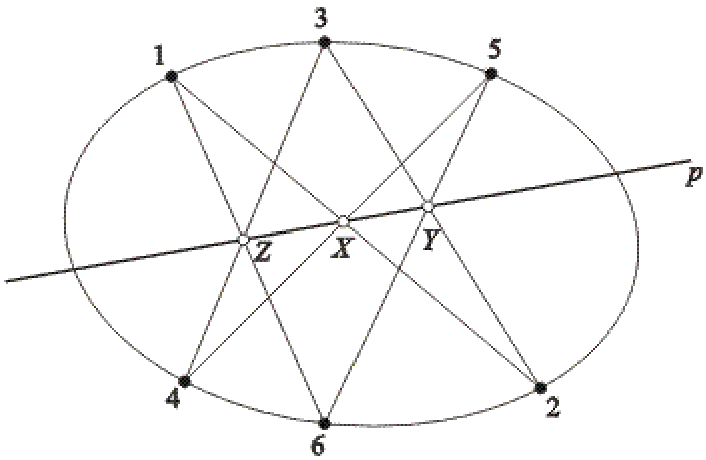
Reiman István

Az elemi síkgeometria és a kúpszeletek elméletének egy kapcsolatáról

A kúpszeletek elméletének szinte minden lényeges összefüggése levezethető B. Pascal (1623-1662) egy tételéből, amely igazában az ideális (végtelen távoli) térelemekkel kibővített síkon, az ún. projektív síkon hatásos. A bővítés úgy történik, hogy a sík minden, párhuzamos egyenesekből álló sugársorához hozzárendelünk egy ideális pontot, amely rajta van a sugársor összes egyenesén; egy ideális pontot tehát a sík egy egyenesével (és a vele párhuzamos egyenesek bármelyikével) adhatunk meg. Egy közönséges pontot egy ideális ponttal úgy kötünk össze, hogy a ponton át párhuzamost húzunk az ideális pontot megadó egyenessel. A sík ideális pontjainak a halmaza a sík ideális (végtelen távoli) egyenese; ez köti össze a sík bármely két ideális pontját.

A következőkben *hatszögnek* nevezünk egy megadott sorrendű hat pontból álló alakzatot, a pontok a hatszög csúcsai (közöttük nem lehet három különböző egy egyenesen). A csúcsokat az 1, 2, ..., 6 számokkal jelöljük, a szomszédosakat összekötő egyenesek a hatszög oldalai.

A fenti értelemben vett hatszög *Pascal-féle* (*P*-hatszög), ha az 12 és 45 egyenesek *X* metszéspontja, a 23 és 56 egyenesek *Y* metszéspontja és a 34, 61 egyenesek *Z* metszéspontja egy egyenesre illeszkednek (*P*-egyenes). A hatszög csúcsai és oldalai között ideálisak is lehetnek.



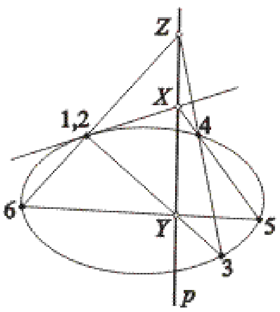
1a. ábra

Pascal tétele (*P*-tétel) ma használatos formájában a következő:

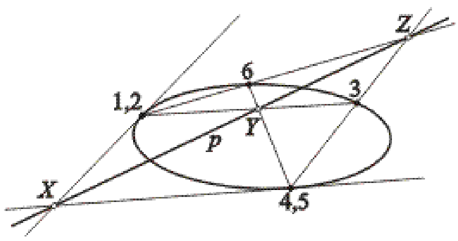
1. tétel
Hat pont akkor és csakis akkor van egy kúpszeleten, ha az általuk meghatározott hatszög *P*-hatszög.

Itt megengedjük két szomszédos csúcs egybeesését is; a két egybeeső csúcs összekötő egyenesének ebben az esetben a pontbeli kúpszeletérintő számít (egy, két vagy három egybeesés lehetséges). A ***P***-tétel bizonyítására számos módszer ismeretes, egyik pl. megtalálható Hajós György: Bevezetés a geometriába c. könyvében.

