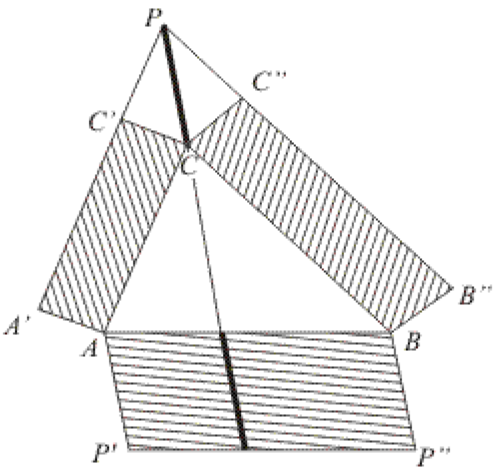
Kubatov Antal
Táncsics Mihály Gimnázium, Kaposvár

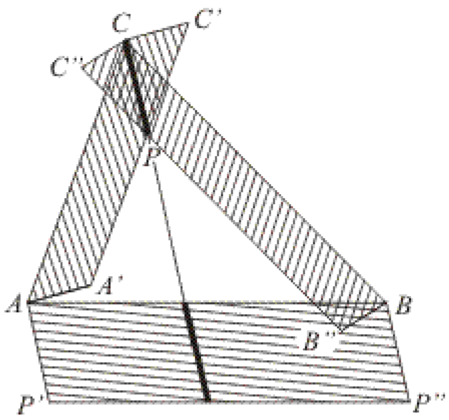
Az Erdős-Mordell egyenlőtlenség

Az Erdős-Mordell tétel:
Ha *P* az *ABC* háromszög belső- vagy határpontja, és *P* távolsága a háromszög oldalegyeneseitől *x*, *y* és *z*; csúcsaitól vett távolsága *u*, *v* és *w*, akkor $u+v+w \geq 2(x+y+z)$.

A sejtést Erdős Pál fogalmazta meg 1935-ben, s a KÖMAL 1935. februári számában már közölte is L. J. Mordell (manchesteri egyetemi tanár) megoldását. Az amerikai Monthly jelentette meg Mordell és Barrow megoldását 1937-ben. Az első elemi megoldást Donat Konstantinovich Kazarinoff adta 1945-ben. Az itt közölt bizonyítás az ő általa kidolgozott bizonyítás.

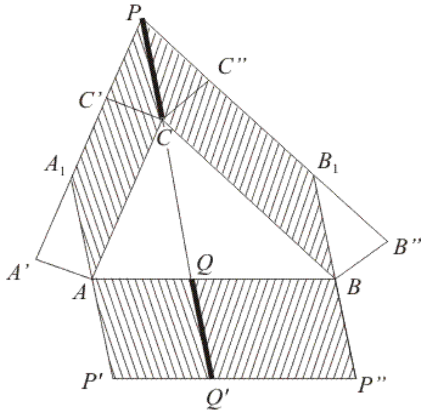
A bizonyításhoz először belátunk két (önmagában is szép) segédtételt:
Az első Papposz (van, aki szerint Pappus) tétele. Papposz i. sz. IV. században élő alexandriai tudós, aki Synagógé (Gyűjtemény) című munkájában összegyűjtötte az addigi geometriai ismereteket, de saját eredményei is voltak.





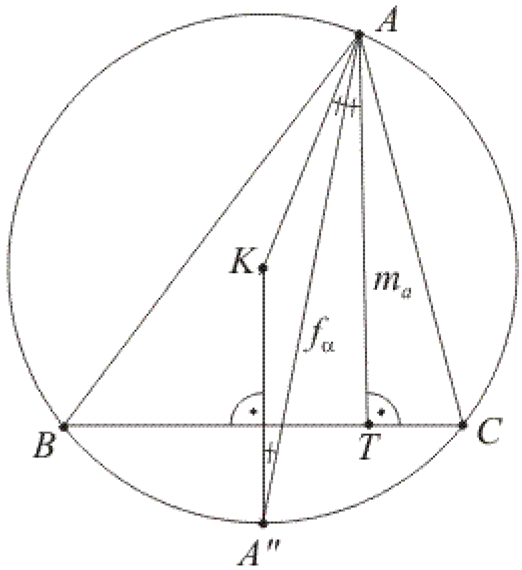
Papposz tétele:
Az *ABC* háromszög *AC*, illetve *BC* oldalaira *AA'C'C*, illetve *BB"C"C* paralelogrammákat szerkesztünk úgy, hogy vagy mindkettő a háromszögön kívül, vagy mindkettő (legalább részben) a háromszögön belül legyen. Az *A'C'* és *B"C"* oldalakat meghosszabbítjuk úgy, hogy metszék egymást (*P* pont). Szerkesszünk egy harmadik *AP'P"B* paralelogrammát úgy, hogy *AP'* párhuzamos és egyenlő legyen *CP*-vel. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $T_{AA'C'C} + T_{BB"C"C} = T_{AP'P"B}$

