Moussong Gábor
A Poincaré-sejtés

Készítette Balambér Dávid, Bohus Péter, Hraskó András, Moussong Gábor

1. A Poincaré-sejtés aktualitása 2006-ban

A Fields-érem

2006. augusztusában a Nemzetközi Matematikai Unió (IMU) Grigorij Perelmannak ítélte az egyik Fields-érmet olyan kutatási eredményekért, amelyek többek között a Poincaré-sejtés megoldásához vezettek el. Ez az egyik legjelentősebb matematikai kitüntetés, sokan a Nobel-díj megfelelőjének tartják. A díjat 40 évnél idősebbek nem kaphatják meg, mert a kiírók a jutalmat elsősorban a további kutatások ösztönzésére szánják. A nyerteseket négyévente hirdetik ki és egyszerre legfeljebb négyen kaphatják meg az érmet. Idén olyasmi történt, ami korábban még sosem: Grigorij Perelman nem vette át a kitüntetést.

Az orosz matematikus bizonyítása egyébként még nem jelent meg nyomtatásban; Perelman csak közölte saját „kéziratait” az interneten, melyekből kirajzolódott William Thurston geometrizációs sejtésének bizonyítása. A Poincaré-sejtés a geometrizációs sejtés speciális esetének tekinthető.

A bizonyítás értékét az is jelzi, hogy egy princetoni magánalapítvány, a Clay Matematikai Intézet által 1999-ben kijelölt 7 probléma, az úgynevezett „Millenniumi problémák” egyike volt a Poincaré-sejtés. Minden egyes kihirdetett probléma megoldásáért az intézet egymillió dollárt ajánlott fel. Még kérdés, hogy odaítéli-e Perelmannak a Clay Intézet kuratóriuma a díjat, és ha igen, akkor Perelman vajon azt is visszautasítja-e.

Grigorij Perelman

Az előadásban a továbbiakban a matematikai tartalomra fektetjük a hangsúlyt, a az aktuális történeti érdekességek tekintetében az alábbi olvasnivalót ajánljuk.

Ajánló

A Nemzetközi Matematikai Unió (IMU) honlapja:
http://www.mathunion.org/

A Fields-érem 2006. évi díjazottjai:
http://www.mathunion.org/medals/2006/

Sylvia Nasar és David Gruber: Manifold destiny - A legendary problem and the battle over who solved it. *The New Yorker, Annals of Mathematics*
http://www.newyorker.com/fact/content/articles/060828fa_fact2

Az egymillió dolláros díjat felajánló Clay Matematikai Intézet oldala a Poincaré-sejtésről:
http://www.claymath.org/millennium/Poincare_Conjecture/

A Népszabadság, 2006. augusztus 24-ei híre: Perelmant nem érdekli a Fields-érem.
http://www.nol.hu/cikk/414928

Grigorij Perelmanról:
http://hu.wikipedia.org/wiki/Grigorij_Perelman

2. A geometriától a topológiáig

Henri Poincaré francia matematikus alkotta meg a geometria egyik ágaként a *topológia* nevű tudományt. Tisztázzuk először is, nagy általánosságban mi is a *geometria*. Erős leegyszerűsítéssel azt mondhatjuk, hogy a geometria térbeli alakzatok (esetleg magasabb dimenziós térben fekvő ponthalmazok) tulajdonságaival és viszonyaival foglalkozó tudomány. Az alakzatok legfontosabb geometriai jellemzői a mértékviszonyok, szakszóval az úgynevezett metrikus invariánsok (pl. távolság, szög, terület, stb.). A metrikus geometria akkor tekint két alakzatot egyformának, ha *egybevágók*, azaz olyan transzformációval feleltethetők meg egymásnak, amely a mértékviszonyokat nem változtatja meg. Például háromszögek egybevágósága esetén megfelelő oldalaik hossza és szögeik is megegyeznek.

Ha az egybevágóság feltételét gyengítjük, eljuthatunk a hasonlóság fogalmához, ami szögtartó, de már nem feltétlenül távolságtartó megfeleltetés. Ismeretesek olyan geometriai transzformációk (pl. affinitások, projektivitások), amelyek még kevesebbet követelnek meg ahhoz, hogy két idomot egyformának tekintsünk. Az affin geometria szemszögéből például már bármely két háromszög egyformának minősül. Itt a mértékviszonyok nem geometriai invariánsok, de a vizsgált transzformációk legalább egyenestartók.

A topológia nemcsak hogy a mértékviszonyokkal nem törődik, tehát se távolságot, se szöget nem tartó transzformációk is megengedhetők benne, hanem még az egyenes vonalak, sík felületek is tetszőlegesen elgörbíthetők. Ezért a topológiát „gumigeometriának" is szokták hívni.

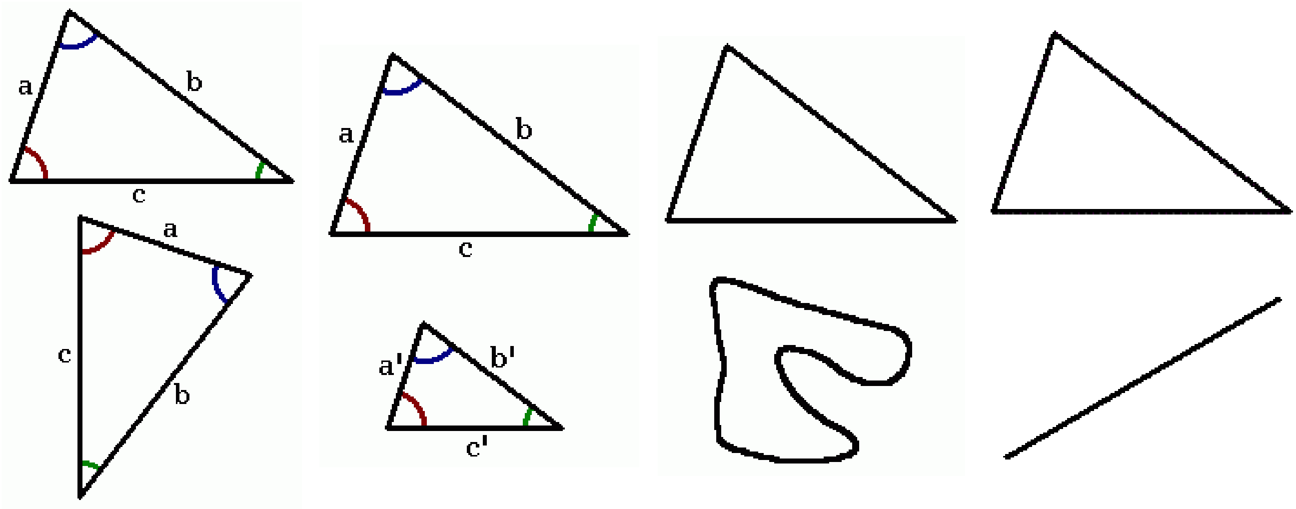
A topológiában az idomokat *topologikus ekvivalencia* (vagy topológiai egyenlőség) erejéig különböztetjük meg: két alakzat akkor topologikusan ekvivalens (más szóval *homeomorf*), ha olyan kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van közöttük, amely folytonos mindkét irányban. Például bármely két sokszöglemez homeomorf egymással, tekintet nélkül az oldalszámukra. Sőt, mindannyian homeomorfak egy körlappal is. Érezhető, hogy két idom topologikusan ekvivalens, ha egymásba deformálhatók oly módon, hogy szabadon nyújthatjuk és hajlíthatjuk őket, de szakítást és ragasztást nem végezhetünk rajtuk. Például a borosüveg és a tányér homeomorf, ugyanis, ha agyagból lenne, akkor a fazekas az egyik alakzatból (a borosüvegből) fazekaskorongja segítségével elő tudná állítani a másikat (a tányért).

