Nagy Károly Matematikai Diáktalálkozó
Komárom, 2005

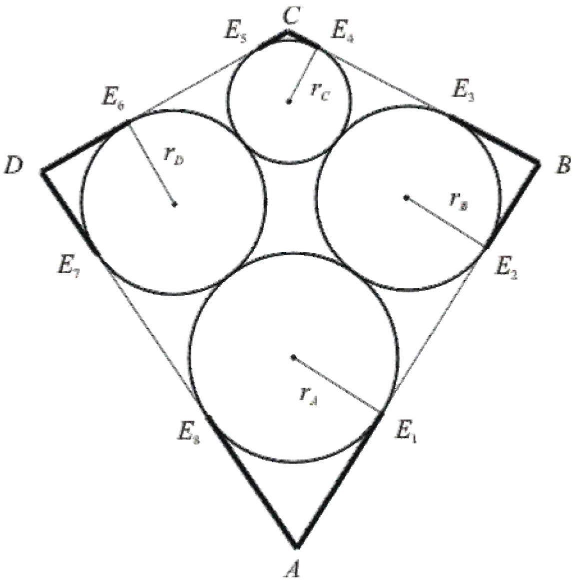
Azok a csodálatos érintőnégyszögek

Összeállította:
Kubatov Antal
Kaposvár

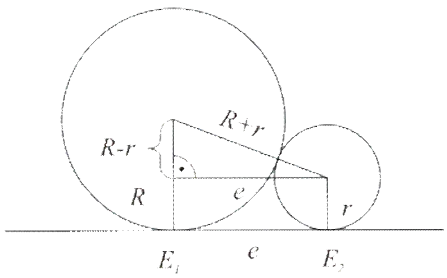
1. Feladat.

Egy négyszögbe négy kört írtunk oly módon, hogy mindegyik pontosan két másik kört érint kívülről, s mindegyik érinti a négyszög két szomszédos oldalát is. Mutassuk meg, hogy ha a négyszög érintőnégyszög, akkor valamely két szemközti kör sugara megegyezik!

Megoldás:



1. ábra



2. ábra

Ismert, hogy az érintési pontok távolsága:
$e = 2\sqrt{Rr}$ (lásd 2. ábra).

Másrészt: az azonos színnel jelölt szakaszok egyenlők (lásd 1. ábra). Így mivel $ABCD$ érintőnégyszög:

$$AE_1 + 2\sqrt{r_A r_B} + E_2B + CE_5 + 2\sqrt{r_C r_D} + E_6D = AE_8 + 2\sqrt{r_A r_D} + E_7D + BE_3 + 2\sqrt{r_B r_C} + E_4C$$

c

$$\sqrt{r_A r_B} + \sqrt{r_C r_D} = \sqrt{r_A r_D} + \sqrt{r_B r_C}$$

$$\sqrt{r_A}(\sqrt{r_B} - \sqrt{r_D}) - \sqrt{r_C}(\sqrt{r_B} - \sqrt{r_D}) = 0$$

$$(\sqrt{r_A} - \sqrt{r_C})(\sqrt{r_B} - \sqrt{r_D}) = 0$$

$$\sqrt{r_B} - \sqrt{r_D} = 0 \qquad \sqrt{r_A} - \sqrt{r_C} = 0$$

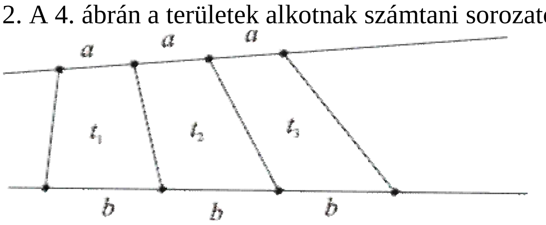
$$r_B = r_D \qquad r_A = r_C$$

2. Feladat.

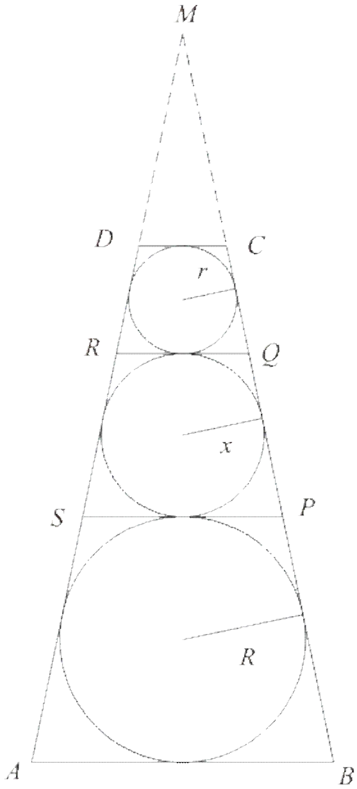
Egy trapézt az alapokkal párhuzamos szakaszokkal három trapézra bontottuk úgy, hogy mindegyikbe írható kör. Mekkora a középső trapézba írható kör sugara, ha a két szélsőbe írt kör sugara r ill. R?

Megoldás:
Jelölje a szárak metszéspontját M. Az $MRQ\triangle \sim \triangle MSP$ (nyilvánvaló).(lásd 3. ábra). $\Rightarrow$ A beírt-, és hozzáírt körök sugarának aránya mindkét háromszög esetén ugyanaz: $\frac{r}{x}=\frac{x}{R} \Rightarrow x=\sqrt{rR}$

Megjegyzés:
1. Hasonló feladat RLV. 2004. Tanárverseny 30. feladat (csak ott a körök érintették egymást, s a szárakat is. Ott is, itt is a körök sugarai mértani sorozatot alkotnak.
2. A 4. ábrán a területek alkotnak számtani sorozatot!



4. ábra



3. ábra

3. Feladat.

Igazoljuk, hogy ha az $ABCD$ négyszög érintőnégyszög, akkor az ABC és ADC háromszögekbe írt körök érintik egymást!