Bizonyítás: Legyen A_1 a $P'A$ és $A'P$ egyenesek metszéspontja, míg $B1$ a $P''B$, $B''P$ egyenesek metszéspontja. Legyen továbbá, Q és Q' a PC egyenesnek AB-vel, illetve $P'P''$-vel való metszéspontja. Az ábráról leolvasható, hogy az AA_1PC paralelogramma területe az $AA'C'C$ és az $AP'Q'Q$ paralelogramma területével is egyenlő, illetve $BP''Q'Q$ és $BB''C''C$ is egyenlő területűek, hiszen mindkettejük területe BB_1PC területével egyezik meg.



Megjegyzés: Ha ABC derékszögű háromszög és a paralelogrammák négyzetek, akkor a Pitagorasz-tételt kapjuk.

2. segédtétel
Az ABC háromszög köré írt körének középpontját jelölje K. Az f_a felezi az AK és a m_a által bezárt szöget.

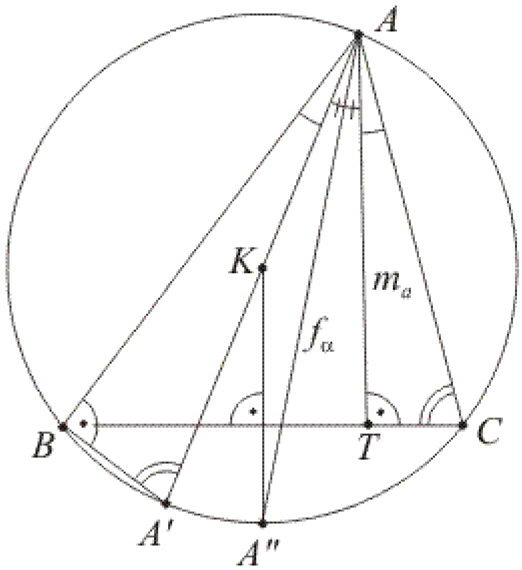


Bizonyítás (1. módszer):
Tudjuk, hogy a háromszög belső szögfelezője és a szemközti oldal felezőmerőlegese a köré írt körön metszi egymást. Így az alábbi ábrán $TAA''\angle$ és $AA''K\angle$ váltószögek, míg az $AA''K$ egyenlő szárú háromszögben $A''AK\angle = AA''K\angle$.

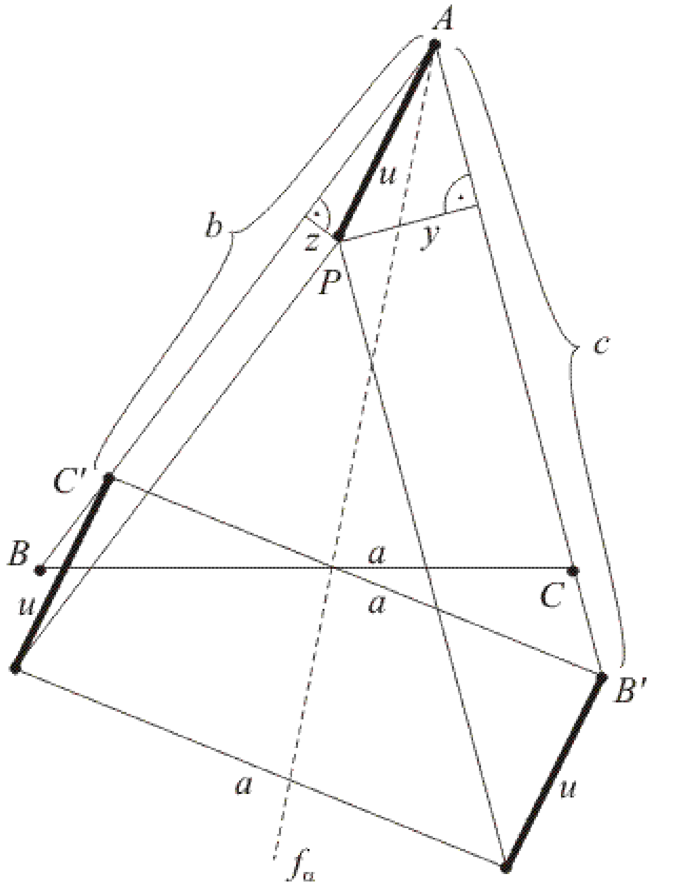
.