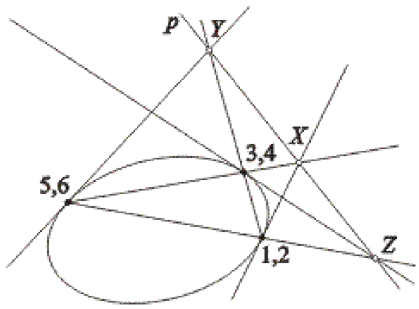
A ***P***-hatszög négy alapvető típusa (az egybeeséseket tekintve) az 1a-1d. ábráinkon látható.



1b. ábra



1c. ábra



1d. ábra

A következőkben felhasználjuk, hogy a projektív síkon az ellipszisnek nincs ideális pontja, a parabolának egy van (ez a tengely pontja és ebben a pontban az ideális egyenes érinti a parabolát), a hiperbolának két ideális pontja van, ezekben az érintők az aszimptoták. Alapvető tulajdonsága a kúpszeleteknek, hogy 5 ponton át (3 nincs egy egyenesen) pontosan egy kúpszelet megy. Pontegybeesések esetén négy pont és egyikben az érintő vagy adott három pont esetén kettőben az érintő egyértelműen meghatározzák a kúpszeletet. Az 1a-1c ábrák úgy is olvashatók, hogy ezekben az esetekben hogyan lehet a kúpszelet egy hatodik pontját megszerkeszteni.

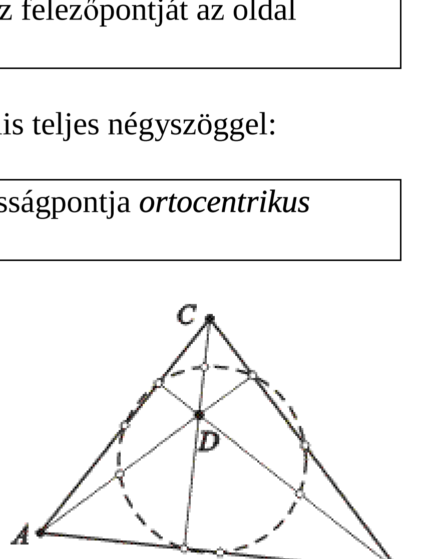
Még egy gyakran használt fogalom:

> a sík négy pontja (három nincs egy egyenesen) ún. *teljes négyszög*et alkot, a pontok a négyszög *csúcsai*, két csúcs összekötő egyenese a négyszög *oldala* (6 van!), két oldal *szemközti*, ha nincs közös csúcsa, a szemközti oldalak metszéspontjai a négyszög *átlóspont*jai (3 van), két csúcs által meghatározott szakasz felezőpontját az oldal felezőpontjának mondjuk.

Az elemi geometriai kapcsolatok vizsgálatát kezdjük egy speciális teljes négyszöggel:

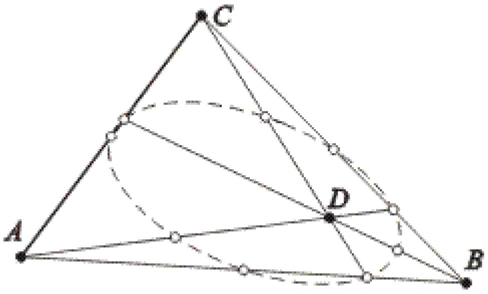
> egy (nem derékszögű) háromszög három csúcsa és magasságpontja *ortocentrikus* (magasságpontos) pontnégyest alkot,

bármely három alkotta háromszögnek ui. a negyedik magasságpontja. Jól ismert, hogy ennél a négyszögnél az oldalfelező pontok és az átlóspontok (a magasságok talppontjai) egy körön vannak; nálunk ezt a kört Feuerbach-körnek (*F*-körnek) nevezik (2. ábra). Megfigyelhetjük, hogy az ortocentrikus pontnégyes mind a négy háromszögének azonos az *F*-köre, mindegyik sugara a köré írt kör sugarának a felével egyenlő.