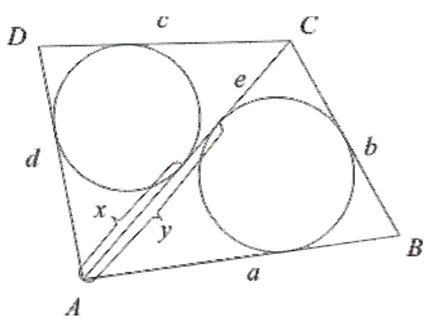
Megoldás:
$ABCD$ érintőnégyszög $\Rightarrow$ $a+c=b+d$ (*)(lásd 5. ábra). A két kör akkor érinti egymást, ha $x=y$. $x=\frac{d+c+e}{2}-c=\frac{d+e-c}{2}$

$$y=\frac{a+b+e}{2}-b=\frac{a-b+e}{2}$$

$$x\overset{?}{=}y$$

$$\frac{d+e-c}{2}\overset{?}{=}\frac{a-b+e}{2}$$

$b+d=a+c$ ez igaz $\Leftarrow$(*).



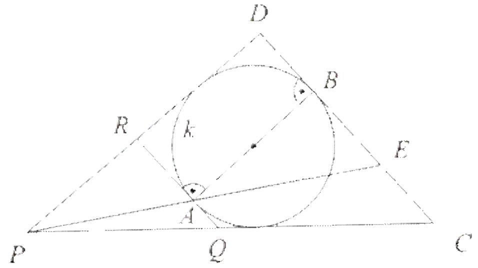
5. ábra

4. Feladat.

A P csúcsú szög szárait érintő k körön kijelöltünk két átellenes pontot, A-t és B-t, melyek különböznek az érintési pontoktól. A k körhöz a B pontban húzott érintő a szög szárait a C és a D, a PA egyenest pedig az E pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy $BC = DE$!

Megoldás:

A BC távolság a PCD háromszögbe írt kör (B) érintési pontjának távolsága a C csúcstól. (lásd 6. ábra). Erről tudjuk, hogy ugyanakkora, mint a hozzáírt kör érintési pontjának távolsága a másik csúcstól. Tehát azt kell megmutatnunk, hogy E a hozzáírt kör érintési pontja. Rajzoljuk meg az A pontban az érintőt! A $PQR\triangle$ hozzáírt körének érintési pontja A. Tekintsük azt a P középpontú középpontos hasonlóságot, mely a $PQR\triangle$-et átviszi a $PCD\triangle$-be. A képe az E, s ez – az előzőek szerint – azt jelenti, hogy E a $PCD\triangle$ hozzáírt körének érintési pontja.



6. ábra

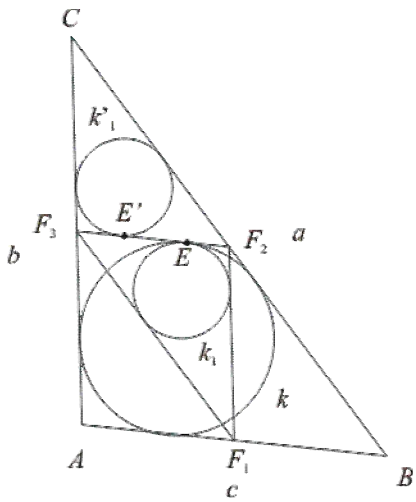
5. feladat.

Egy háromszög egyik oldala egyenlő a másik két oldal összegének harmadával. Bizonyítsuk be, hogy az eredeti háromszögbe és a középháromszögbe írt körök érintik egymást!

Megoldás:

Legyen $c = \frac{a+b}{3}$. (lásd 7. ábra). Ekkor $AB + F_2F_3 = \frac{3}{2}c = \frac{a+b}{2}$,

$BF_2 + AF_3 = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{a+b}{2}$, azaz ABF_2F_3 érintőnégyszög, azaz az $ABC\triangle$ beírt köre érinti az F_2F_3 középvonalat. Vegyük észre azt is, hogy ez a kör egyúttal az $F_3CF_2\triangle$ hozzáírt köre. Ahhoz, hogy a középháromszögbe írt kört érintse, azt kell belátnunk, hogy mindkét kör (k és k_1) érintési pontja ugyanolyan távol van pl. F_2-től. Tekintsük k_1 tükörképét az $\overline{F_2F_3}$ felezőpontjára, jelölje azt k_1'. k_1' az $F_3CF_2\triangle$ beírt köre, hiszen $F_3F_1F_2C$ paralelogramma. A tükrözés miatt $\overline{F_2E} = \overline{F_3E'}$ (E a k_1 érintési pontja) Másrészt a beírt kör (k_1') érintési pontja olyan távol van az egyik (F_3) csúcstól, mint a hozzáírt kör (k) érintési pontja a másik (F_2) csúcstól. Ez viszont azt jelenti, hogy k_1 és k érintési pontjainak távolsága F_2-től azonos, azaz a két pont egybeesik, azaz a két kör érinti egymást.



7. ábra

6. Feladat.

Adott egy nem trapéz húrnégyszög. Szemközti oldalainak meghosszabbításainak metszéspontja legyen P ill. Q. A P-nél és Q-nál lévő szögek szögfelezői messék a húrnégyszög oldalait X, Y ill. Z, V pontokban. Mutassuk meg, hogy $XZYV$ négyszög érintőnégyszög!

Megoldás:

Azt fogjuk megmutatni, hogy a négyszög rombusz.

