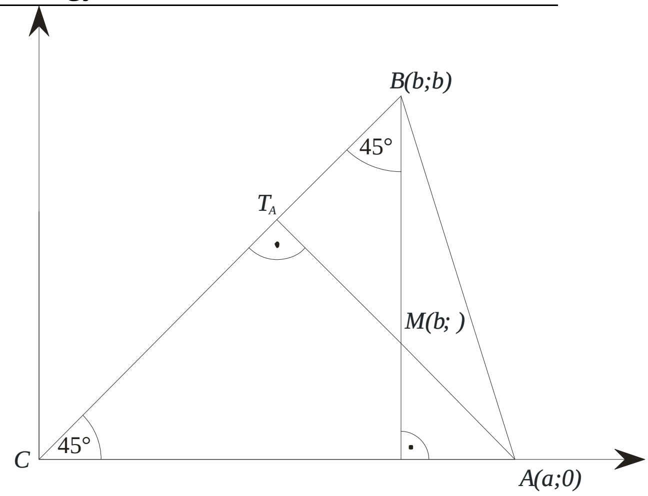


A VI. megoldás és a VII. megoldás ábrája

VII. megoldás

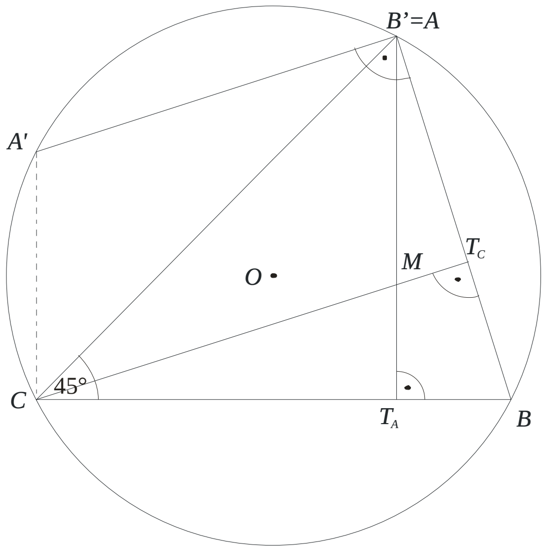
Az *M* pontot *CB*, *CA* egyenesekre tükrözve kapjuk az *M’*, *M”* pontokat, melyek a köré írt körön vannak. $M''CM'\angle$ a tükrözés miatt a $BCA\angle$ duplája, azaz 90°, ezért Thales tétele miatt *M’M”* átmérő. A tükrözés miatt *M’CM”* háromszög egyenlő szárú is. Ha a kör sugara *R*, akkor *M’M”* = 2*R*, és $CM = CM' = R\cdot\sqrt{2}.$ Az *AB* oldalhoz tartozó kerületi szög 45°, ezért $AB = 2R\sin 45° = \sqrt{2}R.$ Így *AB* = *CM*.

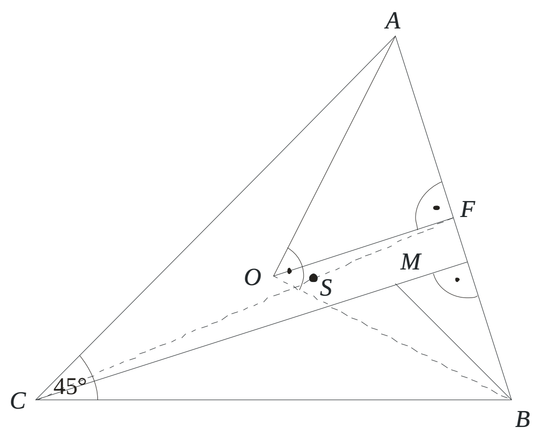
VIII. megoldás
Az *ABC* háromszöget úgy helyezzük el a koordinátarendszerbe, hogy *C* az origóba, *CA* az *x* tengely pozitív részére kerüljön, *B* pont az $y = x$ egyenes első negyedben lévő részén legyen. Koordinátákkal: $B(b;b)$, $A(a;0)$. *CB* egyenes egyenlete $y = x$. *M* pont első koordinátája *b*. *AM* egyenes merőleges *CB*-re, ezért egyenlete $y = a - x$. Az $x = b$ és az $y = a - x$ egyenesek metszéspontja adja az *M* magasságpontot, melynek második koordinátája $(a - b)$ lesz. *A* és *B* pontok távolsága $\sqrt{(a-b)^2+b^2}$, *C* és *M* pontok távolsága $\sqrt{b^2+(a-b)^2}$. Látható, hogy $AB = CM$.