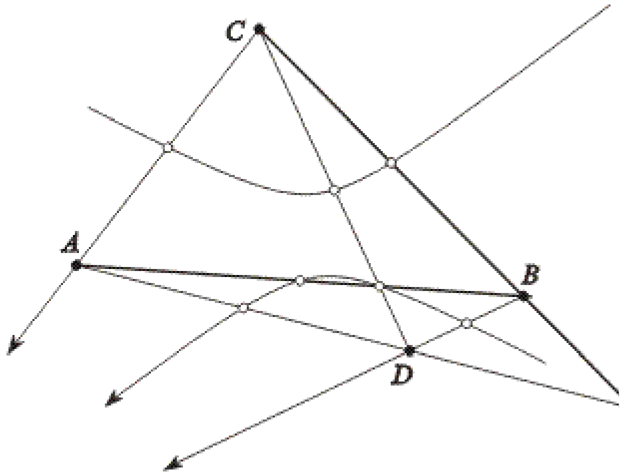


2. ábra

Az *F*-körök ábráját figyelmesen szemlélve felmerül bennünk, hogy hogyan változik az ábra, ha a D pontot elmozdítjuk. A 3. ábrán elvittük a D-t a magasságpontból, és most úgy tűnik, hogy a jelölt pontok egy ellipszisen vannak. Ha D a háromszög súlypontja, egy sok nevezetes tulajdonsággal rendelkező ellipszist, a Steiner-ellipszist kapjuk. Legyen most D a háromszögön kívül, itt úgy látszik, hogy a 9 pont egy hiperbolán van. Ezek a sejtések a kúpszeletek elméletének egy mélyebb tételével valóban igazolhatók.



3. ábra



4. ábra

Egy teljes négyszög csúcsain átmenő kúpszeletek halmazát *speciális kúpszeletsor*nak nevezzük.

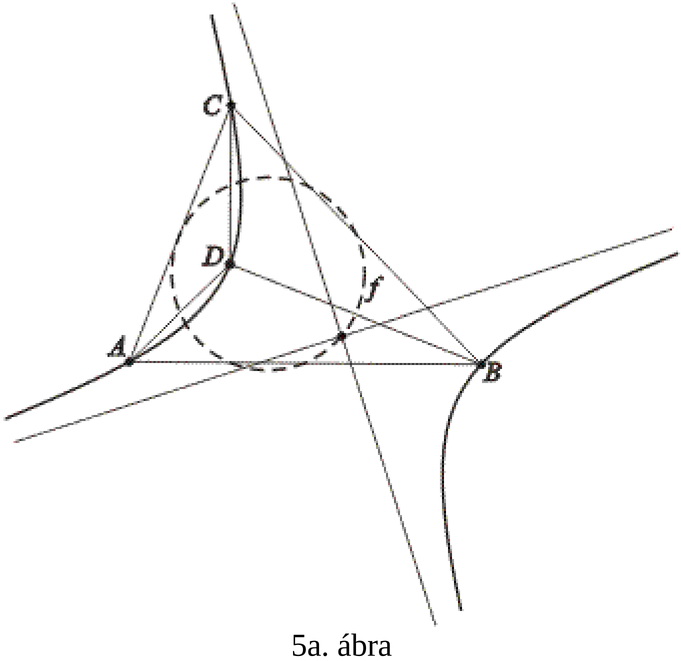
Itt a kúpszeletek közé számítjuk a két egyenesből álló ún. elfajult kúpszeleteket is, ezek középpontja a két egyenes metszéspontja.

A kúpszeletsor egyedei (a négy alappont kivételével) egyrétűen fedik le a síkot; elméletük alapvető tétele szerint a kúpszeletsor egyedeinek a középpontjai egy kúpszeleten, az ún. középponti kúpszeleten vannak, ez átmegy a teljes négyszög hat oldalfelező pontján is. Meg fogjuk mutatni, hogy

2. tétel
a) az ortocentrikus pontnégyesen átmenő kúpszeletek derékszögű hiperbolák[1] (az elfajult kúpszeleteken kívül) és
b) középponti kúpszeletük a pontnégyes F-köre.

