

Jegyzetek egy matekóráról

A zsebrádiótól Turán tételéig

Lejegyezte és kiegészítésekkel ellátta: Meszéna Balázs
A katedrán: Pataki János

A gráfokat rengeteg életszagú példa megoldásában tudjuk segítségül hívni. Erre nézzünk egy példát:

Alapfeladat

Van egy zsebrádiónk, ami két elemmel működik. A fiókunkban van 8 elem, amiből 4 jó állapotban van, 4 pedig kifogyott. Azonban az elemek összekeveredtek, nem tudjuk melyik jó, és melyik használt. Csak a következőket tehetjük: egy kísérlettel 2 elemet beletehetünk a rádióba. Addig próbálkozunk, amíg meg nem szólal a rádió. A kérdés az, hogy ha okosak vagyunk, hány kísérlettel szólal meg a rádió biztosan?

Számozzuk meg az egyszerűség kedvéért az elemeket: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Egy kis gondolkodás után a következő taktikák juthatnak az eszünkbe:

I. megoldás (részleges)

Vegyünk egy elemet, pl. az 1-est. Ezt próbáljuk ki öt másikkal (pl. 2, 3, 4, 5). Ha ezen próbálkozások egyikére sem szólal meg a rádió, akkor 1-es biztos, hogy rossz (különben öt rossz elemünk lenne). Most vegyük a 2-es elemet, ezt próbáljuk négy másikkal (csak ne az 1-esel, pl. 3, 4, 5, 6). Ha nem szólal meg a rádiónk, akkor 2-es is rossz. A 3-mas elemmel már csak három kísérletet (4, 5, 6) kell végeznünk, hogy megállapítsuk rossz-e. A 4-essel pedig csak kettőt (5, 6). Ha eddigi próbálkozásaink egyikére sem szólalt meg a rádió, akkor tudjuk, hogy 1, 2, 3, 4 elemek mindegyike rossz. Tehát ha ezeken kívül bármely két elemet helyezünk a rádióba, az meg fog szólalni. **Ez 15 próbálkozás.**

II. megoldás (részleges)

Vegyünk négy elemet (1, 2, 3, 4), és próbáljuk ki mindegyiket mindegyikkel, ez hat próba. Ha a rádió nem szólal meg, akkor a négy közül három biztos, hogy rossz. Tehát a többi négy között (5, 6, 7, 8) legfeljebb egy rossz van. Ha pl. 5-ös és 6-os elemmel nem szólal meg a rádió, akkor 7-essel és 8-assal biztos. **Ez már csak 8 kísérlet!**

III. megoldás (részleges)

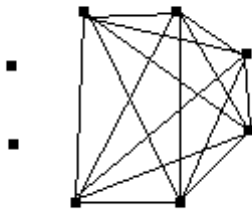
Most vegyünk három elemet (1, 2, 3), és próbáljuk ki mindegyiket mindegyikkel. Ha rádiónk nem szólal meg a három próbálkozás egyikére sem, akkor a háromból kettő biztos, hogy rossz. Ugyanezt játsszuk el a (4, 5, 6) elemekkel. Ekkor újabb három kísérlettel meggyőződhetünk arról, hogy ezek közül legalább kettő rossz. Ha tehát eddig még nem szólalt meg a rádió, akkor 7-es és 8-as elem kipróbálásakor biztos, hogy meg fog. **Ez tehát 7 próba.**

Olyan stratégiától, amiben legfeljebb 15-ször kell próbálkoznunk, eljutottunk egy olyanig, amiben csak 7-szer. Ezek után joggal érezhetjük, hogy egy kis munkával lefaraghatjuk ezt 6 kísérletre. Valójában azonban 7 kísérletet minimum el kell végezni, hogy a rádió biztosan megszólaljon. Ennek bizonyítására fogjuk a gráfokat elővenni.