A modern matematikát, a különféle matematikai struktúrák elméletét a rendteremtés szándéka hatja át. A vizsgált objektumokról teljes áttekintést, osztályozást szeretnénk látni. Elvben annál könnyebb az osztályozás kérdése, minél több objektumot tekintünk egyformának. Ezért kecsegtet eredménnyel, ha a geometria tárgyait csupán topológiai egyenlőség erejéig kívánjuk osztályozni. A topológiai osztályozás várhatóan jóval egyszerűbb, mint a geometriai: például sokszögből geometriai szempontból (még akár az affin geometria szempontjából is) végtelen sokféle van, míg topológiailag csak egy.

Ennek az egyszerűsödésnek viszont ára van: jóval nehezebbé válik annak szabatos eldöntése, hogy két alakzat nem homeomorf egymással. Ilyen fajta következtetések levonásához ún. *topologikus invariáns*okat lehet használni. Alakzatok egy jellemzőjét topologikus invariánsnak mondjuk, ha valahányszor két homeomorf idom egyikére érvényes, szükségképpen a másikra is. Szemléletesen könnyen befogadható topologikus invariáns az összefüggőség: ha egy idom összefüggő, azaz egy darabból áll, akkor nem lehet homeomorf egy olyan idommal, amely nem összefüggő, azaz egynél több darabból áll. Általában nem könnyű topologikus invariánsokat találni.

Nagy vonalakban, leegyszerűsítve azt is mondhatjuk, hogy a topológia tudománya a topologikus invariánsok felderítéséből és vizsgálatából áll.

Az összes elképzelhető alakzat topológiai osztályozása (azaz teljes és áttekinthető lista készítése róluk) lehetetlenül nagy feladat. Ezért csak bizonyos tulajdonságú, speciális idomokra szorítkozva lehet reményteli a topológiai osztályozás kérdése. Ilyen speciális idomokról, mégpedig a felületekről és magasabb dimenziós általánosításaikról szól a következő két szakasz, és ehhez a témakörhöz tartozik a nevezetes Poincaré-sejtés is.



Két egybevágó alakzat — Két hasonló alakzat — Két homeomorf alakzat — Két nem homeomorf alakzat

1. ábra

Ajánló
A skóciai St. Andrews Egyetem McTutor Matematikatörténeti Archívuma a topológia történetéről:
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/%7Ehistory/HistTopics/Topology_in_mathematics.html
A Mathworld weblexikon
a topológia fogalmáról: http://mathworld.wolfram.com/Topology.html
a homeomorfizmus fogalmáról: http://mathworld.wolfram.com/Homeomorphic.html

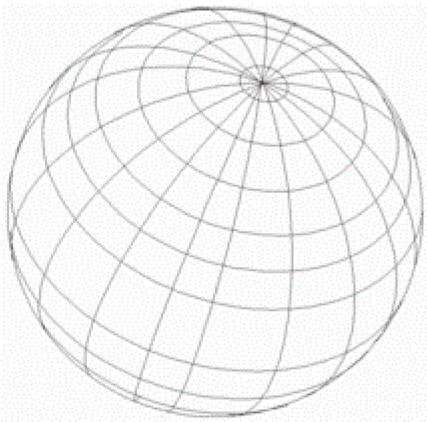
3. Felületek a topológiában

A felületek egyszerű, és ugyanakkor talán a legszebb példák olyan alakzatokra, amelyeket érdemes topológiai nézőpontból vizsgálni. Mit is értünk felületen? Kézenfekvő egy háromdimenziós térben fekvő test határára, azaz a testet határoló ponthalmazra gondolni, mint felületre. Például felület a tömör golyó határa, azaz a gömbfelület, vagy felület egy kocka határa is, ami hat négyzetlap egyesítéseként áll elő. Viszont az absztrakt matematika számára a felület fogalmának olyan fajta értelmezése hasznosabb, amelyben elvonatkoztatunk a befoglaló tértől, és csupán a vizsgált ponthalmaz tulajdonságai, méghozzá lokális (azaz kis méretekben ellenőrizhető) tulajdonságai alapján döntjük el, hogy felület-e. Azt mondjuk, hogy egy ponthalmaz *felület*, ha bármely pontjának elég kis környezetében a sík egy kis darabjával homeomorf. Ilyen módon felület például maga a sík, de felület egy (végtelen hosszú) hengerpalást, vagy egy nyílt (azaz határvonalától megfosztott) körlemez, és persze felületek mind a térbeli testek határai is. Miután a felület definíciójában a síkot, azaz egy kétdimenziós alakzatot használtunk prototípusként, a felületeket topológiai értelemben kétdimenziós alakzatoknak tekintjük.

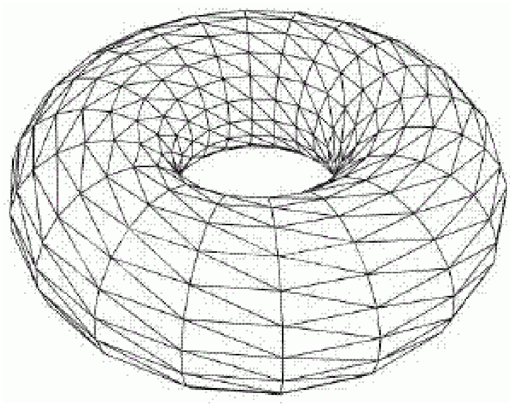
Ugyanígy lehet kettő helyett tetszőleges más dimenzióban is értelmezni a felület megfelelőjét: így jutunk el a *topologikus sokaság* fogalmához. Az egyenes egydimenziós, a sík kétdimenziós, a tér háromdimenziós alakzat. Ha egy idom bármely pontjának alkalmas környezetében olyan, mint az egyenes egy darabja (azaz a pontnak az alakzatban vett kis környezete homeomorf az egyenes egy nyílt intervallumával), akkor azt mondjuk, hogy ez az alakzat egydimenziós topologikus sokaság. Ha az alakzat minden pontjának környezetében olyan, mint a síkbeli pontok környezete, azaz mint egy körlap belseje, akkor az alakzatot kétdimenziós topologikus sokaságnak nevezzük, stb. Így beszélhetünk n-dimenziós sokaságról is, amely ezek szerint minden pontjának kis környezetében olyan, mint az n-dimenziós euklideszi tér (azaz az n valós számmal koordinátázható tér) pontjainak környezete. A felületek tehát pontosan a kétdimenziós sokaságok.

A kör például egydimenziós sokaság, a gömbfelület kétdimenziós, a 8-as szám (mint síkbeli ponthalmaz) pedig nem sokaság, mert abban a pontban, ahol elmetszi önmagát, semmilyen euklideszi térhez nem hasonlít (ottani kis környezete *két* metsző egyenes egy részletével homeomorf). A zárt körlemez vagy a tömör gömb (azaz a körvonal, illetve gömbfelület a belsejével együtt) sem sokaság, mert ugyan belső pontjainak van a sík, illetve a tér egy darabjával homeomorf környezete, de határpontjainak nincs. (A határpontoknak van viszont félsíkkal, illetve féltérrel homeomorf környezete, ezért ezeket az idomokat *határolt* sokaságoknak is mondják).

Egydimenziós sokaságból topologikus ekvivalencia erejéig csak kettő van: a számegyenes és a körvonal; minden egydimenziós sokaság e kettő valamelyikével homeomorf. Fel lehet-e sorolni, lehet-e valamiképpen osztályozni a magasabb dimenziójú sokaságokat is? Egynél magasabb dimenzióban a sokaságok nagyon sokan vannak, kénytelenek vagyunk egy speciális típusra, a *zárt*nak nevezett sokaságokra szűkíteni figyelmünket. Zártnak mondunk egy topologikus sokaságot, ha (alkalmas, elegendően magas dimenziójú térben) korlátos és zárt halmazként jeleníthető meg. Ez annyit jelent, hogy az alakzat nem nyúlhat a végtelenbe, és önmagába visszatérve záródik le. Például az egydimenziósak közül a körvonal zárt sokaság, az egyenes nem.