Bizonyítás (Kazarinoff): Legyen A' ill. A'' az AK átmérőegyenes ill. az f_α szögfelező és a körülírt kör metszéspontja. $BCA \angle = BA'A \angle$ (azonos íven nyugvó kerületi szögek), $ABA' \angle = 90°$ (Thalész tétele).

Ezért $A'AB \angle = TAC \angle$ és f_α szögfelező $\Rightarrow$ $A'AA'' \angle = A''AT \angle$. Ami ebből nekünk kelleni fog: ha f_α-ra tükrözöm a BC oldalt, akkor a $B'C'$-re az AK egyenese lesz merőleges, hisz AK egyenese az m_a képe



és a tükrözés szögtartó.
Másképp fogalmazva: Ha *P* az *ABC* háromszög belső vagy határpontja (ez most nem is fontos), akkor az *AP* egyenes akkor és csak akkor lesz merőleges a *B’C’*-re, ha a *P* pont rajta van az *AK* egyenesén.



Ezek után nézzük az Erdős-Mordell tétel bizonyítását:
Tükrözzük *BC*-t f_a-ra, s alkalmazzuk Papposz tételét az *AC’B’* háromszögre. A paralelogrammákat az *AB’*, illetve *AC’* oldalakra –befelé– rajzoljuk. A *B’C’* oldalon keletkezett paralelogramma területének maximuma állandó.

Így $au \ge bz + cy$, és „=” ⇔ *P* illeszkedik *AK*-ra $\qquad u \ge \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}y$

Analóg módon következik:

$$v \ge \frac{a}{b}z + \frac{c}{b}x \text{, és „=” } \Leftrightarrow P \text{ illeszkedik } BK\text{-ra}$$

$$w \ge \frac{a}{c}y + \frac{b}{c}x \text{, és „=” } \Leftrightarrow P \text{ illeszkedik } CK\text{-ra}$$

Összegezve a három egyenlőtlenséget:

$$u + v + w \ge \underbrace{\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)}_{\ge 2} x + \underbrace{\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right)}_{\ge 2} y + \underbrace{\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)}_{\ge 2} z \ge 2(x + y + z),$$

és egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $a = b = c$, vagyis a háromszög szabályos, és $P \equiv K$, azaz *P* a szabályos háromszög középpontja.

Az Erdős-Mordell egyenlőtlenség alkalmazása, avagy készítsünk mi feladatokat

Előzetes megjegyzés
Amikor a tételt a háromszög köré írható kör középpontjára, vagy a magasságpontra alkalmazzuk, akkor mindig nem tompaszögű háromszögre gondolunk, és nem foglalkozunk azzal, hogy a kapott egyenlőtlenség egyébként igaz-e minden háromszögre.

Legyen $P = O$!
Ekkor

$$\sin\frac{a}{2} = \frac{r}{u} \Rightarrow u = \frac{r}{\sin\frac{a}{2}}$$

Erdős-Mordell:

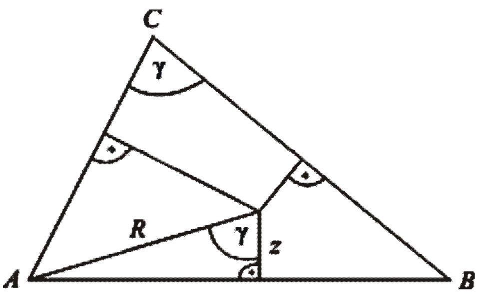
$$\frac{r}{\sin\frac{a}{2}} + \frac{r}{\sin\frac{b}{2}} + \frac{r}{\sin\frac{g}{2}} \geq 2(r + r + r)$$

Tehát feladhatjuk az alábbi példát:

1. feladat

Bizonyítsuk be, hogy bármely hegyesszögű háromszögben teljesül az $\frac{1}{\sin\frac{a}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{b}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{g}{2}} \geq 6$ egyenlőtlenség!