A VIII. megoldás ábrája

IX. megoldás
Tekintsük az *ABC* háromszöget a köré írt körével együtt, melynek középpontja *O*. *AB*-t *O* körül 90°-kal a háromszög körüljárásával ellenkező irányban elforgatjuk. *B* elforgatottja *B'*, *A* elforgatottja *A'* legyen, *B'* egybeesik *A*-val. $BAA'\angle = 90°$ a forgatás miatt, ezért Thales tétel miatt *BA'* átmérő. *CM* párhuzamos *B'A'* egyenessel, mert mindketten *AB*-re merőlegesek. $BCA'\angle$ Thales tétele miatt 90°. *AM* magasság merőleges *BC* egyenesre, ezért *AM* párhuzamos *CA'* egyenessel. A *B'A'CM* négyszög paralelogramma, mert szemközti oldalai párhuzamosak. Így $CM = A'B' = AB$.

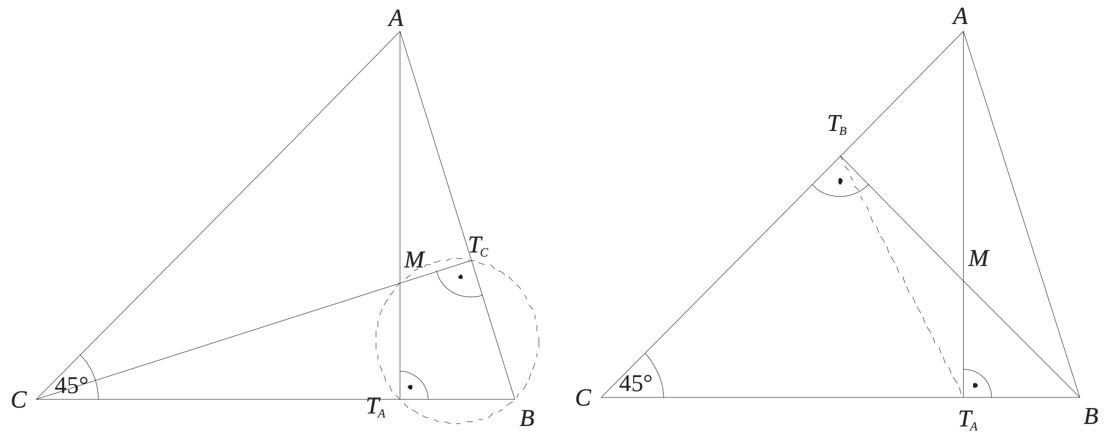




A IX. megoldás és a X. megoldás ábrája

X. megoldás
Legyen *O* a háromszög köré írható kör közepe, *F* az *AB* oldal felezőpontja, *S* a háromszög súlypontja. *M* a háromszög magasságpontja. Kerületi és középponti szögek tétele miatt *AOB* derékszögű háromszög, és egyenlő szárú. $2OF = AB$, mert *OF* az *AB* Thales körének sugara, *AB* pedig az átmérője. Tudjuk, hogy az *S*-re vonatkozó (-2) szeres hasonlóság *FO*-t *CM*-be viszi. Így $CM = 2FO = AB$.

XI. megoldás
A háromszög oldalai a szokásos betűzés szerint *a*, *b*, *c*. CT_AA háromszög egyenlő szárú, derékszögű, ezért $CT_A = AT_A =$ $CT_A = AT_A = \frac{b}{\sqrt{2}}$. BT_AMT_C négyszög húrnégyszög, mert van két szemközti derékszöge. *C* pontnak a húrnégyszög köré írható körére vonatkozó hatványa $CM \cdot CT_C = CT_A \cdot CB = \frac{a \cdot b}{\sqrt{2}} = ab \sin 45° = 2T_{ABC}$, ahol T_{ABC} a háromszög területe. Ebből következik, hogy $CM \cdot CT_C = 2T_{ABC}$ Ezt rendezve $CM = \frac{2T_{ABC}}{CT_C} = \frac{c \cdot CT_C}{CT_C} = c = AB$.