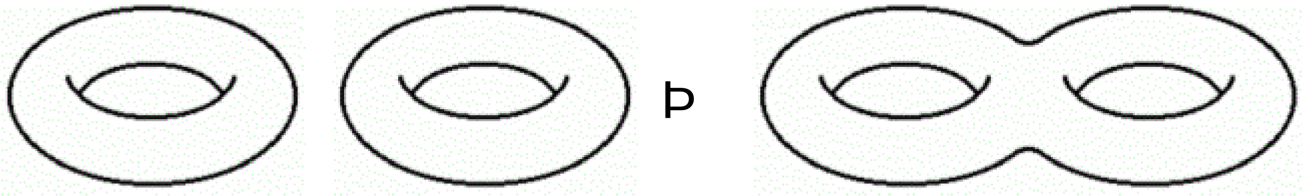
Gömbfelület



Tóruszfelület

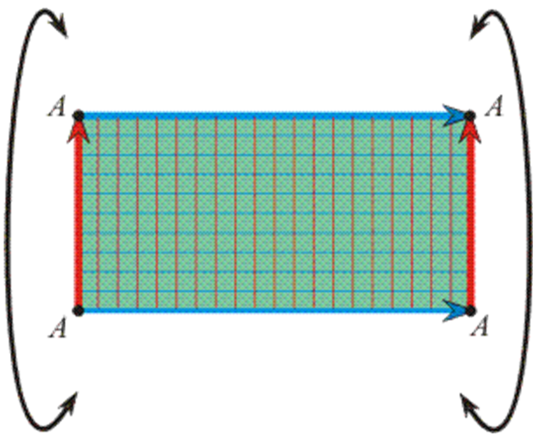
2. ábra

A zárt felületek világát már a 19. században jól feltérképezték. A topológia egyik legszebb klasszikus tétele a zárt felületek topológiai osztályozásáról szól: megadja páronként nem homeomorf zárt felületeknek egy listáját úgy, hogy bármely összefüggő kétdimenziós zárt sokaság homeomorf a lista valamelyik elemével. A lista a gömbfelülettel kezdődik (ezzel homeomorf például a kocka felülete, vagy bármely háromdimenziós térbeli korlátos konvex test határa is), majd következik a *tórusz*felület (amelyet a gyűrűsfánk felülete vagy egy úszógumi szemléltethet), majd a kengyelfelület, melyet két tórusz összekapcsolása eredményez, és ezeket követik a több tórusz összekapcsolásából létrejövő felületek, melyek végtelen sorozatba rendeződnek. Ez még csak a fele a teljes listának, az ún. irányítható felületek listája; még egy végtelen sorozatot alkotnak a nem irányítható felületek, amelyek közül az alábbi példák között előforduló Klein-kancsó talán a legismertebb.

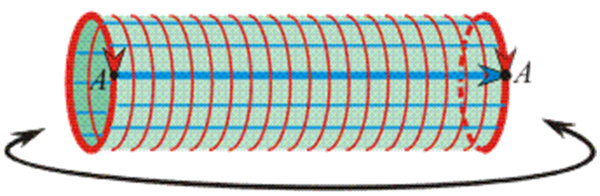


3. ábra: Két tóruszból kengyelfelület

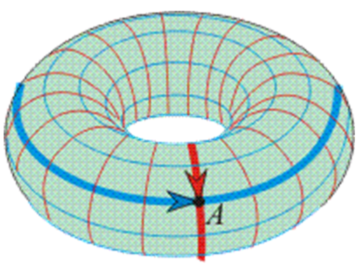
Tóruszt úgy állíthatunk elő, hogy egy téglalap szemközti oldalait az ábra szerint összeragasztjuk egymással. Ha először csak két szemközti oldalt ragasztunk össze, akkor hengerpalástot kapunk, majd a két határoló kört értelemszerűen összeillesztjük. Ilyenkor a henger széleit alkotó körök úgy ragadnak össze, hogy rajtuk az eredetileg felvett irányok megegyeznek.



A téglalap szemközti oldalainak azonosítása.

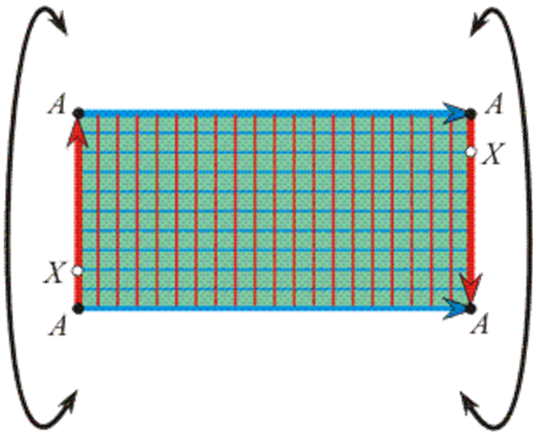


Az első ragasztás után hengert látunk.

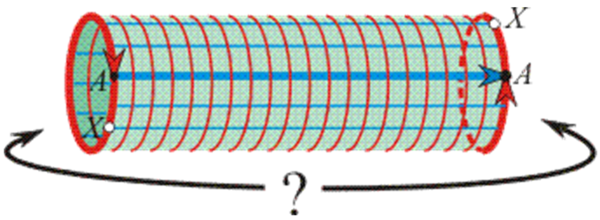


4. ábra. A második ragasztás után kész a tórusz.

A téglalap egyik szemköztes oldalpárját most fordítva szeretnénk azonosítani. A hengert ugyanúgy elkészíthetjük, mint az előbb, de utána a két határoló kör nyilaknak megfelelő összeragasztása háromdimenziós terünkben nehézséget okoz.



Ha az egyik oldalpárt fordítva azonosítjuk, akkor Klein-kancsó lesz az eredmény



Az első ragasztás most is hengerpalástot eredményez, de a körök összeragasztása bajos.

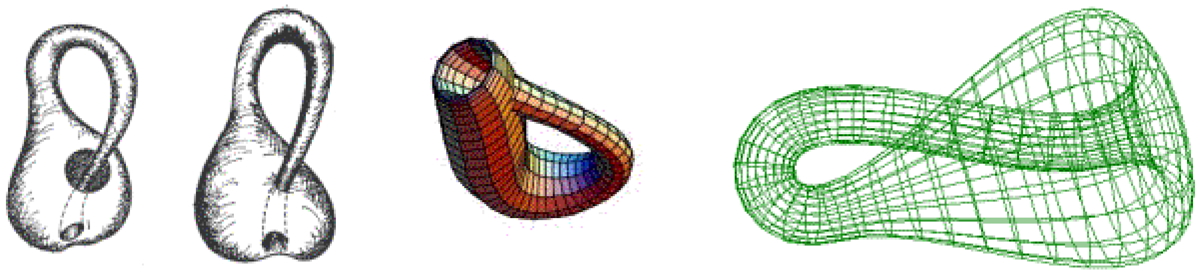
5. ábra

Háromféleképpen is túljuthatunk a nehézségen:

1. Nem is készítjük el az alakzatot, csak a téglalapot tekintjük, mint egy absztrakt topologikus tér térképét. Azt gondoljuk, hogy ha az egyik oldalon kimegyünk valahol a téglalapról, akkor a szemben fekvő azonosításnak megfelelő pontjában (pl. X és X az 5. ábrán) kell bejönni. Anélkül, hogy a valóságos térben létezne ez az alakzat, le tudjuk írni, mint önmagában létező topologikus alakzatot.