$PMQD$ négyszög szögösszege $360°$ (lásd 8.ábra).

$$\frac{180° - a - b}{2} + 180 + b + \frac{180° - b - g}{2} + j = 360°,$$

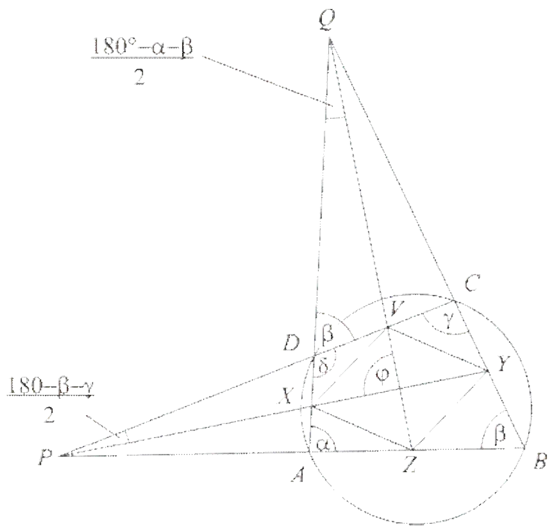
$$-\frac{a + g}{2} = j ,$$

$$j = \frac{a + g}{2} = 90° \Leftarrow \; ABCD \text{ húrnégyszög. } \Rightarrow$$

PM szögfelező és magasságvonal $\Rightarrow VM = MZ$

QM is szögfelező és magasságvonal $\Rightarrow XM = MY$.

Az átlók merőlegesen felezik egymást: $XZYV$ rombusz (s így természetesen érintőnégyszög is).



8. ábra

7. Feladat.

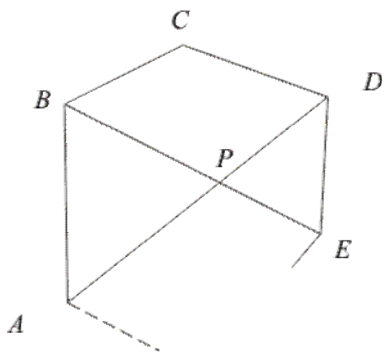
Bizonyítsuk be, hogy egy konvex n szögből az átlókkal levágott n négyszög közül legfeljebb $\frac{n}{2}$ lehet érintőnégyszög!

Megoldás:

Ha $\frac{n}{2}$- nél több ilyen négyszögbe lehetne kört írni, akkor volna közöttük két szomszédos, melyeknek két oldala megegyezik (lásd 9. ábra). Ebből:

$$AB + CD = AD + BC$$
$$BC + DE = CD + BE$$
$$\sum : AB + DE = AD + BE$$

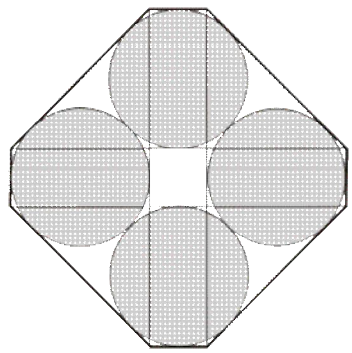
Azaz $AB + DE = AP + PD + BP + PE$. **<u>De</u>** $AB < AP + PB$ és $DE < PD + PE$ (háromszög-egyenlőtlenség). Ez ellent mond az előző ($AB + DE = AP + PD + BP + PE$) egyenletnek.



9. ábra

Megjegyzés:

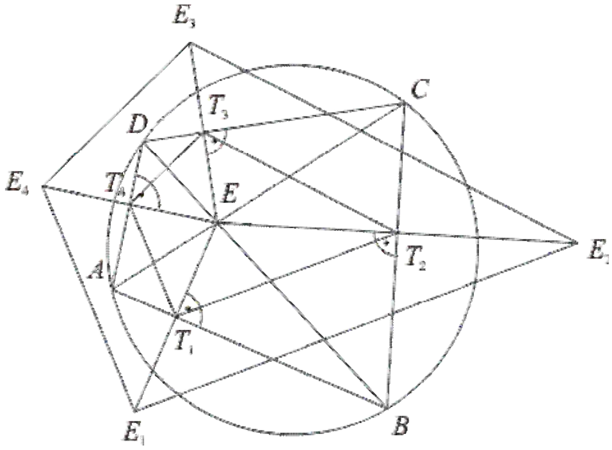
Az egyenlőtlenség éles. Pl.:n=8-ra (lásd 10. ábra).



10. ábra

8. Feladat.

Az $ABCD$ húrnégyszög átlóinak metszéspontját jelölje E, s ennek az oldalakra vonatkozó tükörképei legyenek E_1, E_2, E_3 ill. E_4. Mutassuk meg, hogy $E_1E_2E_3E_4$ négyszög érintőnégyszög!



11. ábra

Megoldás:

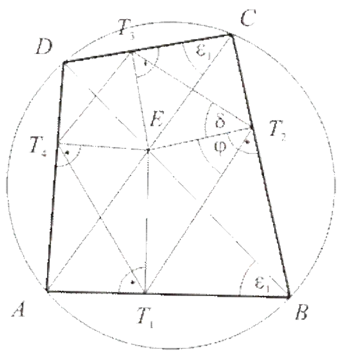
Mivel $E_1E_2E_3E_4$ a $T_1T_2T_3T_4$ négyszög nagyítottja E-ből kétszeresére (lásd 11. ábra), így elegendő $T_1T_2T_3T_4$ négyszögről megmutatni, hogy érintőnégyszög. (T_1, T_2, T_3, T_4 pontok az E pont merőleges vetületei az oldalakra). Az alapgondolat az, hogy megmutatjuk, hogy ET_2 felezi a T_2-nél lévő szöget. $T_1BE\sphericalangle = T_3CE\sphericalangle\ (e_1)$ (lásd 12. ábra), mert azonos ($\overset{\frown}{AD}$) íven nyugvó kerületi szögek.

T_1BT_2E húrnégyszög $\Rightarrow e_1 = j$

T_2CT_3E húrnégyszög $\Rightarrow e_1 = d$

$\Rightarrow j = d$.

Analóg módon mutatható meg a négyszög többi szögére.