Legyen $P = K$!



$$\cos g = \frac{z}{R} \Rightarrow z = R\cos g$$

Erdős-Mordell:

$$R + R + R \geq 2R(\cos a + \cos b + \cos g)$$

Tehát újabb példánk:

2. feladat

Bizonyítsuk be, hogy bármely hegyesszögű háromszög szögeire teljesül a

$$\frac{3}{2} \geq \cos a + \cos b + \cos g$$

egyenlőtlenség!

Másrészt:

$$\sqrt[3]{\cos a \cos b \cos g} \leq \frac{\cos a + \cos b + \cos g}{3} \leq \frac{1}{2}$$

$$\cos a \cos b \cos g \leq \frac{1}{8}$$

Ezenkívül ismert, hogy

$$\cos a + \cos b + \cos g = 1 + \frac{r}{R}$$

azaz

$$R\cos a + R\cos b + R\cos g = R + r$$

$$R + r \le \frac{3}{2}R$$

Tehát most:

3. feladat (Sugáregyenlőtlenség)

Igazoljuk, hogy ha a hegyesszögű háromszög beírt körének sugara *r*, a körülírt kör sugara pedig *R*, akkor

$$2r \le R$$

Vegyük észre, hogy az Erdős-Mordell tétel nem produkál mindig érdekes egyenlőtlenségeket, hiszen ha *P*-t pl. az oldalra helyezzük, akkor elég durva a becslés. Ha pedig $P \equiv S$, akkor

$$\frac{2}{3}(s_a + s_b + s_c) \ge 2\left(\frac{1}{3}m_a + \frac{1}{3}m_b + \frac{1}{3}m_c\right)$$

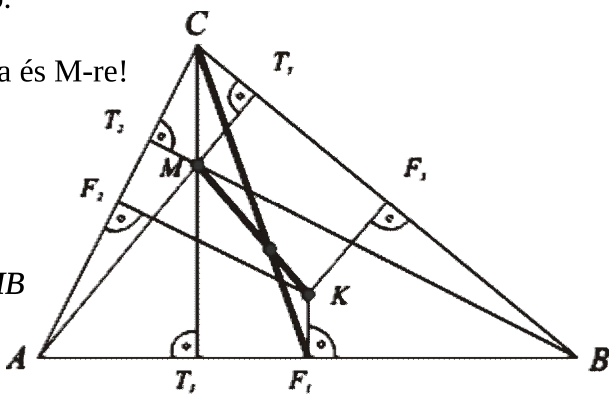
és ebből a

$$s_a + s_b + s_c \ge m_a + m_b + m_c$$

nem túl érdekes egyenlőtlenséghez jutunk.
Ha az Erdős-Mordellt

$$\frac{u+v+w}{x+y+z} \ge 2$$

alakban tekintjük, akkor felmerül a kérdés, hogy nem szabályos háromszögben hol veszi fel a tört a minimumát. Ez számítógéppel vizsgálható.



Írjuk fel az Erdős-Mordell egyenlőtlenséget K-ra és M-re!
K:

$$3R \ge 2(KF_1 + KF_2 + KF_3)$$

M:

$$MA + MB + MC \ge 2(MT_1 + MT_2 + MT_3)$$

$$MT_1 = m_c - MC \,|\, MT_2 = m_a - MA \,|\, MT_3 = m_b - MB$$

Így:

$$MA + MB + MC \ge 2(m_a + m_b + m_c - (MT_1 + MT_2 + MT_3))$$

Átrendezve:

$$3(MA + MB + MC) \ge 2(m_a + m_b + m_c)$$

Az *MCS* és SF_1K háromszögek nyilvánvaló hasonlóságából: $MC = 2KF_1$. Így az előzőkből:

$$6(KF_1 + KF_2 + KF_3) \ge 2(m_a + m_b + m_c)$$

$$m_a + m_b + m_c \le \frac{9}{2}R$$

A magasságok összegét alulról is becsülhetjük:

$$m_a + m_b + m_c = \frac{2t}{a} + \frac{2t}{b} + \frac{2t}{c} = 2t\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 2rs\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) =$$

$$= r(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = r\left(1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + 1 + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 1\right) \le 9r$$

számtani és harmonikus középpel is elrendezhető.
Összegezve, új feladatunk:

4. feladat

Mutassuk meg, hogy a hegyesszögű háromszög beírt, körülírt körének sugara valamint magasságai között fennáll a

$$9r \le m_a + m_b + m_c \le \frac{9}{2}R$$

egyenlőtlenség.

