Rózsaablakok és társaik

Készült a Közoktatási Modernizációs Közalapítvány támogatásával (2004. október)

Egy ponthalmazt (alakzatot) önmagába vivő egybevágóságok csoportot alkotnak, azaz két ilyen egybevágóság egymásutánja (szorzata) is egybevágóság és asszociatív (vagyis, ha α, β és γ egybevágóságok, akkor $\gamma(\beta\alpha) = (\gamma\beta)\alpha$), továbbá minden egybevágóságnak van inverze, ami szintúgy egybevágóság és a képalakzatot viszi a tárgyalakzatba, no meg van un. egységelem: az identitás, amely minden pontot helyben tart.

A fenti csoportot az **alakzat szimmetria-csoportjának** nevezzük. Ez lehet folytonos vagy diszkrét.

Folytonos: ha az alakzat bármely P pontjának, amely a transzformációknak nem fixpontja, bármely környezetében van a P-nek tőle különböző képe. Ilyen pl. a körlemez középpontja körüli – tetszőleges szögű – forgatások csoportja.

Diszkrét: ellenkező esetben, vagyis, ha a P pontnak van olyan környezete, amelyben P -nek egyetlen, tőle különböző képe sincs. Lásd: a körnek középpontja körüli, a $2\pi/n$ $(n\in N)$ szög egész többszörösével történő elforgatásai.

Egy alakzat diszkrét szimmetria-csoportját **ornamentális (díszítő) csoportnak** is mondjuk.
Az eltolás nélküli ornamentális csoport a **rozetta (rózsaablak) csoport**.
A sík egybevágóságainak vizsgálata nyomán (Lásd: A sík egybevágóságai és a tengelyes tükrözések c. cikket (I.)) belátjuk, hogy a rozetta-csoport elemei között csak egyetlen pont körüli forgatások, mégpedig a $2\pi/n$ szög egész többszöröseivel történő forgatások szerepelhetnek, továbbá, ha a csoport tartalmaz tengelyes tükrözést, akkor a tengely az előbbi forgásközéppontra illeszkedik.

1. **Tétel**: Ha a csoport tartalmaz pont körüli forgatást, akkor az csak a pont körüli $2\pi/n$ szöggel, illetve ennek egész többszöröseivel történő forgatás lehet.

Bizonyítás: Legyen P_1 a forgás középpontjától különböző pont és a forgás egymásutáni alkalmazásával adódó – tőle különböző – képei rendre: $P_2, P_3, \ldots, P_n$. (A csoport diszkrét, tehát egy tetszőleges pontjának csak véges sok képe lehet.)
Nyilvánvaló, hogy P_n képe a P_1 lesz, mivel egy-egy forgás során P_1 a P_2-be, P_2 a P_3-ba, . . . , P_{n-1} a P_n-be megy. Ezért egy-egy forgás a teljes szög n-ed részével történik, azaz, ha O a forgás közepe, úgy $P_1OP_2\measuredangle = 2\pi / n = P_kOP_{k+1}\measuredangle$ $\quad (1\leq k \leq n$ és $n+1=1)$

2. **Tétel**: A rozetta-csoportnak nincs két (különböző) középpont körüli valódi forgatása.

Bizonyítás: Indirekt úton okoskodunk. Tegyük fel, hogy az F_1 az O_1 pont körüli φ_1 szögű, és az F_2 egy O_2 pont körüli φ_2 szögű elforgatás eleme a rozetta-csoportnak.
Ekkor a csoportok eleme az $F_2^{-1}F_1^{-1}F_2F_1$ forgatások szorzata is, ami mint a már hivatkozott cikkben is láttuk, forgatás – mégpedig a forgatások szögének összegével történő forgatás – vagy eltolás.

Mivel a $\varphi_1+\varphi_2+(-\varphi_1)+(-\varphi_2)=2\pi k,\ k \in N$, ezért a csoport fenti eleme vagy az identitás, vagy egy (nem triviális) eltolás.

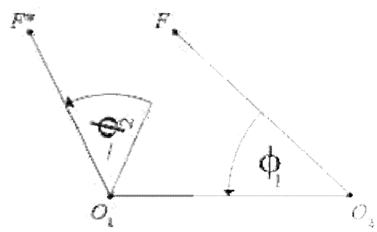
Ha az $F_2^{-1}F_1^{-1}F_2F_1$ az identitás, akkor minden pont fixpont.
Legyen P az a pont, amelyet az F_1 forgatás O_2-be visz. Így P képe az O_2,

azaz $F_1(P)=O_2$.

Ezért $F_2(F_1(P))=F_2(O_2)=O_2$,

és ezt az F_1 inverze a P-be viszi, vagyis

$F_1^{-1}(F_2(F_1(P)))=F_1^{-1}(O_2)=P$.



1. *ábra*

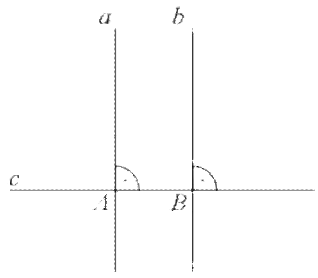
Ezzel
$F_2^{-1}(F_1^{-1}(F_2(F_1(P))))=F_2^{-1}(P)=P^*\neq P$ (1. ábra), mivel φ_2 nem a 2π egész többszöröse, tehát a P nem fixpont, így az $F_2^{-1}F_1^{-1}F_2F_1$ nem az identitás, ezért csakis eltolás lehet, ami ellentmond az eltolás-nélküliségnek.