2. Megmutatható, hogy a négydimenziós térben elvégezhető az irányoknak megfelelő összeragasztás (önátmetszés nélkül).

3. Háromdimenziós terünkben a felület önátmetszésével valósítható meg az összeragasztás. A körvonal mentén történő önátmetszést alkotó pontokra most úgy kell gondolnunk, hogy ott a körvonal minden pontja helyett igazából két pont van, csak ügyetlen a „háromdimenziós rajz”. Ismerős jelenség: az egymás fölött haladó autópályák is metszik egymást kétdimenziós térképeinken, de a valóságban nem.



A Klein-kancsó különböző ábrákon

6. ábra

Megjegyezzük, hogy ha az 5. ábra téglalapján először a jobbra és balra található (piros) oldalakat ragasztjuk össze, akkor a nevezetes Möbius-szalagot kapjuk. A Möbius-szalag határolt kétdimenziós sokaság. A „szemközti” határpontok összeragasztásával kapjuk a Möbius-szalagból a Klein-kancsót, ami már igazi kétdimenziós sokaság.

Ajánló

Zbigniew Fiedorowicz, az Ohio Állami Egyetem matematikaprofesszorának oldala a zárt felületek osztályozásáról:

http://www.math.ohio-state.edu/~fiedorow/math655/classification.html
Felületek, osztályozási tétel a Wikipédián:
http://en.wikipedia.org/wiki/Surface
Ördög Rafael topológiával kapcsolatos animációi laikusok számára: http://www.cs.elte.hu/~devill/top.html
Szilassi Lajos: A Möbius-szalag és a Klein-kancsó:
http://www.jgytf.u-szeged.hu/tanszek/matematika/situs/index.html
Tórusszal és Klein-kancsóval kapcsolatos angol nyelvű oldalak:
http://www.math.cornell.edu/~mec/2003-2004/geometry/torii/torii.html
http://www.gap-system.org/~john/MT4521/Lectures/L22.html

Az osztályozási listában az irányítható felületek közé pontosan azok a felületek tartoznak, amelyek előállíthatók a háromdimenziós térben fekvő valamilyen összefüggő, korlátos test határaként. Azt, hogy a sorozatban hányadik helyet foglalják el, az dönti el, hogy hány „lyuk” van rajtuk (annyi, ahány tórusz összekapcsolása eredményezi őket). Ezt a számot szokás a szóban forgó felület nemének nevezni. A gömbfelület tehát 0 nemű, a tórusz 1 nemű, a kengyelfelület 2 nemű felület.

Alapvető fontosságú kérdés, hogyan lehet valamely felület nemét meghatározni. Szorítkozzunk a kérdés legegyszerűbb speciális esetére: hogyan lehet felismerni, hogy valamely összefüggő zárt felület 0 nemű, azaz a gömbfelülettel homeomorf? A gömbfelületnek megvan az a topológiai tulajdonsága, hogy bármilyen zárt görbét (körvonallal homeomorf részhalmazt, vagy akár önmagát akárhányszor átmetsző hurkot) rajzolunk is a felületére, azt folytonosan össze lehet húzni egyetlen ponttá a felületben mozogva. Ezt a tulajdonságot úgy nevezzük, hogy a szóban forgó idom *egyszeresen összefüggő*. Az egyszeres összefüggőség gyakran használt, nevezetes topológiai invariáns. Nem nehéz belátni, hogy semelyik, a gömbfelülettől különböző zárt összefüggő felület sem ilyen: mindegyikükön léteznek nem összehúzható hurkok. Érvényes tehát a gömbfelület alábbi jellemzése a zárt felületek körében: egy zárt felület akkor és csak akkor homeomorf a gömbfelülettel, ha egyszeresen összefüggő.

4. Háromdimenziós sokaságok és a Poincaré-sejtés

A háromdimenziós topologikus sokaságokat úgy képzelhetjük el, mint a valóságos világ lehetséges modelljeit. Valóban, a minket befoglaló tér topológiai szerkezetéről csak korlátozott mértékben, bizonyos távolságokon belül vagyunk képesek ismereteket szerezni, és ezek alapján nem tudunk többet, mint azt, hogy a tér bármely (eddig megvizsgált) pontjának környezetében olyan, mint a háromdimenziós matematikai koordinátatér. A tapasztalati tények tehát amellett szólnak, hogy fizikai világunk háromdimenziós sokaság. Ennek a sokaságnak a globális szerkezetéről azonban semmilyen konkrét információnk nincsen, e tekintetben csak fantáziánkra hagyatkozhatunk. Elképzelhető akár az is, hogy a Világegyetem véges kiterjedésű, és önmagába visszatérő, zárt sokaságot alkot. Lehetséges, hogy ha a Földről kilőnénk valamilyen irányban egy nagyon nagy sebességű rakétát, akkor az anélkül, hogy útirányától eltérülne, visszatérne az ellenkező irányból. Ennek a jelenségnek az eggyel alacsonyabb dimenziójú változata, nevezetesen az, hogy a Föld felszínén egyenes irányban haladva előbb-utóbb visszaérkezünk a kiindulópontba, manapság egyáltalán nem meglepő. Hajdanán, amikor a Föld geometriájával kapcsolatban az emberiség még globális tapasztalatokat nem tudott szerezni, csak annyi volt tudható, hogy a földfelszín, beleértve az óceánokat is, (mai absztrakt matematikai nyelven fogalmazva) valamilyen kétdimenziós sokaság. Az, hogy ez a sokaság gömbfelület, csak jóval később vált bizonyossá. Lehet, hogy hasonló helyzetben vagyunk ma is a minket befoglaló térrel kapcsolatban: annak tényleges alakjáról jelenleg csak spekulációkba bocsátkozhatunk.

Ajánló

Jeffrey R. Weeks A tér alakja című könyve

Szilassi Lajos recenziója: http://www.sulinet.hu/tart/fcikk/Kca/0/14861/1

A kiadó honlapján: http://www.typotex.hu/book/m_0072.htm

Milyenek lehetnek egyáltalán a háromdimenziós topologikus sokaságok? Maga a háromdimenziós tér természetesen példa háromdimenziós sokaságra, de a bonyolultabb példák, például a háromdimenziós zárt sokaságok szemléltetésével jóval nagyobb gondban vagyunk, mint a felületek esetében, hiszen látványszerű megjelenítésükhöz háromnál magasabb dimenzió volna szükséges. Lássunk két egyszerű példát ezekre. Az első a háromdimenziós gömbfelület, amelyet úgy kell elképzelnünk, mint a négydimenziós koordinátatérben fekvő négydimenziós golyó határát. Az egyszerűség kedvéért a háromdimenziós gömbfelületet a továbbiakban az S^3 jellel jelöljük. (A matematikusok a körvonalra általában az S^1, a közönséges gömbfelületre az S^2 jelet használják; látható, hogy a felső index itt nem hatványkitevő, hanem a dimenziót jelöli.) A második példa a háromdimenziós tórusz, amelyet a tóruszfelület mintájára téglatestből tudunk elkészíteni a szemközti lapok (gondolatban történő) összeragasztásával. Hasonló ügyeskedéssel bonyolultabb poliéderekből a lapok bonyolultabb recept szerinti összeragasztásával rengeteg további példa konstruálható. A matematikusok számos olyan, haladó algebrai és számelméleti jellegű eszközöket igénylő konstrukciót is ismernek, amelyek háromdimenziós sokaságok hihetetlenül gazdag tárházához vezetnek. Olyan bőségben sorakoznak a háromdimenziós sokaságok, hogy osztályozásuk, még ha csupán a zárt sokaságokra szorítkozunk is, mai ismereteink szerint reménytelenül nehéz feladat.