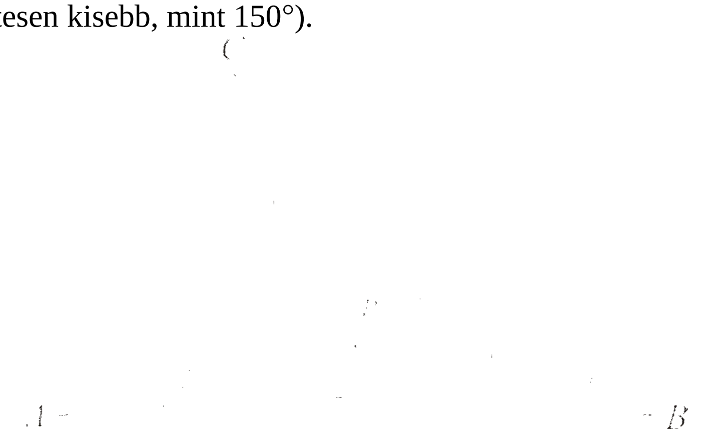
Megjegyzés: ebből újra megkaptuk a sugáregyenlőtlenséget.

5. feladat

Legyen *P* az *ABC* háromszög belső pontja. Bizonyítsuk be, hogy a *PAB*, *PBC*, *PCA* szögek közül legalább az egyik nem nagyobb 30°-nál. (N. M. D. 1991/5).

Bizonyítás*:*
Ha a háromszögnek van legalább 150°-os szöge, akkor triviális.

Ha mindegyik szög kisebb 150°-nál, akkor tegyük fel, hogy mindegyik a_i nagyobb, mint 30° (de ekkor természetesen kisebb, mint 150°).



$$\sin a_1 = \frac{z}{u} > \frac{1}{2} \Rightarrow u < 2z$$

$$\sin a_2 = \frac{x}{v} > \frac{1}{2} \Rightarrow v < 2x$$

$$\sin a_3 = \frac{y}{w} > \frac{1}{2} \Rightarrow w < 2y$$

Összegezve: $u + v + w < 2(x + y + z)$, ami ellentmond az Erdős-Mordell tételnek.

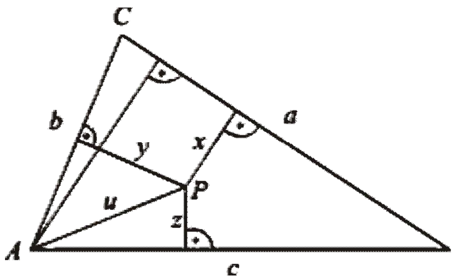
6. feladat (Oppenheim, University of Malaya prof.)

$uvw \geq (x+y)(y+z)(z+x)$

$uv+vw+wu \geq (x+y)(y+z)+(z+x)(x+y)+(y+z)(z+x)$

Ez utóbbit a mai napig nem bizonyították be (tudtommal).

a) Bizonyítás:



$u + x \geq m_a$, és egyenlőség ⇔ P illeszkedik m_a-ra.

$a(u+x) \geq am_a = 2T_\Delta = cz + ax + by$

$au \geq by + cz$

Másrészt az Erdős-Mordell tétel levezetésekor láttuk:

$au \geq bz + cy$

Összegezve:

$2au \geq by + cz + bz + cy = (b+c)(z+y)$

Analóg módon:

$2au \geq (b+c)(z+y)$

$2bv \geq (a+c)(x+z)$

$2cw \geq (a+b)(x+y)$

Az egyenleteket összeszorozva kapjuk:

$8abc \cdot uvw \geq (a+b)(b+c)(c+a)(x+y)(y+z)(z+x)$

Használjuk fel a mértani- és számtani közepek közötti kapcsolatot:

$8abc \cdot uvw \geq 2\sqrt{ab}\,2\sqrt{bc}\,2\sqrt{ca}\,(x+y)(y+z)(z+x)$

$\underline{uvw \geq (x+y)(y+z)(z+x)}$, és egyenlőség ⇔ ha a = b = c és P illeszkedik ma-ra, mb-re és mc-re is, vagyis a háromszög szabályos és P a középpontja.