A 2. tétel a) részének bizonyítása[2]

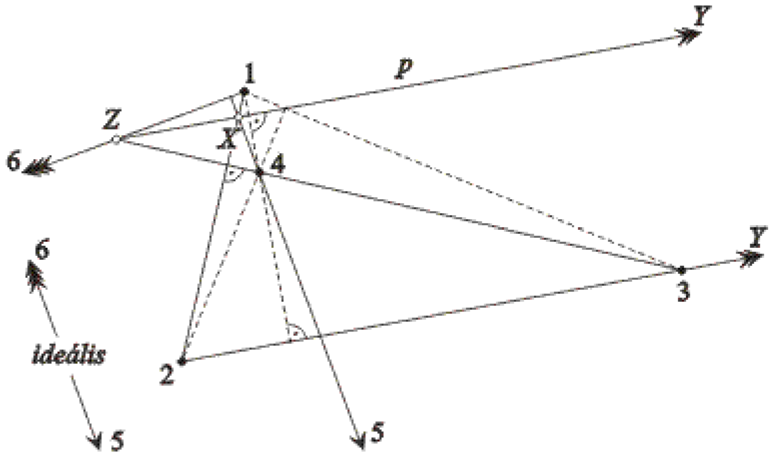
Már szemléletesen is nyilvánvaló, hogy a pontnégyesen konvex görbe (ellipszis, parabola) nem mehet át, tehát csak hiperboláról lehet szó. Hogy minden rajta átmenő hiperbola derékszögű, azt a P-tétellel igazoljuk. Megadunk egy hiperbolát az 1234 ortocentrikus pontnégyessel és egy 5-ös ideális ponttal (5. ábra), és megszerkesztjük azt a P-hatszöget (az 1a. ábra



5a. ábra

[1] Derékszögű hiperbola: olyan hiperbola, amelynek két aszimptotája egymásra merőleges
[2] A 2. tétel b) része a később következő 4. Lemma igazolásával lesz bizonyítva

típusát), amelynek az 56 egyenese az ideális egyenes. Először az 12 és 45 egyenesek X metszéspontját, majd a 23 és 56 egyenesek Y (ideális) metszéspontját jelöljük meg; a P-egyenes az XY egyenessel azonos, ezt a 34 és 61 a Z pontban metszi, 61 kijelöli a 6-ost tartalmazó aszimptota irányát. Ez merőleges az 5-ös irányára, azaz a $4X$ egyenesre, mivel X az $1Z4$ háromszögben magasságpont. Az 1234 pontokon átmenő hiperbola ezért derékszögű.



5. ábra

E tétel megfordíthatóságának bizonyítása előtt a derékszögű hiperbola néhány érdekes tulajdonságára hívjuk fel a figyelmet. Láttuk már a derékszögű hiperboláknak az ortocentrikus pontnégyesekkel való kapcsolatát, erre utal a következő észrevétel is:

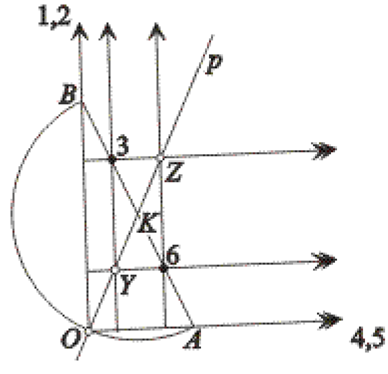
1. Lemma
a derékszögű hiperbolába írt minden háromszög magasságpontja is a hiperbolán van.

Ennek igen egyszerű a bizonyítása: minden derékszögű hiperbola egyenlete az aszimptoták koordinátarendszerében az egység megfelelő választása mellett $xy = 1$ alakú, legyen három pontja: $A(a,1/a)$, $B(b,1/b)$, $C(c,1/c)$. A szokásos iskolai módszerekkel számolva a magasságpont koordinátáira $(-1/abc,-abc)$ adódik, ami nyilván kielégíti a hiperbola egyenletét. Eredményünkből az is kiolvasható, hogy a görbék közül csak a derékszögű hiperboláknak van meg ez a tulajdonsága.

A továbbiakban felhasználjuk a következő segédtételt:

2. Lemma
a hiperbola bármely két pontján átmenő egyenesnek az aszimptotától a hiperboláig terjedő szakasza mindkét aszimptota esetén ugyanakkora.

Ennek bizonyítására nézzük a következő (1c. típusú) P-hatszöget (6. ábra): a hatszög két egybeeső csúcsa az egyik aszimptota 1,2 érintési pontja, másik egybeeső csúcspárja a másik aszimptota 4,5 érintési pontja, a pontok természetesen ideálisak, két közönséges pontja pedig 3 és 6, Az 12 és 45 egyenesek metszéspontja a hiperbola O középpontja, a 23 és 56 metszéspontja Y, a 34 és 61 metszéspontja Z. O, Y, Z a P-egyenesen vannak; a $3Y6Z$ négyszög paralelogramma, középpontja K és $K3 = K6$. A párhuzamos szelők tételéből $KY:YO = K3:3B = K6:6A$, s mivel $K3 = K6$, ezért ebből $3B = 6A$, amivel állításunkat minden hiperbolára igazoltuk.