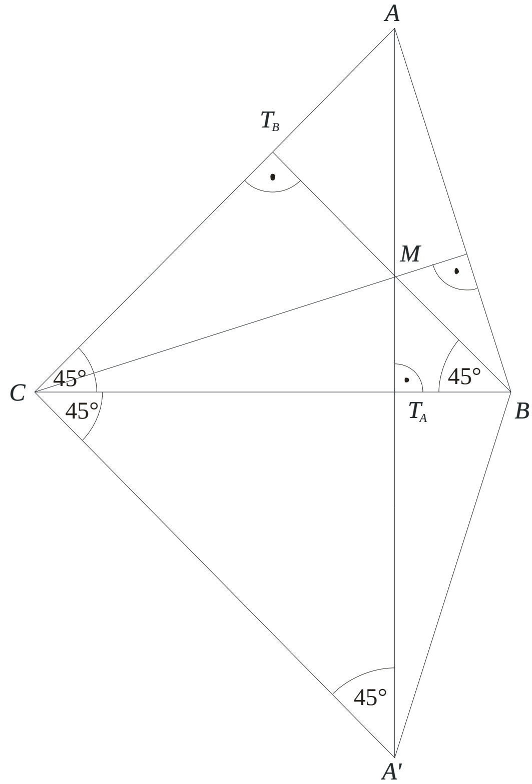


A XI. megoldás és a XII. megoldás ábrája

XII. megoldás
A háromszög jelölései legyenek a szokásosak. *M* legyen a háromszög magasságpontja, T_A az *A* csúcshoz, T_B a *B* csúcshoz tartozó magasság talppontja. CAT_A háromszög és CBT_B háromszög egyenlő szárú és derékszögű. Ebből következik, hogy $CT_A = \frac{b}{\sqrt{2}}$ és $CT_B = \frac{a}{\sqrt{2}}$.
Az ABT_AT_B négyszög húrnégyszög Thales tétel miatt, erre a húrnégyszögre alkalmazzuk Ptolemaiosz tételét: $T_AT_B \cdot AB = AT_A \cdot BT_B - T_BA \cdot T_AB$.
T_AT_B húrhoz a CT_AMT_B húrnégyszög köré írt körében 45°-os kerületi szög tartozik. A kör átmérője *CM*, ezért T_AT_B = CM * sin45° = $T_AT_B = CM \cdot \sin 45° = \frac{CM}{\sqrt{2}}$. Felhasználjuk, hogy $T_BA \cdot T_AB = \left(b - \frac{a}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(a - \frac{b}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3ab}{2} - \frac{a^2}{\sqrt{2}} - \frac{b^2}{\sqrt{2}}$. A megfelelő értékeket beírva a Ptolemaiosz tételbe, a következő egyenlőséget kapjuk: $\frac{CM}{\sqrt{2}} \cdot AB = \frac{a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab}{\sqrt{2}}$.
A jobb oldal számlálója az *ABC* háromszögre vonatkozó cosinus tétel szerint AB^2 – tel egyenlő. Ebből következik, hogy *AB* = *CM*.