7. feladat

Alkalmazzuk az előző eredményt, ha

a) $P = O$

b) $P = K$

c) $P = S$

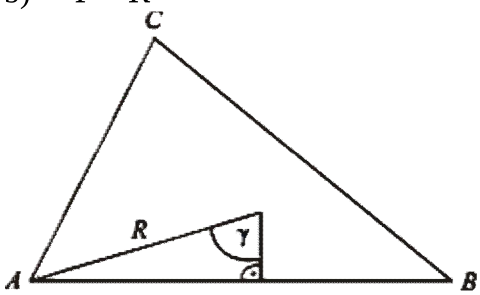
Megoldás:

a) $P = O$

$$\frac{r}{\sin\frac{a}{2}}\cdot\frac{r}{\sin\frac{b}{2}}\cdot\frac{r}{\sin\frac{g}{2}}\geq(r+r)(r+r)(r+r)=8r^3$$

$$\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{g}{2}\leq\frac{1}{8}$$

b) $P = K$



$$R^3\geq(R\cos a+R\cos b)(R\cos b+R\cos g)(R\cos g+R\cos a)$$

$$1\geq(\cos a+\cos b)(\cos b+\cos g)(\cos g+\cos a)$$

De a jobb oldal folytatható!

$$1\geq 2\sqrt{\cos a\cos b}\,2\sqrt{\cos b\cos g}\,2\sqrt{\cos g\cos a}=8\cos a\cos b\cos g$$

c) $P = S$

$$\frac{2}{3}s_a\cdot\frac{2}{3}s_b\cdot\frac{2}{3}s_c\geq\left(\frac{1}{3}m_a+\frac{1}{3}m_b\right)\left(\frac{1}{3}m_b+\frac{1}{3}m_c\right)\left(\frac{1}{3}m_c+\frac{1}{3}m_a\right)$$

$$8s_as_bs_c\geq(m_a+m_b)(m_b+m_c)(m_c+m_a)$$

Használjuk fel, hogy $m_a=\dfrac{2T}{a}$!

$$s_as_bs_c\geq T^3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)\geq T^3\frac{2}{\sqrt{ab}}\frac{2}{\sqrt{bc}}\frac{2}{\sqrt{ca}}=\frac{8T^3}{abc}$$

T helyébe is sok minden írható, ill. s_a, s_b, s_c is kifejezhető az oldalakkal is…

Megjegyzés:

1) Van, hogy külön emlegetik az $uvw\geq 8xyz$ azonosságot, de ezt azonnal kapjuk az előzőből a számtani- és mértani közép alkalmazásával:

$$uvw\geq(x+y)(y+z)(z+x)\geq 2\sqrt{xy}\,2\sqrt{yz}\,2\sqrt{zx}=8xyz$$

2) Igazoljuk, majd alkalmazzuk:

a) $u^2+v^2+w^2>2\left(x^2+y^2+z^2\right)$ (P belső pont)

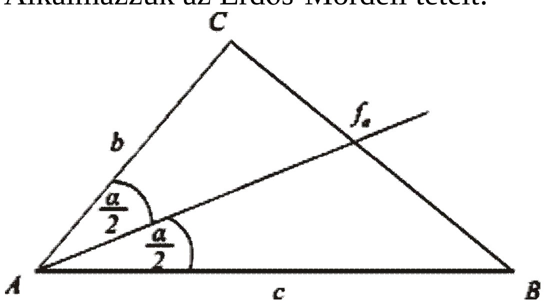
b) $\sqrt{u}+\sqrt{v}+\sqrt{w}\geq\sqrt{2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)$

Írjuk fel újra az Erdős-Mordell egyenlőtlenséget O-ra, de most dolgozzunk a szögfelezőkkel!

Alkalmazzuk a szögfelezőtételt az AA_1C háromszögre is:

$$u = \frac{f_a \cdot b}{b + \dfrac{ab}{b+c}} = \frac{f_a (b+c)}{a+b+c}$$

Alkalmazzuk az Erdős-Mordell tételt:



$$\frac{1}{2s}\left[f_a (b+c) + f_b (c+a) + f_g (a+b)\right] \geq 6r$$

$$\boxed{f_a (b+c) + f_b (c+a) + f_g (a+b) \geq 12rs = 12T_\Delta}$$

Ez persze tovább fejleszthető, ha pl. a szögfelezők hosszát kifejezzük más módon, illetve a négyzetes- és számtani közepek közötti kapcsolat alkalmazásával.