6. ábra

Ábránkról leolvasható a következő szerkesztés:

1. Szerkesztés
ha adott a hiperbola két aszimptotája és egy pontja, akkor a ponton átmenő tetszőleges egyenesen a pont-aszimptota távolságnak a másik aszimptotától való felmerésével az egyenesen újabb hiperbolapont szerkeszthető.

Megjegyzés: itt nem használtuk ki a hiperbola merőleges voltát.
Még egy fontos hiperbola-szerkesztés olvasható le a 6. ábráról:

2. Szerkesztés
ha adott a derékszögű hiperbola *O* középpontja és két pontja, pl. 6 és 3, akkor a 36 szakasz *K* felezőpontja körül *KO* sugárral szerkesztett kör a 36 egyenesből az aszimptoták *A*, ill. *B* pontját metszi ki,

tehát az aszimptoták egyszerűen szerkeszthetők. Itt felhasználtuk, hogy a derékszögű hiperbolát középpontja és két pontja egyértelműen meghatározza.

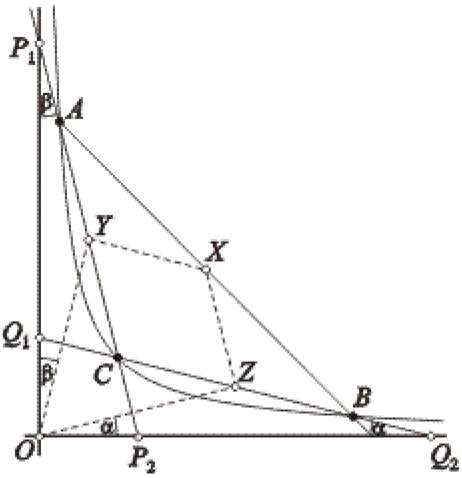
A hiperbolaszelő tulajdonságából következik (továbbá abból, hogy a hiperbolát egy aszimptotája és három pontja egyértelműen meghatározza), hogy

3. Lemma (*T*-feladat)
ha egy háromszög oldalegyeneseit egy *a* egyenessel elmetsszük és a metszéspontokat a háromszög megfelelő oldalfelező pontjára tükrözzük, akkor a tükörképek egy *b* egyenesen lesznek (ti. a másik aszimptotán),

ezt *T*-feladat néven fogjuk még említeni. Most bebizonyítjuk, hogy

4. Lemma
a derékszögű hiperbolába írt háromszög *F*-köre tartalmazza a hiperbola középpontját (7. ábra).

A beírt háromszög csúcsai: *A*, *B*, *C*, oldalfelező pontjai: *X*, *Y*, *Z*, a hiperbola középpontja *O*. Az *AC* egyenes az aszimptotákat a P_1, P_2, a *BC* egyenes a Q_1, Q_2 pontokban metszi. A szelők előbb igazolt tulajdonságaiból következik, hogy *X*, *Y*, *Z* a szelőszakaszokat is felezi, és Thalész tétele alapján állíthatjuk, hogy az α-val, ill. β-val jelölt szögek egymás közt egyenlők. Állításunk igazolására elegendő megmutatnunk, hogy *OYXZ* húrnégyszög, azaz $YOZ\angle + YXZ\angle = 180°$. A külsőszög-tételből $P_1P_2Q_2\angle = 90° + \beta$ és $YCZ\angle = 90° + \beta + \alpha$. Mivel *XYCZ* paralelogramma, $YXZ\angle = YCZ\angle = 90° + \alpha + \beta$, és minthogy $YOZ\angle = 90° + \beta$, $YOZ\angle + YXZ\angle = 180°$, *ABC* *F*-köre tartalmazza *O*-t. Ezzel igazoltuk, hogy az ortocentrikus pontnégyeshez tartozó középponti kúpszelet az *F*-körrel azonos.