XIII. megoldás

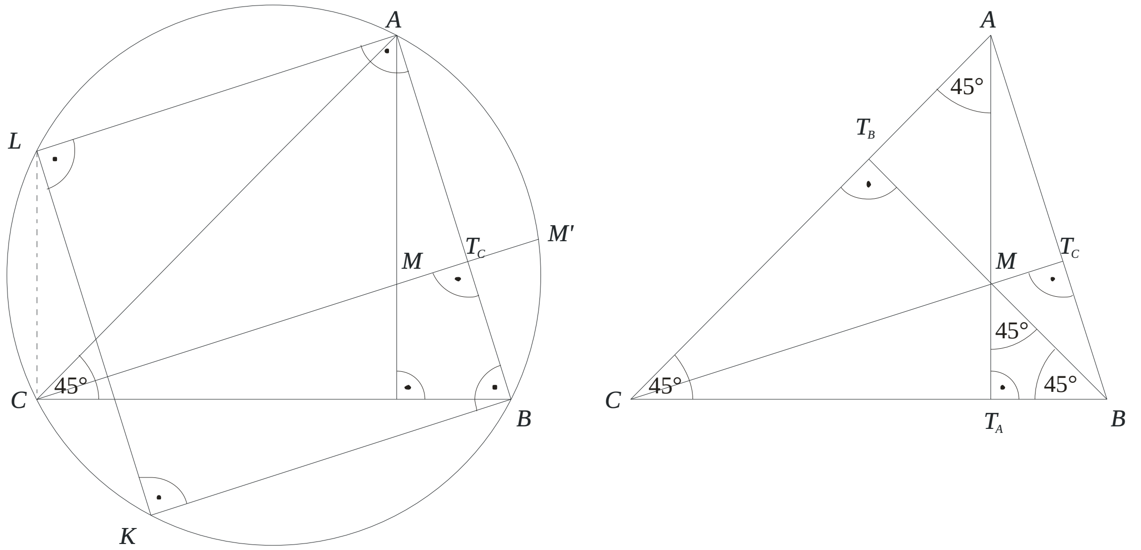
M legyen a háromszög magasságpontja. A *CB* oldalra tükrözzük az *ABC* háromszöget, *A’* legyen *A* tükörképe. $CAT_A\angle$ és a tükörképe, $CA'T_A\angle$ is 45°, sőt $CBT_B\angle$ is annyi. Ezért *CM* szakasz 45°-os látókörén van *B* és *A’*. $A'CA\angle=90$ ° a tükrözés miatt, ezért *BM* szakasz párhuzamos *A’C* szakasszal, így *CMBA’* húrtrapéz, melynek szárai *CM* és *A’B* egyenlőek. Ezért *AB* = *CM*.



A XIII. megoldás ábrája

XIV. megoldás

Tekintsük *ABC* háromszöget a köré írt körével együtt *AB* húrhoz 45° kerületi szög tartozik, ezért *AB* a körbe írt négyzet oldalával egyenlő. Rajzoljuk be az *ABKL* négyzetet! A *C*-ből induló magasság *LK* oldalt *T*-ben, *AB* oldalt T_C-ben a köré írt kört *M’*-ben metszi. *M’* az *M* magasságpont *AB* oldalra tükrözött képe. A tükrözés és a szimmetriák miatt $CT = T_C M' = MT_C$. Az egyenlő szakaszokból következik, hogy *CM* = *KB* = *AB*.



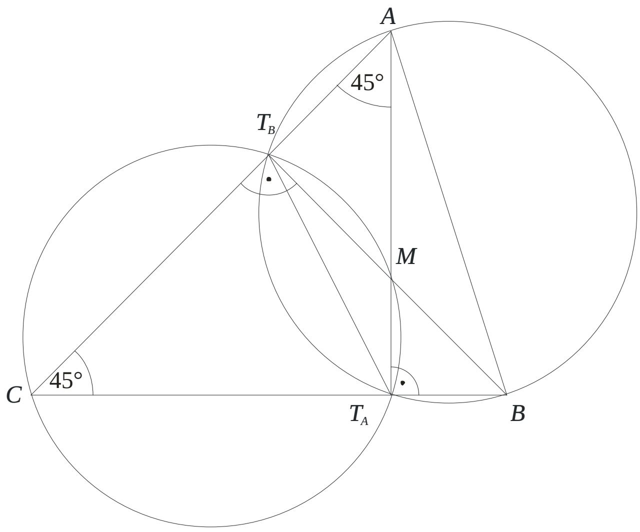
A XIV. megoldás és a XV. megoldás ábrája

XV. megoldás

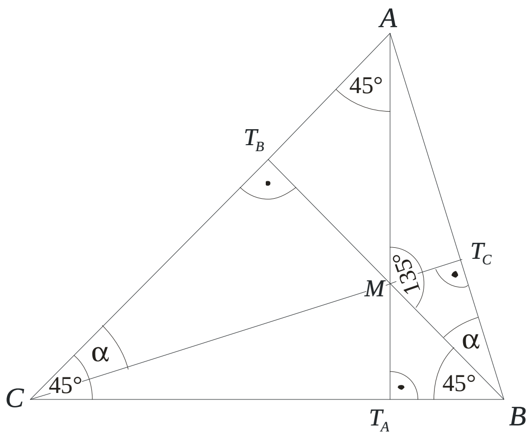
M legyen a háromszög magasságpontja, $CAT_A\angle = CBT_B\angle = BMT_A\angle = 45°$. Két szakasz egyenlőségéhez elég megmutatni azt, hogy van olyan pont, ami körül az egyiket a másikba 90°-kal tudjuk forgatni. Ez jelen esetben a T_A pont, ezért *CA* = *AB*.