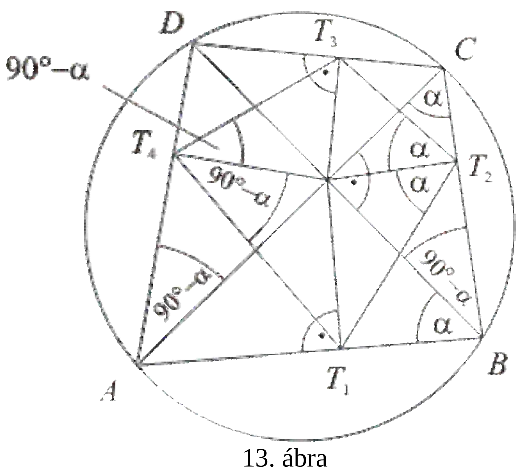


12. ábra

Megjegyzés:

Ha a húrnégyszög átlói merőlegesek egymásra, akkor $T_1T_2T_3T_4$ ún. bicentrikus négyszög, azaz húrnégyszög és érintőnégyszög egyben.

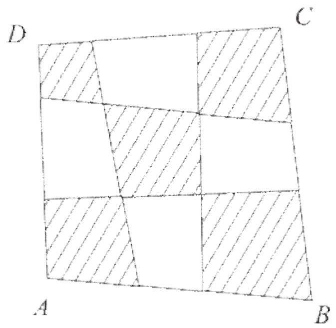
$T_2\sphericalangle + T_4\sphericalangle = 2a + 2(90° - a) = 180°$ (lásd 13. ábra).



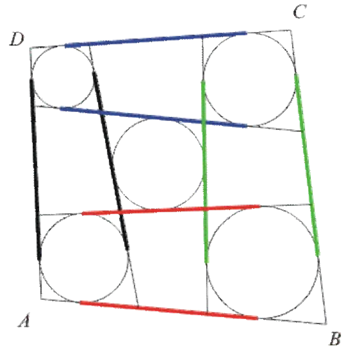
13. ábra

9. Feladat.

Mutassuk meg, hogy ha a satírozott négyszögek érintőnégyszögek, akkor az $ABCD$ négyszög is az! (lásd 14. ábra).



14. ábra

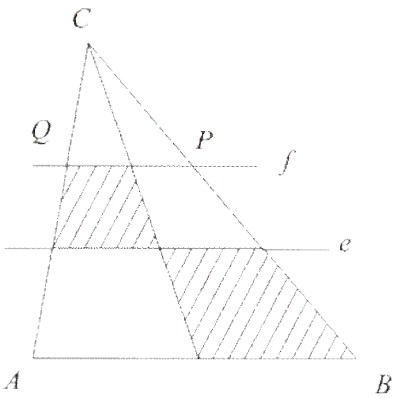


15. ábra

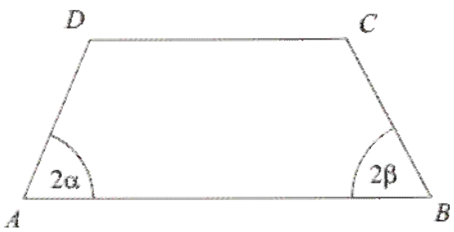
Megoldás:
Tekintsük a 15. ábrát! Az azonos színnel jelölt szakaszok egyenlők, valamint a piros és kék szakaszok összege megegyezik a zöld és fekete szakaszok összegével (nyilvánvaló). Az A, B, C, D pontokból húzott érintő szakaszok egyenlősége, valamint az előzőek alapján az állítás már adódik.

10. Feladat.

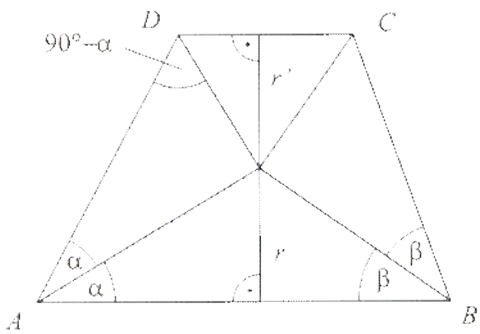
Mutassuk meg, hogy ha a satírozott négyszögek érintőnégyszögek (lásd 16. ábra) és $e \parallel f \parallel AB$, akkor $ABPQ$ négyszög is érintőnégyszög!



16. ábra



17. ábra



18. ábra

Megoldás:
A megoldáshoz belátjuk az alábbi segédtételt:

Tétel:

$ABCD$ trapéz akkor és csak akkor érintőnégyszög, ha $\frac{DC}{AB} = tg\alpha \cdot tg\beta$ (lásd 17. ábra).

A segédtétel bizonyítása:
Az $ABCD$ érintőnégyszög akkor és csak akkor, ha $r = r'$ (lásd 18. ábra). (r : az A és B szögek szögfelezői metszéspontjának távolsága $\overline{AB}$-tól, r' : a C és D szögek szögfelezői

metszéspontjának távolsága $\overline{CD}$-től.) $AB = r(ctga + ctgb)$,

$$DC = r'(ctg(90° - a) + ctg(90° - b)) \Rightarrow \frac{DC}{AB} = \frac{tga + tgb}{ctga + ctgb} = \frac{tga + tgb}{\frac{1}{tga} + \frac{1}{tgb}} = tga \cdot tgb$$

Nézzük ezután a feladat megoldását!:

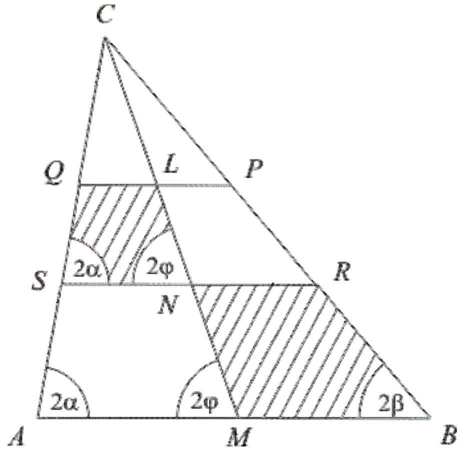
Használjuk a 19. ábra jelöléseit és alkalmazzuk az előbbi segédtételt!: $\frac{QL}{SN} = tga \cdot tgj$, $\frac{NR}{MB} = ctgj \cdot tgb$ ($tg(90° - j) = ctgj$).

$$\frac{PQ}{RS} = \frac{QL}{SN}$$

$$\frac{SR}{AB} = \frac{NR}{MB}$$

$$p : \frac{PQ}{RS} \cdot \frac{RS}{AB} = \frac{PQ}{AB} = \frac{QL}{SN} \cdot \frac{NR}{MB} = tga \cdot tgb \quad (tgj \cdot ctgj = 1)$$

$$\frac{PQ}{AB} = tga \cdot tgb$$



19. ábra

Ez a segédtétel értelmében azt jelenti, hogy $ABPQ$ érintőnégyszög.