Következmény: Ha a rozetta-csoport nem tartalmaz tengelyes tükrözést,akkor az ilyen csoport elemei csak egyetlen pont körüli $k\cdot 2\pi/n$ szögű elforgatások lesznek, amelyben $0 \leqq k \leqq n-1$ egész és $n \geqq 1$ egész.

Nyilvánvaló, hogy az $(an+k)\cdot(2\pi/n)$ elforgatás $(a \in N)$ azonos a $k(2\pi/n)$ szögű elforgatással, így a csoportnak n darab eleme van: $F, F^2, F^3, \ldots, F^n=I$, ahol F a középpont körüli $(2\pi/n)$-szögű elforgatás, és F^k a $k(2\pi/n)$ szögű elforgatás, míg I az identikus leképezés.
E csoport az **n-ed rendű forgáscsoport** vagy az **n-edrendű svasztika** nevet viseli. **(**A csoport az un. **n -edrendű ciklikus csoport** egy képviselője.) Jele: C_n .

Korábban beláttuk, hogy, ha egy csoport elemei között vannnak tengelyes tükrözések, akkor egyrészt a tengelyek között nem lehet két párhuzamos, hiszen az ezekre történő tükrözések egymásutánja eltolás, így tehát a tengelyek páronként metszik egymást, másrészt a páronkénti metszésből adódóan ugyanazon a ponton kell valamennyi tengelynek átmennie.
Ellenkező esetben ugyanis, ha van három egymást páronként különböző pontban metsző egyenesre tükrözés a csoportban, akkor ezek szorzata egy valódi csúszástükrözés is eleme a csoportnak és ennek kétszer egymásutáni alkalmazása eltolást adna, mivel

$$(cba)(cba)=(cb)(ac)(ba)=(cb)(ca)(ba)=c(bc)a(ba)=c(cb)a(ba)=(cc)(ba)(ba)=4\overrightarrow{AB}$$

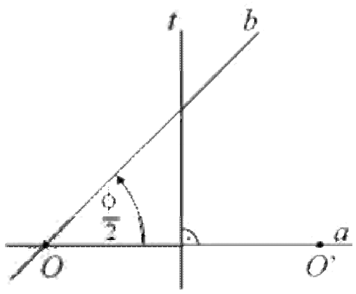


(2. ábra)

(Felhasználtuk a leképezések asszociatív és a merőleges egyenesekre való tükrözések szorzatának kommutatív voltát.)

3. **Tétel**: Ha a rozetta-csoport tartalmaz pont körüli forgatáson kívül tengelyes tükrözést is, akkor a tengely illeszkedik a forgásközéppontra.

Bizonyítás: Indirekt gondolkodunk. Tegyük fel, hogy az O közepű φ (≠ 2πn) szögű F forgatás O közepe nem illeszkedik a *t* tengelyre tükrözés egyenesére



3. ábra

Mivel *t* az alakzat szimmetria-tengelye, ezért O-nak erre való tükörképe az O' a képalakzatnak is (tehát az eredeti alakzatnak) forgásközepe.
Ez pedig ellentmond 2. Tételünknek.
A fenti állítást úgy is igazolhatjuk, hogy a korábban is említett cikk 2. és 9. tétele szerint

F(O ; φ)= ba (3. ábra),

tehát mind a *t*F = *tba* , mind az F*t* = *bat* a csoport eleme, és 3 egyenesre tükrözés szorzata csúszástükrözés, amely a mi esetünkben valódi, hiszen

$a \perp t$ és $a \cap t = O \dot{-} t$.

Fenti tételeinkből, és a már idézett cikkben foglaltakból következik a

4. **Tétel**:
1.) Tengelyes tükrözéseket tartalmazó rozetta-csoportnak a C_n csoport valódi részcsoportja;
2.) A tengelyes tükrözések tengelyeinek páronkénti hajlásszöge $k\pi/n$
$0 \leqq k \leqq n\text{-}1,\ k \in N$;
A tengelyes tükrözéseket is tartalmazó, D_{2n} –nel jelölt **diéder-csoport** ($n \geqq 2$ esetén a szabályos n-szög szimmetriacsoportja) elemeit a C_n csoportot generáló F(0; 2π/n) forgatás egymásutánjai, az F^i $(0; i2\pi/n)$ $1 \leqq i \leqq n$ forgatások és a *t* tengelyre tükrözéssel adódó $t\,F^i$ tengelyes tükrözések adják, azaz a $D_{2n}=\{F^i\ ;\ t\,F^i\}$ diédercsoportnak 2n eleme van.

Ugyanis a korábbi cikkünkben foglalt 2. Tétel miatt $tF^i = t(tt_i) = t_i$, ahol a t_i az a tengely, amelyet az O pont körüli iπ/n szögű forgatás visz a t tengelybe. Hasonlóan, $F^j\,t = (t_j\,t)\,t = t_j$, ahol a t_j a t-nek O körüli j π/n-szögű elforgatottja.
A D_{2n}-ben tehát n darab pont körüli forgatás és n darab tengelyre tükrözés található.

Összefoglalva: A rozettacsoport tehát vagy a pont körüli forgatásokból álló C_n csoport, vagy a C_n-t valódi részcsoportként tartalmazó, az előbbi elemein kívül tengelyes tükrözéseket is tartalmazó D_{2n} csoport.

Pogáts Ferenc