XVI. megoldás
M legyen a háromszög magasságpontja, T_A az *A* csúcshoz tartozó magasság, T_B a *B*-hez tartozó magasság csúcspontja. $CAT_A\angle = 45°$. AT_BT_AB négyszög és CT_AMT_B négyszög is húrnégyszög Thales tétele miatt. Az első körnek *AB*, a másodiknak *CM* az átmérője. T_BT_A szakasz a két kör közös húrja, melyhez mindkét körben 45°-os kerületi szög tartozik. Ezért a két kör átmérője *AB* illetve *CM* is egyenlők.

XVII. megoldás
M legyen a háromszög magasságpontja, T_A az *A* csúcshoz tartozó magasság, T_B a *B*-hez tartozó magasság talppontja. $CAT_A\angle = 45°$. AT_BT_AB négyszög húrnégyszög, CT_AMT_B négyszög húrnégyszög Thales tétele miatt. Az első körnek *AB*, a másodiknak *CM* az átmérője. $T_BT_AA\angle$ a T_BM húr és a T_BA húr kerületi szöge az egyik, illetve a másik körben. $T_BAM\angle = T_BMA\angle = 45°$, ezért $T_BA = T_BM$. Egyenlő szakaszok ugyanolyan szögű látóköreinek átmérői egyenlők, ezért $AB = CM$.



A XVI., XVII. megoldások ábrája



A XVIII. megoldás ábrája

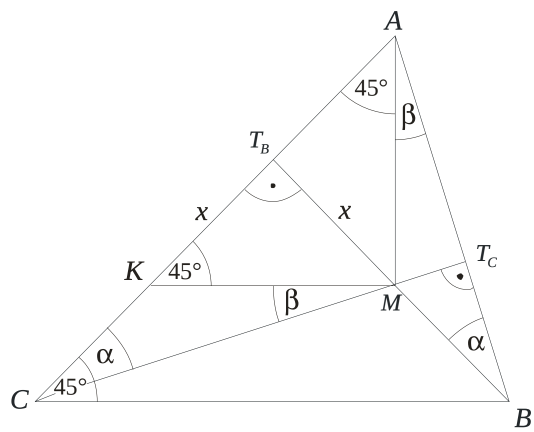
XVIII. megoldás
M jelöli a magasságpontot, T_A, T_B, T_C a magasságvonalak talppontjait. A *CMA*, *BMA* háromszögeknek az *A*-nál fekvő közös szögükön kívül van még egy-egy derékszöge, így a harmadik szögük is egyenlő:

$$ACM\angle = ABM\angle = \alpha.$$

Az $AMB\angle$ az AMT_B háromszög külső szöge, így 135°. Írjunk fel két szinusz-tételt:

$$\left.\begin{aligned} CMA\Delta: &\quad \frac{\sin\alpha}{\sin 45^0} = \frac{AM}{CM} \\ BMA\Delta: &\quad \frac{\sin\alpha}{\sin 135^0} = \frac{AM}{AB} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad AB = CM.$$

XIX. megoldás
Húzzuk meg az *MK* párhuzamost a magasságponton át a *BC* oldallal. Az *MKC*, *AMB* háromszögek hasonlók, mert szögeik egyenlők: az $KMC\angle$, $MAB\angle$ szögpár és a $KCM\angle$, $MBA\angle$ szögpár is merőleges szárú. A *KMA* háromszög szögei alapján egyenlő szárú derékszögű háromszög, azaz $KM = MA$. Ezért az *MKC*, *AMB* háromszögek egybevágóak: $CM = AM$.



A XIX. megoldás ábrája

A XVIII., XIX. megoldások a törökbálinti Bálint Márton Ált. és Középiskola diákjaitól, Kiss Gabriellától, ill. Vágó Lajostól, Szomju László tanítványaitól származnak.