Kézenfekvő a kérdés, hogy legalább az osztályozás kezdő lépését meg tudjuk-e tenni, van-e jól használható felismerési kritérium a legegyszerűbb zárt háromdimenziós sokaság, az S^3 gömbfelület számára? Nem nehéz belátni, hogy S^3 egyszeresen összefüggő (sőt, a magasabb dimenziójú gömbfelületek is mind azok).

Poincaré vetette föl még 1904-ben, hogy ez a tulajdonság vajon jellemzi-e S^3-at a zárt háromdimenziós sokaságok körében. Úgy gondolta (és olyan sejtésként tálalta, amit várhatóan nehéz lesz majd bebizonyítani), hogy a kétdimenziós esethez hasonlóan érvényes, hogy bármely egyszeresen összefüggő háromdimenziós zárt sokaság homeomorf S^3-mal.

Ajánló

HenriPoincaréról:

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/%7Ehistory/Biographies/Poincare.html

http://en.wikipedia.org/wiki/Henri_Poincare

A Mathworld enciklopédia a Poincaré-sejtésről:

http://mathworld.wolfram.com/PoincareConjecture.html

Arra talán maga Poincaré sem gondolt, hogy a bizonyítás száz évet várat magára. A kérdés igen hamar a topológia leghíresebb problémájává vált, a legkiválóbb tudósok közül jó néhányat láncolt magához, és ösztönzésül szolgált rengeteg, később más területen is használhatónak bizonyult matematikai elmélet kidolgozásához. Érdekes mellékkörülmény, hogy a sejtés háromnál magasabb dimenzióra vonatkozó változatait már évtizedekkel ezelőtt megoldották. Említsük meg itt Stephen Smale és Michael Freedman amerikai matematikusok nevét, akik 1966-ban, illetve 1986-ban Fields-érmet kaptak ezen a téren kifejtett munkásságukért. Megjegyezzük, hogy négy és magasabb dimenzióban az egyszeres összefüggőség már nem elegendő a gömb jellemzéséhez, ott a sejtés megfogalmazása valamivel komplikáltabb. Annál bosszantóbb volt a topológusok számára a helyzet, hogy a topológia egyik legalapvetőbb kérdése éppen a legelső, a valósághoz leginkább kötődő dimenzióban olyan sokáig megoldatlan maradt. Az évtizedek során több híres bizonyítási kísérlet is történt, amelyekről csak később derült ki, hogy hiba vagy lényeges hiány volt bennük.

Az 1970-es évek végén William Thurston amerikai matematikus a háromdimenziós sokaságok topológiai áttekintése céljából újszerű eszközöket dolgozott ki és ezekkel nagy jelentőségű eredményeket ért el. Munkájáért 1982-ben kapott Fields-érmet. Megfogalmazott egy a háromdimenziós sokaságokat geometriai módszerrel áttekintő nagyívű sejtést, amely speciális esetként a Poincaré-sejtést is magában foglalta. Ennek az általánosabb, Thurston-féle ún. *geometrizációs sejtés*nek a megoldása juttatta végül nyugvópontra az eredeti Poincaré-féle problémát.

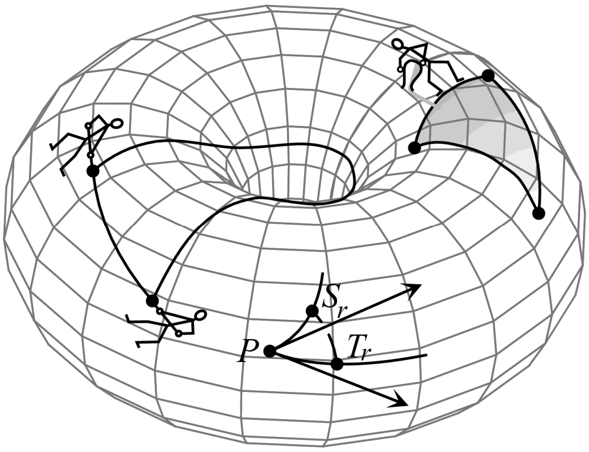
Ahhoz, hogy a geometrizáció problémájáról képet alkothassunk, meg kell ismernünk, miféle geometriai tulajdonságokkal lehet a sokaságokat felruházni.

5. Vissza a geometriához: felületek belső geometriája

A felület topológiai fogalmának kialakításakor nem voltunk tekintettel a szóban forgó idom mértékviszonyaira, azaz geometriai tulajdonságaira. Sőt, szándékosan el akartunk vonatkoztatni ezektől annak érdekében, hogy a topológiai szempontból fontos tulajdonságokra irányíthassuk figyelmünket. Tehát egy a térben konkrétan megjelenő felületre topológiai szemmel úgy gondolunk, mintha az a topológiai típusának egy többé-kevésbé esetlegesen választott konkrét geometriai megjelenése lenne. Valóban, például a gömbfelület topológiai típusa megjeleníthető tetszőleges sugarú tényleges szabályos gömbként is, de ellipszoidként, egy poliéder felületeként, vagy akár teljesen szabálytalan idom felületeként is.

Mindegyik ilyen konkrét ábra geometriai tulajdonságokkal ruházza fel a tudatunkban élő topológiai képet. Érdemes ezek közül csak azokat a jellemzőket tekinteni, amelyek kizárólag a felülethez tartoznak, és a befoglaló tér felhasználása nélkül értelmezhetők. Az ilyen fajta geometriai tulajdonságok tartoznak a szóban forgó felület *belső geometriá*jához. Például a felület belső geometriájának értelmében két felületi pont távolságán az őket összekötő legrövidebb felületi görbe hosszát értjük. Az ilyen görbék (a felület úgynevezett *geodetikus vonal*ai) játsszák az egyenes vonalak szerepét a felület belső geometriájában.

A belső geometria megértését segíti, ha a felületet kétdimenziós világnak képzeljük, amelyet kétdimenziós, lapos lények népesítenek be. Ezek a lények képesek saját világukon belül geometriát művelni, távolságokat, szögeket mérni, de nincs tudomásuk a világukat magába foglaló háromdimenziós térről, semmilyen módon nem érzékelik azt. Az ő számukra például egyenes vonalnak éppen azok a görbék tűnnek, amelyeket az imént geodetikus vonalnak neveztünk.



7. ábra

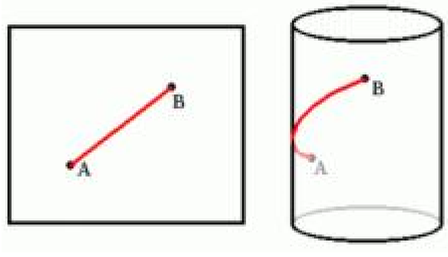
Csikós Balázs ábrája az Új Matematikai Mozaikból:

http://www.hik.hu/tankonyvtar/site/books/b124/sec-16-01.html

Ajánló

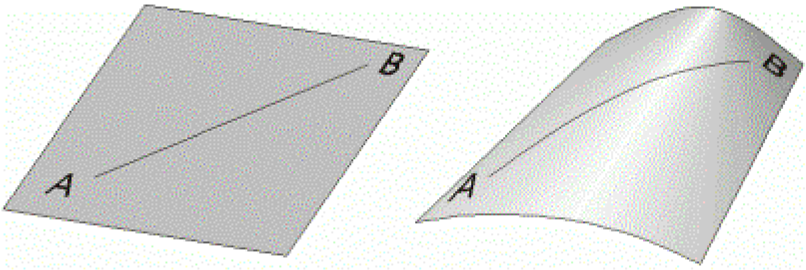
Edwin A. Abbott: Síkföld. Klasszikus sci-fi 1884-ből; alapötlete a sík belső geometriájához kapcsolódik: http://mek.oszk.hu/01900/01984/html/

Előfordulhat, hogy egészen különböző alakú felületek belső geometriája megegyezik. Például egy térben fekvő papírlap szemléltetheti a síkot. Ha meghajlítjuk a papírlapot, akkor a papírlapban fekvő alakzatok belső mennyiségei, a belső geometriai távolságok -- bár kívülről nem így látjuk -- nem változnak, például két pont közt futó görbe, akárhogy is hajlítgatjuk a papírlapot, mindig ugyanolyan hosszú marad. Azt mondjuk, hogy a felület (jelen esetben a papírlap) belső geometriája nem változik, azaz a belső geometria invariáns a hajlításokra nézve.