11. Feladat.

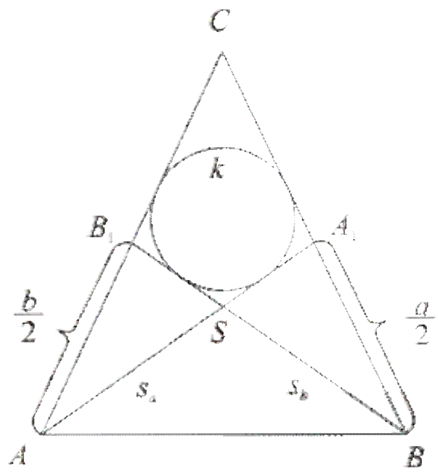
Jelölje az $ABC\triangle$ súlypontját S, két súlyvonalát AA_1 és BB_1. Bizonyítsuk be, hogy az $ABC\triangle$ egyenlőszárú, ha SA_1CB_1 négyszög érintőnégyszög!

Megoldás:

A $BB_1C\triangle$ és az $AA_1C\triangle$ területe nyilvánvalóan egyenlő, hisz mindkettő az $ABC\triangle$ területének a fele. Másrészt a k kör mindkét háromszög beírt köre (lásd 20. ábra), így a – $t = rs$ alapján – a két háromszög kerületének meg kell egyeznie:

$s_a + \frac{a}{2} + b = s_b + \frac{b}{2} + a$, B_1SA_1C négyszög érintő négyszög $\Rightarrow$

$\frac{1}{3}s_a + \frac{b}{2} = \frac{1}{3}s_b + \frac{a}{2}$. A második egyenlet háromszorosából vonjuk ki az elsőt: $\frac{b}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} \Rightarrow a = b$.



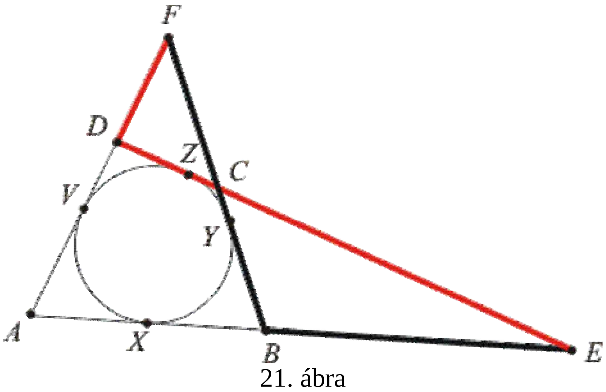
20. ábra

Megjegyzés:

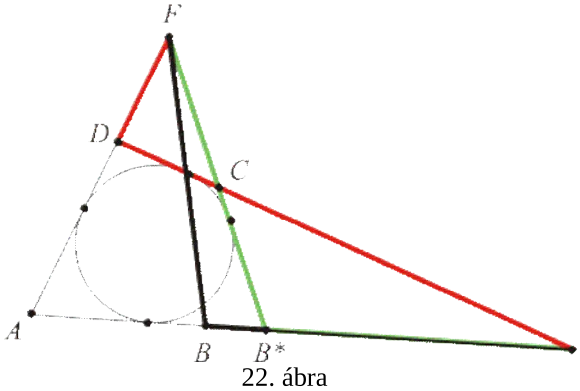
Felhasználhatjuk a 12. feladat állítását is.

12. Feladat.

Bizonyítsuk be, hogy az $ABCD$ (nem trapéz) négyszög akkor és csak akkor érintőnégyszög, ha $EB+BF=ED+DF$! (E az AB és DC meghosszabbításainak metszéspontja, F pedig a másik két oldal meghosszabbításainak metszéspontja.).



21. ábra



22. ábra

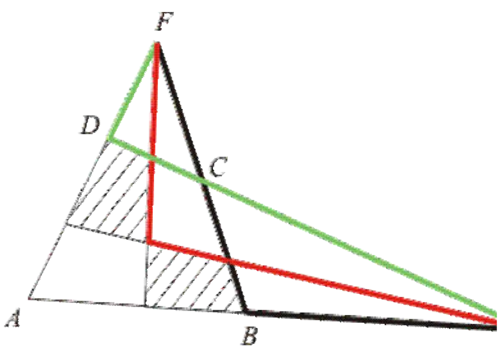
Megoldás:
1): Ha $ABCD$ érintőnégyszög, akkor $EB+BF=ED+DF$ (lásd 21. ábra).
$EB+BF=EX-XB+BY+YF=EZ+FV=EZ+ZD-ZD+FD+DV=ED+DF$.
2): Ha $EB+BF=ED+DF$, akkor $ABCD$ érintőnégyszög.
Indirekt: Ha $ABCD$ nem érintőnégyszög, akkor tekintsük az $AED\triangle$ beírt körét és húzzuk meg F -ből az érintőt e körhöz (lásd 22. ábra). 1) miatt: $EB^*+B^*F=ED+DF$, feltétel: $EB+BF=ED+DF$. $EB=EB^*+B^*B$. Az előző három egyenletből: $B^*F=B^*B+BF$. Ez viszont ellentmond a háromszög-egyenlőtlenségnek.

Megjegyzés:
Az ellipszis két tetszőleges pontjának rádiuszait meghosszabbítva – ha azok négyszöget határoznak meg –, akkor az érintőnégyszög.