7. ábra

A 7. ábra alapján megadhatjuk a *T*-feladat egy nehezebb változatának a megoldását: egy adott háromszöghöz szerkesszünk meg egy ***a*** egyenest úgy, hogy ennek az oldalegyenesekkel képezett metszéspontjait az oldalfelező pontokra tükrözve a tükörképek az ***a***-ra merőleges ***b*** egyenesen helyezkedjenek el. (A megoldást szolgáltató derékszögű hiperbola középpontját a háromszög ***F***-körén kell választanunk.)

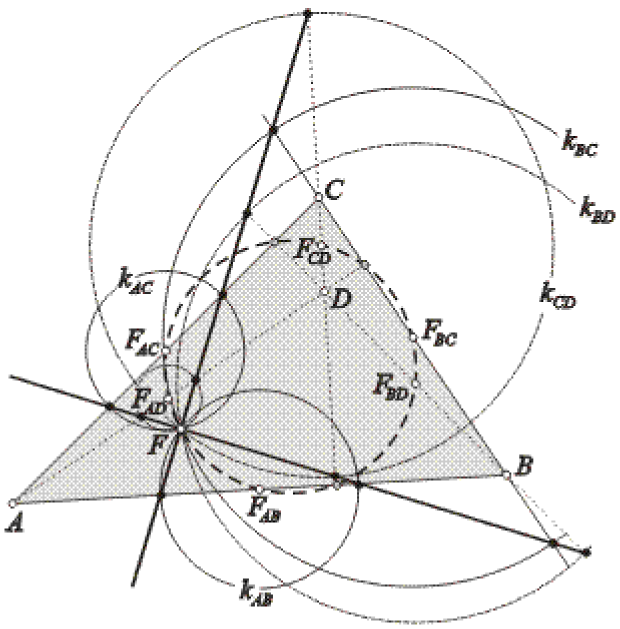
A projektív geometria egy mélyebb tétele szerint

Segédtétel
tetszőleges teljes négyszög csúcsain megy át derékszögű hiperbola.

A bizonyítottak szerint ezért a csúcsokból képezhető négy háromszög ***F***-köreinek át kell menniük a hiperbola középpontján, ezért minden négyszögnél a négy ***F***-kör egy ponton megy át. (Ennek elemi bizonyítása nem túl egyszerű). Szokás ezt a közös pontot a négyszög ***F***-pontjának nevezni. Viszont ennek az észrevételnek a felhasználásával meg tudjuk szerkeszteni a négy ponton átmenő derékszögű hiperbola középpontját és segédtételünk alapján az aszimptotáit is. Az aszimptoták egyébként megoldást adnak a következő nehéz feladatra: egy tetszőleges négyszöghöz szerkesszünk olyan egyenest, hogy a négyszög oldalegyeneseivel képezett metszéspontjait a megfelelő oldalfelező pontokra tükrözve a tükörképek egy egyenesen helyezkedjenek el.

Segédtételünk alapján kimondhatjuk a következőket:

3. Tétel
Szerkesszünk köröket egy tetszőleges teljes négyszög oldalfelező pontjai körül, amelyek átmennek a négyszög ***F***-pontján és jelöljük meg minden oldalon a felezőpontja körül rajzolt kör két metszéspontját. Az így nyert 12 pont hatosával egy-egy egyenesen helyezkedik el, ez a két egyenes merőleges egymásra és átmegy az ***F***-ponton (lásd a 8a. ábrát).

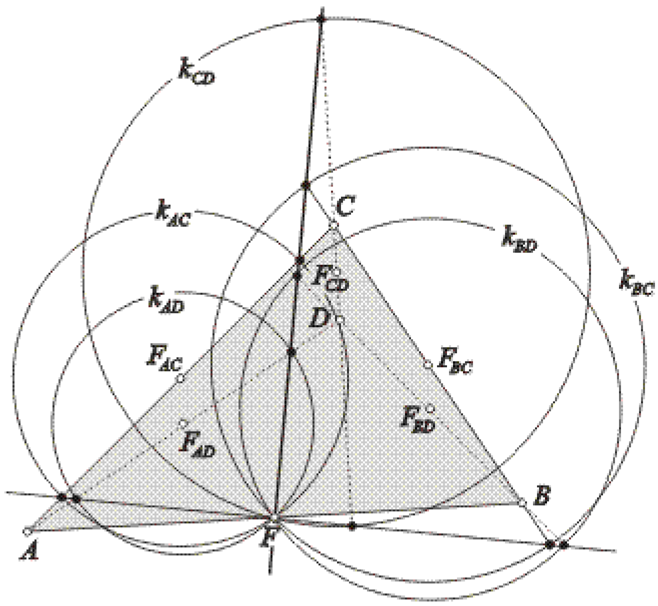


8a. ábra
Az *ABCD* teljes négyszög oldalfelező pontjai F_{AB}, F_{AC}, F_{AD}, F_{BC}, F_{BD}, F_{CD}, az ezek köré írt *F*-en átmenő körök k_{AB}, k_{AC}, k_{AD}, k_{BC}, k_{BD}, k_{CD}.