Írjuk fel a háromszög kétszeres területét kétféleképpen:

$$bc \sin a = cf_a \sin\frac{a}{2} + bf_a \sin\frac{a}{2} \qquad\qquad 2bc \sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2} = f_a \sin\frac{a}{2}(b+c)$$

$f_a = \dfrac{2bc}{b+c}\cos\dfrac{a}{2}$. Ebből egyrészt melléktermékként adódik, hogy $f_a < \sqrt{bc}$, másrészt a fent bekeretezett összefüggés az alábbi alakot ölti:

$$\boxed{bc\cos\frac{a}{2} + ca\cos\frac{b}{2} + ab\cos\frac{g}{2} \geq 6T_\Delta}$$

vagy

$$\boxed{\left(b^2 + c^2\right)\cos\frac{a}{2} + \left(c^2 + a^2\right)\cos\frac{b}{2} + \left(a^2 + b^2\right)\cos\frac{g}{2} \geq 12T_\Delta}$$

Fejezzük ki a szögfelező hosszát — és így *u*-t is — csak az oldalak segítségével:

$$f_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{a}{2}$$

A linearizáló formulából:

$$\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}=\sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}}$$

$$\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$f_a=\sqrt{\frac{4b^2c^2}{(b+c)^2}\cdot\frac{s(s-a)}{bc}} \qquad \text{és} \qquad u=\frac{b+c}{a+b+c}f_a=\sqrt{\frac{(b+c)^2}{4s^2}\cdot\frac{4bcs(s-a)}{(b+c)^2}}$$

$u=\sqrt{\frac{bc(s-a)}{s}}$ Analóg módon következik: $v=\sqrt{\frac{ca(s-b)}{s}}$ és $w=\sqrt{\frac{ab(s-c)}{s}}$

De ekkor $u+v+w$ felülről is becsülhető:

$$u+v+w=\sqrt{bc}\sqrt{\frac{s-a}{s}}+\sqrt{ca}\sqrt{\frac{s-b}{s}}+\sqrt{ab}\sqrt{\frac{s-c}{s}}\le\sqrt{ab+bc+ca}\sqrt{\frac{s-a}{s}+\frac{s-b}{s}+\frac{s-c}{s}}=\sqrt{ab+bc+ca}$$

$$\boxed{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\ge\sqrt{ab+bc+ca}\ge u+v+w=\sqrt{\frac{bc(s-a)}{s}}+\sqrt{\frac{ca(s-b)}{s}}+\sqrt{\frac{ab(s-c)}{s}}\ge 6r}$$

Tekintsük most az Erdős-Mordell egyenlőtlenség általánosítási lehetőségeit!

Megjegyzés: Szokás az alábbi tételt az Erdős-Mordell tétel általánosításának tekinteni háromszögre:

> Legyen *P* az *ABC* háromszög tetszőleges belső- vagy határpontja. Az *APB*, *BPC*, *CPA* szögek szögfelezői messék a szemközti oldalakat *C'*, *A'* és *B'* pontokban. Ekkor $PA+PB+PC\ge 2(PA'+PB'+PC')$, azaz $u+v+w\ge 2(PA'+PB'+PC')$.

Megoldás:

A szögfelezők hossza:

$$PA'=\frac{2vw}{v+w}\cos\frac{a}{2}\le\sqrt{vw}\cos\frac{a}{2}$$

$$PB'=\frac{2uw}{u+w}\cos\frac{b}{2}\le\sqrt{uw}\cos\frac{b}{2}$$

$$PA'=\frac{2uv}{u+v}\cos\frac{g}{2}\le\sqrt{uv}\cos\frac{g}{2}$$

Másrészt:

$$\cos\frac{g}{2} = \cos\left(180° - \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)\right) = -\cos\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right) = \sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2} - \cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}$$

Igazolni kell, hogy

$$u + v + w - 2\sqrt{vw}\cos\frac{a}{2} - 2\sqrt{uw}\cos\frac{b}{2} - 2\sqrt{uv}\cos\frac{g}{2} \geq 0$$

Használjuk az előző összefüggést:

$$u + v + w - 2\sqrt{vw}\cos\frac{a}{2} - 2\sqrt{uw}\cos\frac{b}{2} - 2\sqrt{uv}\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2} + 2\sqrt{uv}\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2} \geq 0$$

Ez átrendezve:

$\left(\sqrt{v}\sin\frac{a}{2} - \sqrt{u}\sin\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{w} - \sqrt{v}\cos\frac{a}{2} - \sqrt{u}\cos\frac{b}{2}\right)^2 \geq 0$, ez pedig igaz.

Egyenlőség $\Leftrightarrow$ u = v = w és $a = b$ és $1 = 2\cos\frac{a}{2}$, vagyis $a = 120°$

$$a = b = g = 120°$$

Azaz a háromszög szabályos és ***P*** a középpontja.