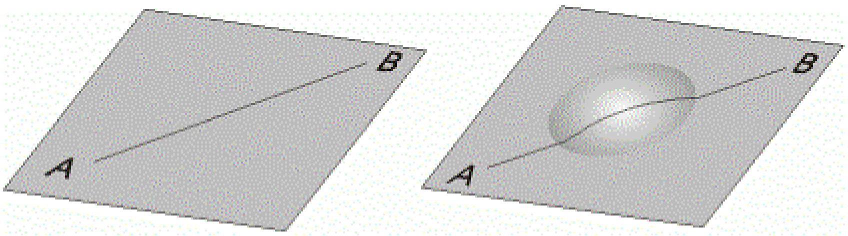


8. ábra: Ugyanaz a távolság síkon és hengerpaláston

Ha egy henger- vagy egy kúppalástot síkba terítünk, azt el tudjuk végezni anélkül, hogy a felület nyúlna vagy zsugorodna, azaz csak hajlításokat végzünk a belső távolságviszonyok megváltoztatása nélkül. (A palástot persze előbb fel kell vágni, hogy leteríthető legyen. Ezen most nem akadunk fenn: lokális értelemben, azaz a pontok elég kis környezeteire szorítkozva a leterítés elvégezhető.) A leterítés során nem változik a felület belső geometriája, míg görbültségi jellemzői gyökeresen átalakulhatnak. A felület görbületi viszonyai tehát általánosságban nem tartoznak a felület belső geometriájához. Vannak azonban olyan felületek is (sőt, a legtöbb felület ilyen), melyek olyan formán görbültek, hogy a síkra nem teríthetők le a fenti értelemben, hanem csak torzítás árán. A gömbfelület például ilyen: közismert tapasztalati tény (amelyet Gauss bizonyított be szabatosan), hogy a gömbfelületről nem lehet hű térképet készíteni. Eszerint a gömb „máshogyan" görbül, mint a henger- vagy kúpfelület, mégpedig úgy, hogy a belső geometriája is eltér azokétól. Ezt az eltérést a felületek ún. *Gauss-féle görbület*e méri, ami általában pontról pontra változó mennyiség és invariáns a hajlításra nézve. A sík esetében a Gauss-görbület mindenhol zérus. A henger- és a kúppalást Gauss-féle görbülete is minden pontban nulla, ugyanis a síkba torzulás nélkül leteríthetők. A gömbfelület Gauss-féle görbülete is konstans, mégpedig $1/r^2$, ahol r jelöli a gömb sugarát. Miután ez zérustól különbözik, a gömbfelület nem síkba teríthető.



Síkfelület alakváltozása a belső geometria megváltozása nélkül



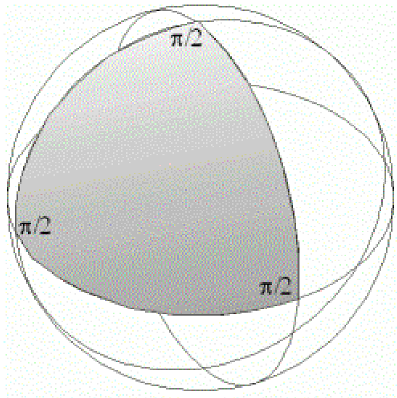
Síkfelület alakváltozása a belső geometria megváltozásával

9. ábra

A 9. ábra forrása a Budapest Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemről dr. Hegedűs István Héj- és felületszerkezetek, A mérnöki héjelmélet geometriai alapjai című előadásjegyzete, mely részletesebb felvilágosítást nyújt a felületek külső és belső geometriájáról, illetve a Gauss-féle görbületről is. A dokumentum itt érhető el: www.vbt.bme.hu/oktatas/hej/eloadasok/fel8.doc

A Gauss-féle görbület meghatározható a felület belsejében maradva, akár a felületben élő kétdimenziós lények is képesek azt megmérni. Ilyenformán a Gauss-görbület a felület belső geometriai invariánsa. A Gauss-görbület előjele például szépen tükröződik abban, ahogyan a háromszögek szögösszege viszonyul 180°-hoz. Rajzoljunk a felületre a vizsgált pont közelében kisméretű háromszögeket és mérjük meg azok szögeit. Ha a Gauss-görbület a vizsgált pontban pozitív, akkor a szögek összege mindig nagyobb 180°-nál, ha negatív, akkor kisebb. Ha a felület egy tartományán a Gauss-görbület konstans zérus, akkor ott minden felületi háromszög szögösszege pontosan 180°.

A legegyszerűbb példa olyan felületi háromszögre, ahol a szögösszeg jól láthatóan különbözik 180°-tól, a gömbön található. A gömb geodetikusai a főkörök, ezért a gömbre rajzolt háromszögek oldalai a gömb főkörívei. Ha úgy rajzolunk a gömbre háromszöget, hogy annak mindhárom oldala negyedfőkörnyi, akkor a háromszög mindhárom szöge derékszög, és így a háromszög szögeinek összege 270° lesz. Jól ismert tény, hogy nemcsak ennek, hanem bármely gömbháromszögnek a szögösszege 180°-nál nagyobb, összhangban azzal, hogy a gömbfelület pozitív Gauss-görbületű.



10. ábra: 270° szögösszegű háromszög a gömbfelületen

6. Állandó görbületű felületek

A felületek és a magasabb dimenziós sokaságok belső geometriáját lehet absztrakt módon, a befoglaló tér felhasználása nélkül is értelmezni. Ebben áll a felület- és sokaságelmélet Gausstól és Riemanntól származó felfogása, amely matematikai eszközeivel lehetővé teszi, hogy a sokaságok belső geometriai viszonyairól (távolságokról, szögekről, stb.) beszéljünk akár anélkül is, hogy ezek a sokaságok valamilyen tér részhalmazaiként konkrétan megjelennének. Az ilyen módon geometriai szerkezettel felruházott topologikus sokaságokat a modern matematika *Riemann-sokaság*oknak nevezi.

A valóságos világ geometriai szerkezetére nézve általában azzal a természetes feltevéssel élünk, hogy a tér homogén, azaz bármely pontja körül „ugyanolyan”. (Matematikai szakkifejezéssel *lokálisan homogén*nek szokás nevezni egy Riemann-féle geometriával ellátott sokaságot, ha bármely két pontjához találhatunk egybevágó környezeteket.) A kétdimenziós esetben ez a homogenitási tulajdonság pontosan azt jelenti, hogy a szóban forgó felület Gauss-féle görbülete *állandó*, azaz pontról pontra ugyanannyi. Az állandó görbületű felületek lokálisan egybevágók a három klasszikus kétdimenziós geometriai rendszer valamelyikével: a gömbi geometriával, ha a görbület pozitív, az euklideszivel, ha a görbület zérus, és a Bolyai-féle hiperbolikus geometriával, ha a görbület negatív. A lokális egybevágóság itt azt jelenti, hogy a felület bármely pontjának van olyan környezete, amely egybevágó a nevezett kétdimenziós geometria egy darabjával.