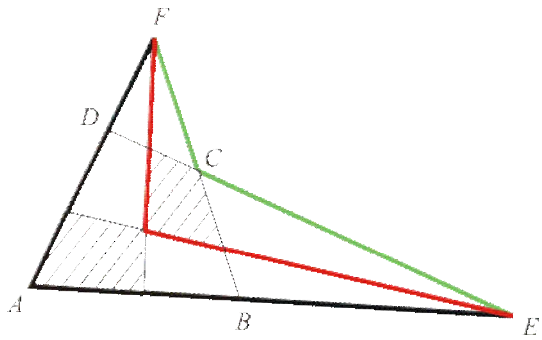
13. Feladat.

Egy konvex négyszög szemközti oldalai meghosszabbításainak metszéspontjain keresztül húzzunk egy-egy egyenest, melyek az eredeti négyszöget négy kisebb négyszögre vágják. Bizonyítsuk be, hogy ha kör írható valamely két szemközti kis négyszögbe, akkor az eredeti négyszög is érintőnégyszög.

Megoldás:
1. eset (lásd 23. ábra).: A színezés és az előző feladat állítása értelmében triviális.
2. eset (lásd 24. ábra).: A feladat bizonyításához segédtételt használunk:



23. ábra



24. ábra

Tétel:
$ABCD$ érintőnégyszög $\Leftrightarrow$ $EA - AF = EC - CF$ (lásd 25. ábra).

Bizonyítás:

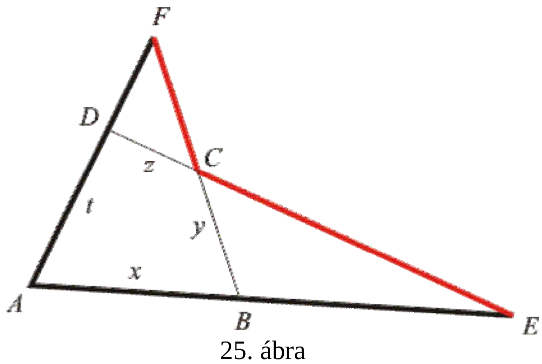
Visszavezetjük az előző feladatra: $EA - AF \overset{?}{=} EC - CF \Rightarrow$

$EB + x - (DF + t) \overset{?}{=} ED - z - (BF - y) \Rightarrow$

$EB + BF + x + z \overset{?}{=} ED + DF + y + t$. Ebből

$x + z = y + t \Leftrightarrow$ ha $ABCD$ érintőnégyszög, tehát

$EB + BF = ED + DF \Leftrightarrow$ $ABCD$ érintőnégyszög.



25. ábra

Megoldás folytatása:
Az előző segédtételből és a színezésből már következik az állítás.

14. Feladat.

Az $ABCD$ érintő trapéz ($AB \parallel CD$), átlóinak metszéspontja E. Jelölje r_1, r_2, r_3, r_4 ebben a sorrendben az ABE, BCE, CDE és DAE háromszögekbe írt körök sugarát.

Mutassuk meg, hogy ekkor $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4}$!

Megoldás:

$t = rs \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{s}{t}$ (lásd 26. ábra). Az állítás így:

$\frac{s_1}{t_1} + \frac{s_3}{t_3} = \frac{s_2}{t_2} + \frac{s_4}{t_4}$ alakban is írható. $ABCD$ érintőnégyszög $\Rightarrow$ $a + c = b + d$

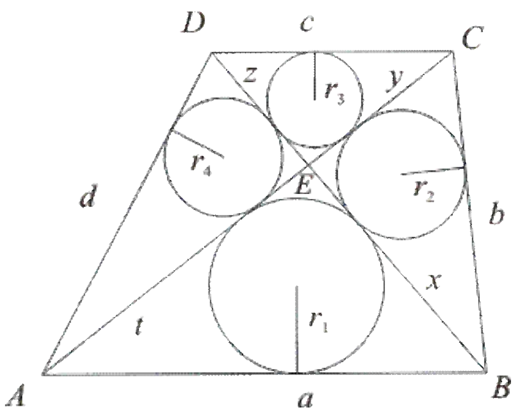
$/ + x + y + z + t \Rightarrow$ $k_1 + k_3 = k_2 + k_4$ $/2$ $\Rightarrow$

$s_1 + s_3 = s_2 + s_4$ *.

Jelölje t_1 az $ABE\triangle$ területét…

Ekkor $\frac{t_2}{t_1} = \frac{y}{t} = \frac{c}{a}$ Analóg: $\frac{t_4}{t_1} = \frac{z}{x} = \frac{c}{a}$. Így

$t_2 = t_4 = \frac{c}{a} t_1$.



26. ábra

Az $ABE\triangle \sim \triangle DCE$ (szögeik egyenlők). $\Rightarrow \frac{t_3}{t_1} = \frac{c^2}{a^2} \Rightarrow t_3 = \frac{c^2}{a^2} t_1$, $\frac{s_3}{s_1} = \frac{c}{a} \Rightarrow s_3 = \frac{c}{a} s_1$.

Így az állításunk:

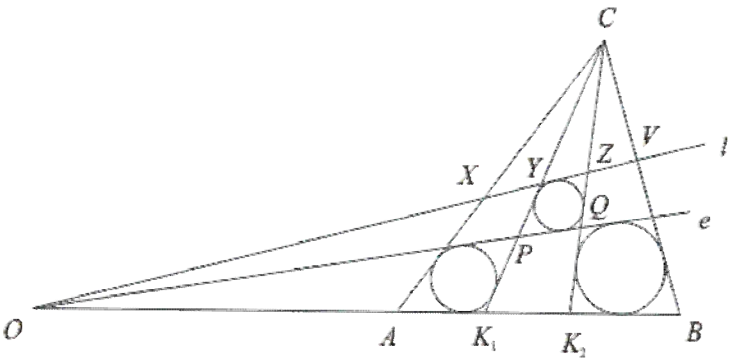
$$\frac{s_1}{t_1} + \frac{s_3}{t_3} \overset{?}{=} \frac{s_2}{t_2} + \frac{s_4}{t_4} \Rightarrow \frac{s_1}{t_1} + \frac{\frac{c}{a} s_1}{\frac{c^2}{a^2} t_1} \overset{?}{=} \frac{s_2 + s_4}{\frac{c}{a} t_1} \quad / \cdot \frac{c}{a} t_1 \Rightarrow \frac{c}{a} s_1 + s_1 \overset{?}{=} s_2 + s_4.$$ Másrészt: $\frac{c}{a} s_1 = s_3$.