Konvex sokszögekre (Fejes Tóth László, 1948):

$$R_1 + R_2 + \mathbf{K} + R_n \geq \frac{1}{\cos\frac{p}{n}}\left(r_1 + r_2 + \mathbf{K} + r_n\right)$$

Lenhard:

Nem kell, hogy konvex legyen, elég, ha *P*-ből látszik a sokszög határának minden pontja.

P. Pech (1994):

Térbeli sokszögekre is (*P* tartozzék a sokszög konvex burkához)

És persze vannak általánosítások a nemeuklideszi geometriákban is…

Az Erdős-Mordell tétel térbeli általánosítása

Szabályos tetraéder esetén tudjuk: $R = 3r$, így $4R = 3\cdot 4r$, vagy másként $R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = 3(r_1 + r_2 + r_3 + r_4)$.
Ezek alapján adódik a

Sejtés:
$R_1 + R_2 + R_3 + R_4 \geq 3(r_1 + r_2 + r_3 + r_4)$

Nézzük azt az esetet, ha a lapok területe egyenlő (egyenlő oldalú tetraéder).

Ennek testmagasságai nyilván egyenlők, hisz $V = \frac{Tm}{3}$.

Ha P-t összekötjük a csúcsokkal, akkor négy kis tetraédert kapunk:

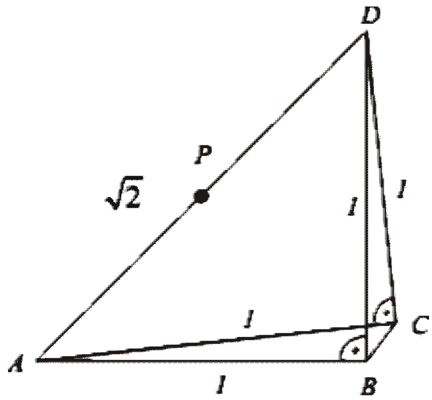
$$\frac{Tm}{3} = \frac{Tr_1}{3} + \frac{Tr_2}{3} + \frac{Tr_3}{3} + \frac{Tr_4}{3} \quad \rightarrow \quad m = r_1 + r_2 + r_3 + r_4$$

Nyilvánvalóan: $R_i + r_i \geq m \quad \rightarrow \quad R_i \geq m - r_i$

Összegezve: $R_1 + R_2 + R_3 + R_4 \geq 4m - (r_1 + r_2 + r_3 + r_4) = 3(r_1 + r_2 + r_3 + r_4)$

és egyenlőség $\Leftrightarrow$ P illeszkedik mindegyik magasságra, ez azonban az egyenlő oldalú tetraéderek közül csak a szabályosra igaz.

Megmutatható azonban, hogy a fenti sejtés nem helyes:
Legyenek ABD és ACD egyenlő szárú derékszögű háromszögek 1 egységnyi befogókkal; legyen P az AD felezőpontja, és legyen BC kicsi.



Ekkor $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sum R_i = 2\sqrt{2}$

$r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$ és $r_3 = r_4 = 0 \Rightarrow \sum r_i \approx 1$

De, $2\sqrt{2} \ngeq 3$!

A minden tetraéderre vonatkozó sejtés — ami a mai napig (tudtommal) nem bizonyított:

$R_1 + R_2 + R_3 + R_4 \geq 2\sqrt{2}(r_1 + r_2 + r_3 + r_4)$

Felhasznált irodalom:

a) Reiman István: 60 éve jelent meg a KÖMAL-ban az Erdős-Mordell tétel (KÖMAL)
b) N. D. Kazarinoff: Geometriai egyenlőtlenségek (Gondolat, 1980)
c) Sándor József: Geometriai egyenlőtlenségek (Dacia, Kolozsvár, 1988)
d) Szabó Kálmán: Geometriai egyenlőtlenségek (Mat. tagozatos jegyzetek)
e) Sklarszkij-Csencov-Jaglom: Válogatott feladatok az elemi matematika köréből 2/2
f) Reiman István: Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák 1959-1994.

Egyéb kapcsolódó linkek:

Mathworld
http://mathworld.wolfram.com/Erdos-MordellTheorem.html

Hojoo Lee: Erdős Mordell tétel bizonyítása Ptolemaiosz tétellel
http://forumgeom.fau.edu/FG2001volume1/FG200102.pdf

Sándor József: Geometric theorems, Diophantine equations and arithmetic functions, 25-26. oldal, az Erdős-Mordell tétel tetraéderre vonatkozó változatáról.
http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/JozsefSandor2.pdf