A zárt felületek topologikus osztályozási listájáról vajon melyek láthatók el állandó görbületű geometriai struktúrával? A válasz a lehető legszebb: mindegyikük. Ráadásul azt, hogy valamely összefüggő zárt felület a három klasszikus geometria közül melyiknek a struktúrájával ruházható fel, egyértelműen eldönti a felület topológiai típusa. A gömb persze gömbi geometriával látható el, a tórusz euklideszi geometriával, az összes többi pedig hiperbolikus geometriával. (Ugyanez a helyzet a nem irányítható felületek esetében is: közülük egy gömbi, egy euklideszi, a többi pedig Bolyai-geometriát tud hordozni.) Ezt az eredményt, amely már a 19. században ismert volt, szokás a felületek uniformizációs tételének nevezni. Az elnevezést az a körülmény magyarázza, hogy a komplex számok alkalmazása (komplex koordinátázás és komplex változós függvények mint transzformációk használata) útján a háromféle geometriai struktúra matematikailag igen elegánsan, egységesen kezelhető.

Szemléletünk nehezen fogadja be a felületek állandó görbületű geometriai struktúráit. Ennek az a nyilvánvaló oka, hogy az egyetlen gömb kivételével ezek nem állnak elő úgy, mint térben fekvő felületek a térből örökölt geometriájukkal. A tórusz például, amelyet általában az úszógumi alakjával szemléltetünk, bizonyos részein pozitív, máshol negatív görbületű geometriát örököl a befoglaló térből. Ez így van akkor is, ha akárhogyan kinyújtva vagy meggörbítve helyezzük el a tóruszt a térben. Ahhoz, hogy azonosan zérus görbületű, azaz az euklideszi síkkal lokálisan egybevágó geometriát kapjunk a tóruszfelületen, a 3. fejezetben leírt absztrakt konstrukciót nemcsak topológiailag, hanem geometriailag is értelmeznünk kell. A téglalap szemközti oldalainak összeragasztásával eltűnnek a határvonalak: ha lelépünk az egyik oldalon, akkor az euklideszi síkból a téglalapra örökített geometria „zökkenőmentesen" folytatódik az átellenes oldalon visszalépve.

Ajánló

Tóruszon és a hasonló módon euklideszi struktúrával bíró Klein-kancsón keresztrejtvényt fejthetünk, labirintust és egyéb játékokat játszhatunk Jeffrey R. Weeks weboldalán:

http://www.geometrygames.org/TorusGames/index.html

Ahhoz, hogy a 2 vagy magasabb nemű felületeket állandó görbületű geometriával lássuk el, hasonló konstrukciót alkalmazhatunk, mint a tórusz esetében, csak euklideszi helyett hiperbolikus geometriát, téglalap helyett magasabb oldalszámú sokszögeket kell használnunk.

Az alábbi táblázat összefoglalja a felületek görbülete és topológiai típusa közötti legalapvetőbb összefüggéseket:

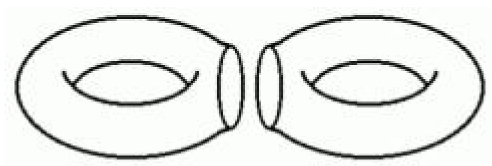
A Gauss-féle görbület állandó görbületű absztrakt felületek esetén			
háromszögek szögeinek összege	Gauss-féle görbület	ilyen felületek	melyik geometria vizsgálja
nagyobb, mint 180°	nagyobb, mint nulla	gömbfelület (0 nemű)	gömbi geometria
pontosan 180°	pontosan nulla	tórusz (1 nemű)	euklideszi geometria
kisebb, mint 180°	kisebb, mint nulla	az összes többi felület (legalább 2 nemű)	Bolyai-geometria (hiperbolikus geometria)

Az a körülmény, hogy a felületek mindannyian elláthatók állandó görbületű geometriával, igen hatékony segédeszköz a felületek topológiájának tanulmányozásában. Egy sor topológiai tételt lehet könnyűszerrel bizonyítani annak köszönhetően, hogy a felületeken az euklideszi vagy a hiperbolikus síkgeometria eszközei felhasználhatók.

7. Háromdimenziós sokaságok geometrizációja

A háromdimenziós sokaságok esetében az osztályozás kérdésének geometriai szemléletű megközelítése jóval később, csak az 1970-es években vetődött fel. Ez a kérdés sokkal bonyolultabb, mint a felületek esetében. Egyrészt az sem nyilvánvaló, milyen fajta geometriai rendszerek jöhetnek szóba. A három klasszikus térgeometria, a gömbi, az euklideszi és a hiperbolikus itt már nem elegendő. Ezek állandó görbületű geometriai terek. Három és magasabb dimenzióban a görbület már nem pusztán a vizsgált pont helyétől függő számszerű mennyiség, hanem a pontban kiválasztható iránytól is függhet. A klasszikus geometriákat éppen az jellemzi, hogy görbületük minden pontban és minden irányban ugyanakkora. Az előző fejezetben említett homogenitási tulajdonság három és magasabb dimenzióban már nem vonja maga után a görbület állandó voltát. Thurston megmutatta, hogy ha egy háromdimenziós zárt sokaság geometriai struktúrájától a lokális homogenitást követeljük meg, akkor pontosan nyolcféle geometriai rendszer valamelyikével állunk szemben. Ezek között ott van a három állandó görbületű, tehát a gömbi, az euklideszi és a Bolyai-féle térgeometria, valamint további öt érdekes geometriai rendszer, amelyek homogének ugyan, de más-más irányokban eltérő görbületűek.

A felületek esetétől való másik gyökeres eltérés abban áll, hogy messze nem állíthatjuk, hogy bármely zárt háromdimenziós sokaság ellátható volna e geometriai struktúrák valamelyikével. Ehhez először bizonyos egyszerűsítési lépéseket kell végrehajtanunk a sokaság topológiai szerkezetén. Ezek a lépések abból állnak, hogy a sokaságot feldaraboljuk egyszerűbb részekre. A feldarabolás mikéntje egyáltalán nem nyilvánvaló, de a sokaság topológiai jellemzőiből egyértelműen felismerhető. Az eljárás első lépését jól szemlélteti (eggyel alacsonyabb dimenzióban) az, ahogyan a kengyelfelület felvágható két tóruszra. Az eljárás célja olyan körvonalak keresése, amelyek kettévágják a sokaságot. A vágás után keletkezett határvonalakat beragasztjuk egy-egy körlappal. Háromdimenziós sokaságok esetén ugyanez a helyzet, csak körvonal helyett kétdimenziós gömbfelülettel vágunk ketté úgy, hogy a kapott részek közül egyik se legyen golyó (topológiailag), majd a határoló gömbfelületekre háromdimenziós golyókat ragasztunk. Ezt folytatjuk, amíg lehet. Messze nem nyilvánvaló tény, hogy az eljárás véges sok lépés után befejeződik, és elérkezünk egy háromdimenziós sokaságokat tartalmazó listához, amelyben már egyik sokaságot sem lehet tovább darabolni. Ezeket nevezik *prímsokaság*oknak, magát az eljárást pedig Kneser-Milnor-féle prímfelbontásnak.



11. ábra: Kengyelfelület szétvágása két tóruszra

A prímsokaságokat esetleg még tovább lehet darabolni bizonyos speciálisan beágyazott tóruszok mentén. Ez az eljárás nehezebben szemléltethető, de topológiailag tisztázható, és végül elvezet sokaságok egy olyan véges listájához, amelyben csak olyan sokaságok szerepelnek, amelyek vagy bizonyos értelemben topológiailag egyszerű és áttekinthető szerkezetűek (ún. Seifert-sokaságok), vagy pedig olyanok, amelyeket tóruszokkal nem lehet nemtriviális módon tovább darabolni (ún. *atoroidális* sokaságok). Nos, Thurston híres geometrizációs sejtése azt állítja, hogy ebben a listában már csak olyan sokaságok vannak, amelyek mind elláthatók a nyolc háromdimenziós homogén geometriai rendszer valamelyikével.