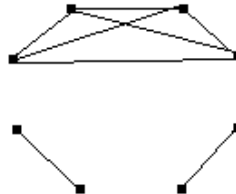
1. állítás

Ha van 8 elemünk, amiből 4 jó, akkor, amíg rádiónk biztosan megszólal legalább hétszer kell próbálkoznunk.

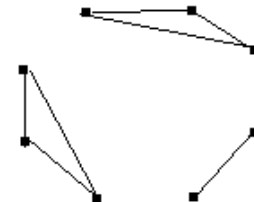
Legyenek a gráf csúcsai az elemek, élei pedig a próbálkozások. Tehát az utóbbi három kísérletsorozat így néz ki:



1. ábra

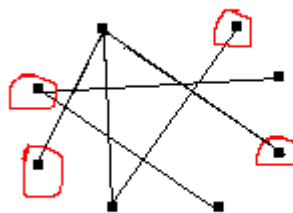


2. ábra



3. ábra

Mi van akkor, ha egy barátunk előáll azzal, hogy neki 6 kísérletre is megszólal mindenképpen a rádiója?. Mondjuk, a kísérletsorozata a gráfok nyelvén így szól:



4. ábra

Erre könnyen rácáfolhatunk: csak rámutatunk a 4. ábrán pirossal bejelölt elemekre. Ez egy olyan 4 csúcsú részgráf, amiben semelyik csúcs semelyik csúccsal nincs összekötve. Tehát ha történetesen a piros csúcsok a jó elemek, akkor a rádió nem szólalhat meg, hisz nincs olyan kísérlet, amikor két jó elemet teszünk a rádióba. Hogy erről könnyebben beszélhessünk, definiáljunk két fontos fogalmat.

Def: Nevezzük *üres négyesnek* egy gráf olyan részgráfját, amelyben semelyik csúcs nincs összekötve semelyikkel.

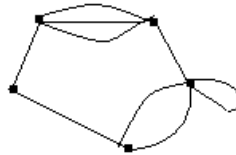
Def: Hívjuk *teljes négyesnek* egy gráf olyan részgráfját, amelyben minden csúcs mindegyikkel össze van kötve.

Makacs barátunk azonban állítja, hogy márpedig neki sikerült 6 kísérlettel megoldani a problémát, csak már elfelejtett, hogy pontosan hogy is csinálta. Hogy bebizonyítsuk, mindenképpen téved már nehezebb feladat. Azonban megfoghatóbbá válik, ha a gráfokban gondolkodunk. Láthatjuk, hogy az 1. állítással ekvivalens állítás a következő:

2. állítás

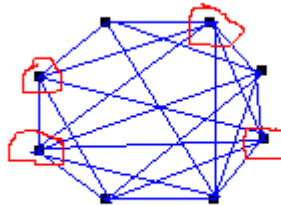
Egy 8 csúcsú egyszerű gráfnak, amiben nincs üres négyes, legalább 7 éle van.

Az egyszerű gráf azt jelenti, hogy gráfunkban nincs többszörös él (két csúcsot több él köt össze) vagy hurokéll (aminek a kezdő és végpontja ugyanaz a csúcs). Nem egyszerű gráf van pl. az 5. ábrán.



5. ábra

Ez így sokkal absztraktabb, de sokkal könnyebben el tudunk indulni a bizonyításban. Sőt! Tegyük még átláthatóbbá a dolgot. Megzavarhat bennünket a kettős tagadás: „...*nincs* olyan négy csúcsú részgráf, amelyben egyik él *sincs* egyik éllel összekötve”. Talán még könnyebbé válhat feladatunk, ha nem a kísérletsorozatunk gráfjáról beszélünk, hanem a kísérletsorozatunk gráfjának a komplementer gráfjáról. Egy gráf komplementerét úgy kapjuk meg, hogy az eredeti gráf éleit kitöröljük, és azokat a csúcsokat amik nem voltak összekötve összekötjük. Pl. a 4. ábra komplementere a 6. ábra:



6. ábra

Értelemszerűen egy rossz kísérletsorozat gráfjának komplementerében az üres négyes teljes négyessé válik. A hat élű gráfból pedig $\binom{8}{2} - 6 = 22$ élű gráf lesz. Ezek tudatában fogalmazzuk át a 2. állítást.