Ez tulajdonképpen előző észrevételünk átfogalmazása.
Az előbbi tétel bizonyítása még egyszerűsítve sem túl könnyű:

Feladat

Az *ABC* háromszög magasságpontja *D*, *AB* felezőpontja *F*. Az *AC*, *BC*, *DA*, *DB*, *DC* szakaszok felezőpontja körül rendre szerkesszünk olyan kört, amely átmegy *F*-en, és jelöljük meg a kör metszéspontjait a középpontot tartalmazó egyenessel. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott 10 pont két, az *F*-en átmenő egymásra merőleges egyenesen van (8b. ábra).



8b.ábra

A fenti tételek egy részének az igazolása igen leegyszerűsödik, ha a szóban forgó négyszögek csúcsai egy körön vannak, tehát egy kör és egy derékszögű hiperbola metszéspontjai. Ismeretes, hogy ha egy *ABC* háromszög csúcsaiba a köré írt kör középpontjából rendre az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok mutatnak, akkor súlypontjának helyvektora $(\underline{a}+\underline{b}+\underline{c})/3$, az *F*-kör középpontja $(\underline{a}+\underline{b}+\underline{c})/2$ és a magasságponté $\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}$ ($|\underline{a}| = |\underline{b}| = |\underline{c}| = R$, a köré írt kör sugara). Ennek felhasználásával könnyen megmutathatjuk, hogy a húrnégyszög *F*-pontjának helyvektora $(\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}+\underline{d})/2$. Mivel pl. az *ABC* háromszög *F*-körének középpontjába az $(\underline{a}+\underline{b}+\underline{c})/2$, a húrnégyszög *F*-pontját az *ABC* *F*-pontjával összekötő vektor $(\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}+\underline{d})/2-(\underline{a}+\underline{b}+\underline{c})/2 = \underline{d}/2$ és $|\underline{d}/2| = R/2$, a részháromszögek pontjai $R/2$ távolságra vannak a húrnégyszög *F* pontjától, ezért mind a négy háromszög *F*-köre átmegy a négyszög *F*-pontján. Ez azt is jelenti, hogy a részháromszögek *F*-köreinek középpontjai egy $R/2$ sugarú körön vannak, ezt a négyszög *F*-körének nevezik. A húrnégyszög *F*-pontja a csúcsain átmenő derékszögű hiperbola középpontja. *F* szerkesztése egyszerű, mert a négyszög köré írt kör középpontjának a súlypontra (helyvektora $(\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}+\underline{d})/4$, egyébként a középvonalak metszéspontja) vonatkozó tükörképe.

Ha a húrnégyszög csúcsait az *F* pontra tükrözzük, a részháromszögek magasságpontjait kapjuk, hiszen F helyvektora $(\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}+\underline{d})/2$, ami éppen a $\underline{d}$ és $\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}$ számtani közepe. Mivel *F* a hiperbola középpontja és így *D* tükörképe is a hiperbolán van, azt kapjuk, hogy minden részháromszög magasságpontja is rajta van a hiperbolán (ezt egyébként már igazoltuk). A tükrözés egybevágóság, tehát egy tetszőleges húrnégyszög részháromszögeinek magasság-pontjai az eredetivel egybevágó négyszög csúcsai. Megjegyezzük, hogy az F pont jellemző tulajdonsága még az is, hogy bármely oldalfelező ponttal összekötve a szemközti oldalra merőleges egyenest kapunk.

(Ábráinkon az egyszerűség kedvéért a vizsgált alakzatot a hiperbola egyik ágán vettük fel, bizonyításaink lényegtelen változtatásokkal azonban akkor is érvényesek, ha azok két különböző ágon helyezkednek el.)