$s_3 + s_1 = s_2 + s_4$ ez pedig a * egyenlőség teljesülését jelenti.

15. Feladat.

Adott az $ABC\triangle$, s annak AB oldalán két belső pont, K_1 és K_2 (A, K_1, K_2, B). Tekintsük az AK_1C és K_2BC háromszögekbe írt körök közös külső érintőit; ezek metszéspontját jelölje O. Mutassuk meg, hogy az AK_2C és a BK_1C háromszögekbe írt körök – AB oldaltól különböző – külső érintője illeszkedik az O pontra.

Megoldás:
Messe a CK_1 illetve CK_2 szakaszokat a másik külső érintő a P ill. Q pontban (lásd 27. ábra). Tekintsük a $CPQ\triangle$-be írt kört, s húzzuk meg O-ból e körhöz a másik érintőt is (l). A létrejövő metszéspontok legyenek X, Y, Z, V. Ekkor a 13-as számú feladat állításának értelmében AK_2ZX és K_1BVY négyszögek érintőnégyszögek, s ez, az állítás teljesülését jelenti.



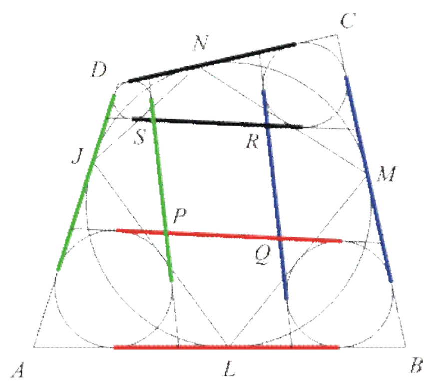
27. ábra

16. Feladat.

Az $ABCD$ érintőnégyszög beírt köre az oldalakat négy pontban érinti, a szomszédos oldalakon levő érintési pontokat összekötjük. Így a négyszög minden csúcsánál keletkezik egy kis háromszög. Megrajzoljuk ezeknek a beírt köreit. Tekintsük a szomszédos csúcsokhoz tartozó kis köröknek az oldalegyenesektől különböző külső érintőit. Tudjuk, hogy ez a négy egyenes egy négyszöget zár közre. Mutassuk meg, hogy a négyszög rombusz!

Megoldás:
A 7. feladatnál látottak alapján azt sejtjük, hogy a négyszög érintőnégyszög, s a szerkesztett ábra azt sugallja, hogy paralelogramma is (lásd 28. ábra). A kettő együtt biztosítaná $PQRS$ rombusz voltát.

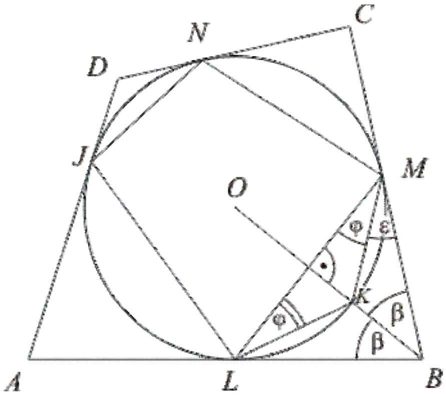
<u>Érintőnégyszög:</u> Az azonos színnel jelzett szakaszok egyenlők (triviális). Mivel $ABCD$ érintőnégyszög (és a külső pontból ugyanazon körhöz húzott érintő szakaszok is egyenlők), ezért a kék+zöld=piros+fekete$\Rightarrow$ nyilvánvalóan következik, hogy $RQ + SP = PQ + SR$, azaz $PQRS$ valóban érintőnégyszög.



28. ábra

<u>Paralelogramma:</u> A szerkesztett ábra alapján két észrevételt is tehetünk.
1.Sejtés: $l(P;Q) \parallel JM$. 2.Sejtés a kis körök középpontjai illeszkednek a nagy körre.

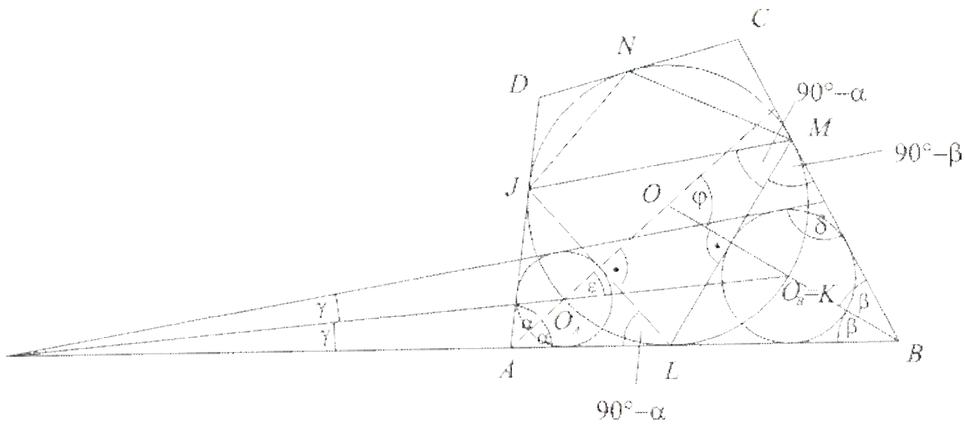
Kezdjük az utóbbival:
Messe a BO a kört K-ban (lásd 29. ábra).
Megmutatjuk, hogy K a beírt kör középpontja. $e = j$ (kétíves), mert azonos íven nyugvó kerületi szögek (j kétíves érintőszárú). j egyíves= j kétíves. Ebből j egyíves=e , azaz KM szögfelező, azaz K az $LBM\angle$ beírt körének középpontja.
Ha $a = b$, akkor $JMB\angle = d = 180° - 2a$ (lásd 30. ábra).
Ha pl. $a > b$, akkor: $j = a + b$, mert külső szöge az $ABO\angle$ -nek. $e = \frac{j}{2}$, mert j középponti, e pedig ugyanazon íven nyugvó kerületi szög.