3. állítás

Ha egy 8 csúcsú gráfban nincs teljes négyes, akkor annak legfeljebb 21 éle van.

Ez ekvivalens a 2. állítással, hisz ha egy gráfban van teljes négyes, akkor a komplementerében van üres négyes. Ám, ha egy 22 élű gráfban nincs teljes négyes, akkor csak vesszük ennek komplementerét és máris megtaláltuk barátunk elfeledett kísérletsorozatát.

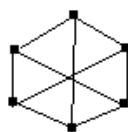
Először nézünk két egyszerűbb rokon problémát.

2. feladat

Bizonyítsuk be, hogy ha egy 6 csúcsú gráfban nincs teljes hármas, akkor annak legfeljebb 9 éle van.

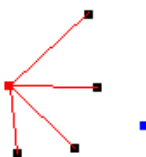
Hogy ezt belássuk, szükségünk van a fokszám fogalmára. Egy csúcs fokszáma a belőle kiinduló élek száma. Ha a gráf csúcsainak a fokszámát összeadjuk, akkor az élek számának kétszeresét kapjuk, hisz minden élt kétszer számoltunk. (Ha gráfunkban nincs hurokél, de mi most úgy is csak egyszerű gráfokkal foglalkozunk.) Most már be tudjuk látni a fenti állítást.

Ha 9 éle van a gráfunknak, akkor nem biztos, hogy van teljes négyes. A 7. ábrán egy ilyen gráf van.



7. ábra

Ha egy gráfnak legalább 10 éle van, akkor fokszáma legalább húsz. Mivel gráfunk 6 csúcsú, van olyan csúcs, aminek a fokszáma legalább 4 (Ha mindegyik élnek 3 lenne a fokszáma, akkor a fokszámok összege csak 18 lenne). Legyen ez a piros csúcs.



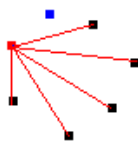
8. ábra

A 8. ábrán be van húzva az a négy él, ami a piros csúcsból biztos kiindul. Pirosból feketébe élt már nem húzhatunk. Ha bármelyik két feketét összehúzzuk, akkor megkapjuk teljes hármasunkat. Ha tehát nem akarunk teljes hármasot kapni, akkor olyan éleket kell behúzni, aminek az egyik végpontja a kék csúcs. Négy piros él van, a kék csúcsból pedig legfeljebb öt él indulhat. Tehát ha nincs a gráfban teljes hármas, akkor az éleinek száma legfeljebb 9.

Bizonyítsuk be, hogy ha egy 7 csúcsú gráfnak 15 vagy annál több éle van, akkor van benne teljes hármas.

Megjegyzés: igazából, ha a 7 csúcsú gráfnak 13 vagy 14 éle van, akkor is van benne teljes hármas. Azonban nekünk egyelőre elég bizonyítani az állítást 15 vagy több élre.

Gráfunkban a csúcsok fokszámának összege legalább 30, így van olyan csúcs, aminek a fokszáma legalább 5.



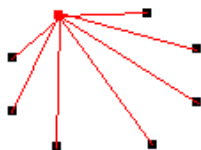
9. ábra

A piros csúcsból feketébe 5 él megy. Kék csúcsból legfeljebb 6 él indulhat. Tehát kell lennie olyan élnek, aminek a kezdő-, és végpontja is fekete. Ekkor azonban teljes hármast kapunk.

Ezek ismeretében már be tudjuk látni a 3. állítást.