A geometrizációról alkotható globális kép annyiban emlékeztet a kétdimenziós estre, hogy a szóba jövő geometriák közül itt is a hiperbolikus geometria az, amely a legnagyobb változatosságot mutatja. Valamilyen értelemben a geometriai struktúrával ellátott háromdimenziós sokaságok között is túlnyomó többségben vannak a hiperbolikusak. Thurston fő tételei is a hiperbolikus geometriához tartoznak: megmutatta, hogy az atoroidális sokaságok egy igen tág osztályára sejtése igaz, és ezek a sokaságok mind hiperbolikus geometriával láthatók el.

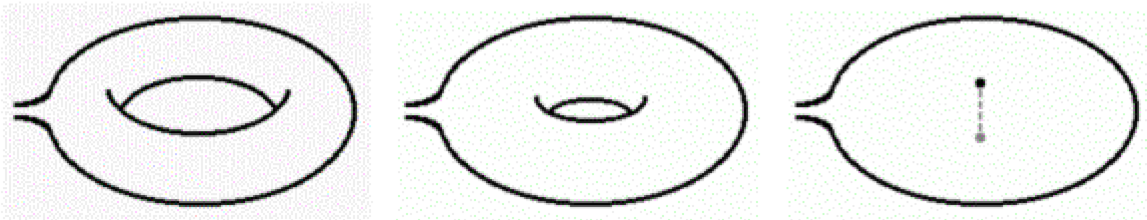
Ha egy háromdimenziós zárt sokaságban van véges sok olyan zárt görbe, hogy bármely a sokaságba rajzolt zárt görbe ezek valamelyikébe átdeformálható (ilyenkor mondják, hogy a szóban forgó sokaságnak véges a fundamentális csoportja), akkor a sokaság Thurston sejtése szerint gömbi geometriával ruházható fel. Ennek speciális esete, ha a sokaság egyszeresen összefüggő, ugyanis ilyenkor bármely zárt görbe ugyanazzá a görbévé, a konstans (egyetlen pontból álló) görbévé deformálható. Ilyen módon válik a Poincaré-sejtés a Thurston-sejtés speciális esetévé, hiszen azt könnyű megmutatni, hogy egy gömbi geometriával ellátott egyszeresen összefüggő sokaság csak maga a gömb lehet.

A geometrizációs sejtés a nyolcféle geometria szerint nyolc esetre osztható; ezek közül hat viszonylag könnyen tisztázható. A maradék kettő a hiperbolikus és a gömbi geometria esete. Thurston tételei óta húsz éven át nem történt jelentős előrelépés e két eset megoldásának irányában, és ezek – a bennük foglalt Poincaré-sejtéssel együtt -- a háromdimenziós topológia legfontosabb megoldatlan problémái maradtak.

8. Hamilton programja és Perelman eredményei

Az 1980-as években Richard Hamilton amerikai matematikus olyan módszereket vezetett be a geometrizáció egyes kérdéseinek tisztázásához, amelyek nem kimondottan a topológiához, hanem inkább a differenciálegyenletek elméletéhez tartoznak. A Hamilton-féle elmélet fő eszköze az úgynevezett Ricci-féle folyam. Ez egy tetszőleges Riemann-sokaságon a geometriai struktúrát fokozatosan deformáló, az idő függvényében lezajló folyamat. Arra lehet itt gondolni némi leegyszerűsítéssel, hogy a sokasággal olyasmi történik, mint amikor egy léggömböt felfújunk: a kezdetben szabálytalan, lapos vagy gyűrött idom a fölfújás során fokozatosan kigömbölyödik. A Ricci-folyamot olyan parciális differenciálegyenlet-rendszer megoldásaként lehet származtatni, amelynek kiindulópontjaként egy a sokaságon tetszőlegesen rögzített Riemann-féle struktúra szolgál. Hamilton észrevette, hogy háromdimenziós sokaságok esetében a Ricci-folyam a geometriai struktúrát olyan módon deformálja, hogy az idő előrehaladtával az a sokaság egyre nagyobb darabján egyre jobban megközelíti a Thurston-féle geometriák valamelyikét. Innen származott az ötlet: hátha ezt a jelenséget ki lehet aknázni olyan módon, hogy végül elvezessen a geometrizációs sejtés bizonyításához. Ennek a programnak a kivitelezése során számos igen nehéz technikai akadályt kell leküzdeni. Információt kell szerezni a változó geometriai struktúra görbületi viszonyairól, ezek időbeli lefutásáról, konvergenciájáról. Hamilton két évtizednyi munkával igen érdekes jelenségeket fedezett fel ebben a témában, alapvető tételeket bizonyított be és néhány speciális esetben el is jutott geometrizációs jellegű eredményekhez.

A program végigvitelének legfőbb technikai akadálya az úgynevezett szingularitások fellépése volt. Ez azt jelenti, hogy a geometriai struktúra olyannyira deformálódik, hogy egy bizonyos időpillanatban a tér megszűnik sokaság lenni. Technikailag ez úgy jelenik meg, hogy a differenciálegyenlet-rendszer megoldása csak az e pillanatot megelőző időintervallumban van értelmezve, és a megoldást nem lehet tovább folytatni. A fenti léggömbös példa módosításával a szingularitás megjelenése is szemléltethető. Képzeljük el, hogy egy tóruszalakú léggömböt fújunk fel. Egy darabig a tórusz csak egyre vastagodik (ilyenkor még felület), de középen egyre keskenyebb cső keletkezik, amely előbb-utóbb annyira összeszorul, hogy ott összeér és „vonalszerűvé” redukálódik.



12. ábra: A tórusz-léggömb felfújásakor keletkező szingularitás

Innen kezdve a léggömb már nem felület a szó matematikai értelmében. Úgy alakíthatnánk például ismét felületté, hogy kivágnánk a belül haladó összekötő vonalat, a lyukakat befoltoznánk, és ezzel gömbalakú léggömböt nyernénk.

A Ricci-folyam lehetséges szingularitásairól végül Perelman tudott teljes leírást adni. A Hamilton-féle programot olyan eljárással egészítette ki, amelyben a szingularitásokat valamivel a megjelenésük előtt megszüntette a sokaság topológiai átépítése árán (körülbelül olyanformán, ahogyan az imént a tórusz formájú léggömbből igazi gömböt csináltunk). Egy-egy ilyen átépítés alkalmával a sokaság topológiai típusa megváltozik, esetleg a sokaság ketté is eshet, de a szerkezete valamelyest mindig egyszerűsödik. Perelman megmutatta azt is, hogy az átépítések után a Ricci-folyam továbbvihető az új sokaságon, és olyan konvergens eljárássá áll össze, amelynek végeredményeképpen Thurston-geometriával ellátott sokaságok egy rendszeréhez jutunk. Végül leltárt kell csak készíteni és megállapítani, hogy az eljárás során alkalmazott átépítések éppen az eredeti sokaság Kneser-Milnor-felbontásában és a prímkomponensek tóruszfelbontásában szereplő szétvágásoknak felelnek meg. Ez tehát a tömör és leegyszerűsített vázlata a Perelman-féle eredményeknek, amelyek így végül elvezetnek a geometrizációs sejtés, és azon belül a Poincaré-sejtés megoldásához.

Ajánló

Az Amerikai Matematikai Társulat lapjában 2004-ben Michael T. Anderson amerikai matematikus írt a Hamilton-féle és Perelman-féle eredményekről. Ezt az összefoglalót az absztrakt matematikában járatosabb olvasó számára ajánljuk:

http://www.ams.org/notices/200402/fea-anderson.pdf