29. ábra

$$g = a - e = a - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2} \Rightarrow d = 180° - 2b - 2g = 180° - 2b - (a-b) = 180° - a - b\ .$$

Valamint $JMB\angle = 180° - a - b$. Azaz a két kör – AB -től különböző – külső érintője párhuzamos a JM átlóval. Analóg módon mutatható meg a többi külső érintőről is. Az



30. ábra

előbbiekből következik, hogy a négyszög paralelogramma.
Érintőnégyszög+Paralelogramma=Rombusz.

17. Feladat.

Egy nem trapéz négyszög oldalainak meghosszabbításai messék egymást a P ill. Q pontokban. Mindkét ponton keresztül két-két egyenest húzunk, melyekkel a négyszöget 9 négyszögre bontjuk. Tudjuk, hogy a csúcsok melletti négy négyszög közül három érintőnégyszög. Mutassuk meg, hogy akkor a negyedik is az!

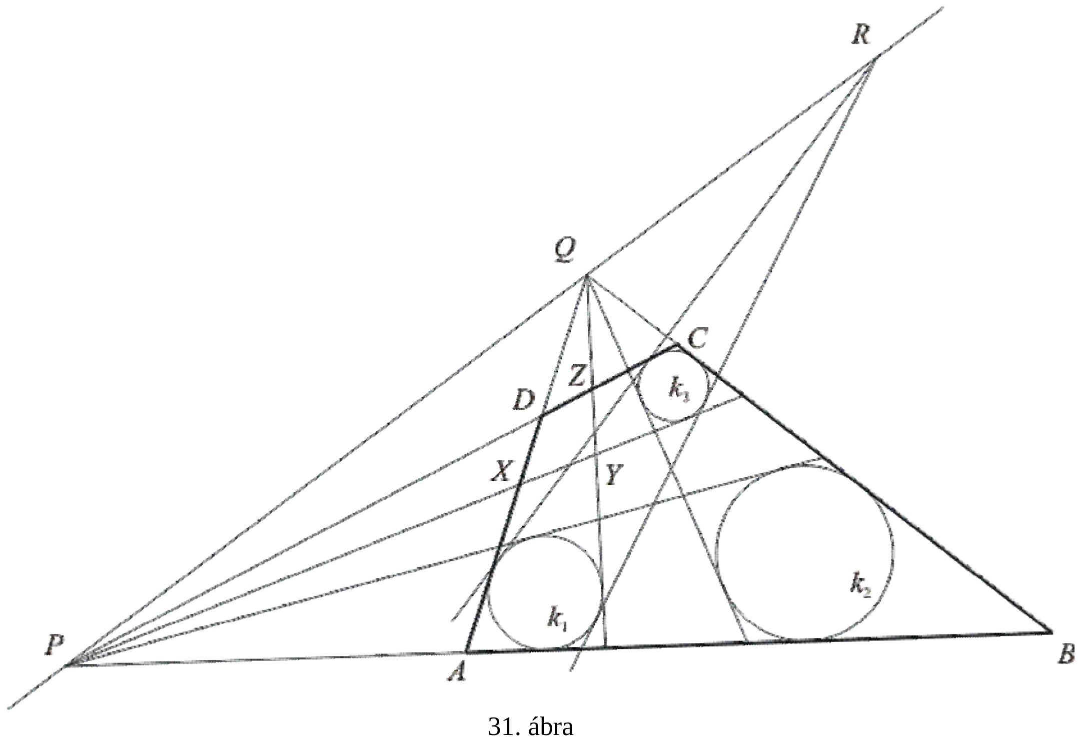
A megoldás kulcsa a következő tétel:

d’ Alambert tétele:
Legyen adott a síkon három egymáson kívüli kör. Ekkor az ezekből kiválasztható körpárokhoz húzott külső érintők metszéspontjai egy egyenesre illeszkednek. /hasonlósági egyenes/.

A következő bizonyítás Totik Vilmos: Lépjünk ki a térbe /Polygon 1993. június/ cikkéből való.:

„Minden kör fölé rajzoljunk meg egy gömböt (amelynek az adott kör főköre). Ekkor pl. a C_1 és C_2 körök érintőinek metszéspontja a megfelelő G_1 és G_2 gömbök érintőkúpjainak csúcspontja lesz. De a három kör közös (külső) érintő síkjai egyben érintősíkjai ezeknek az érintőkúpoknak, ezért az érintőkúpok csúcspontjainak rajta kell lenniük az érintősíkokon. Tehát a kérdéses pontok rajta vannak az érintő síkok metszésvonalán, amely persze egyenes.”

Megoldás:
Tekintsük a 31. ábrát! Tegyük fel, hogy az A, B és a C melletti négyszögek érintőnégyszögek! P és Q ’’adva van’’ – s az előző tétel értelmében – R-rel együtt egy egyenesre illeszkednek. Jelölje k_4 az $XYQ\triangle$ beírt körét; és most tekintsük a k_1, k_3 és k_4 köröket. Ezek külső érintőinek metszéspontjainak is egy egyenesre kell illeszkedniük. k_1 és k_4 adja Q-t, k_1 és k_3 adja R-t. Így a hasonlósági egyenes ugyanaz maradt, s így k_3 és k_4 közös külső érintőinek metszéspontjának is erre kell illeszkednie. Az egyik közös külső érintő (X,Y egyenese) P-ben metszi a hasonlósági egyenest $\Rightarrow$ a másik közös külső érintőnek is illeszkednie kell P-re. Ilyen – k_3-at érintő – már van, s ez a DC egyenese. $\Rightarrow$ DC érinti k_4 kört, azaz $DXYZ$ is érintőnégyszög.



31. ábra