Ha gráfunkban 22 él van, akkor csúcsai fokszámának az összege 44. Így a gráfban van olyan csúcs, amelynek a fokszáma legalább 6. Két eset van: gráfunkban vagy van olyan csúcs, aminek a fokszáma 7, vagy nincs. Nézzük az első esetet:

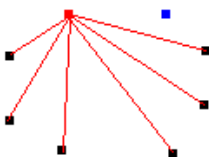
Hány olyan él van, aminek a kezdő-, és végpontja is fekete csúcs?(10. ábra).



10.ábra

Mivel 7 olyan él van, ami a piros csúcsból indul ki, 15 olyan él van, ami feketét feketével köt össze. Van tehát egy 7 csúcsú 15 élű részgráfunk! Ekkor azonban ebben a részgráfban van teljes hármast. És mivel a teljes hármast minden csúcsa össze van kötve a piros csúccsal, eredeti gráfunkban biztos, hogy van teljes négyes.

A második esetben biztos, hogy van gráfunkban olyan csúcs, aminek a fokszáma pontosan 6.



11. ábra

Most a piros csúcsból 6 él indul ki, a kékből pedig legfeljebb 6. Tehát a fekete csúcsok között legalább 10 él halad. Tehát most a gráfunkban van egy 6 csúcsú, minimum tíz élű részgráf! Mivel a teljes hármast minden csúcsa össze van kötve a piros csúccsal, ebben az esetben is van az eredeti gráfban teljes négyes.

Elgondolkodhatunk, hogy mi van akkor, ha nem 8 elemünk van, hanem n . Sőt, tovább általánosíthatunk: legyen a jó elemek száma p .

Def.: Nevezzük az olyan p elemű részgráfot, amiben minden csúcs minden csúccsal össze van kötve p -klikknek. (Ez azért jobban hangzik, mint, hogy „teljes p -s”)

Az általánosított feladatunk a gráfok nyelvén a következő kérdést veti fel: Ha van egy n csúcsú gráfunk, amely nem tartalmaz p -klikket, akkor legfeljebb hány éle van? Ezen már Turán Pál is elgondolkozott 1941-ben, amikor egy elegáns teljes indukcióval megmutatta, hogy:

Turán gráftétele: Ha egy n csúcsú egyszerű gráf nem tartalmaz p -klikket, akkor az e éleinek a száma legfeljebb:

$$e \leq \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) \frac{n^2}{2}$$

A bizonyítás n szerinti teljes indukcióval történik. Ha $n \leq p-1$, akkor igaz az egyenlőtlenség, hisz ekkor:

$$e \leq \frac{n(n-1)}{2} \leq \frac{n}{2} n \frac{p-2}{p-1} = \frac{n(n-1)}{2} \frac{n}{p-1}.$$

Legyen V csúcshalmazú gráf a legtöbb élű, p -klikket nem tartalmazó gráf. Ekkor ez a gráf tartalmaz $(p-1)$ -klikket- hisz ha nem tartalmazna, akkor még hozzávehetnénk éleket. Legyen A csúcshalmazú részgráf egy $(p-1)$ -klikk. Valamint legyen $B = V \setminus A$. Legyen e_A , az A csúcsok között futó élek száma, e_B a B élek között futó élek száma, e_{AB} pedig az A és B csúcsok közt haladó élek száma. Ekkor tehát:

Tudjuk, hogy $e = e_A + e_B + e_{AB}$
 $e_A = \binom{p-1}{2} = \frac{(p-1)(p-2)}{2}$. A teljes indukciós feltétel miatt:

$$e_B \leq \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) \frac{[n - (p-1)]^2}{2}.$$

Mivel gráfunk nem tartalmaz p -klikket, a B -beli elemek legfeljebb $p-2$ A -beli csúccsal lehetnek összekötve. Azaz:

$$e_{AB} \leq [n - (p-1)](p-2)$$

Most vegyünk egy nagy levegőt és adjuk össze a háromféle élek számát. Az átalakításokat elvégezve kapjuk, hogy:

$$e \leq \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) \frac{n^2}{2}.$$

És ezzel beláttuk az állítást.

Turán tételének hat bizonyítása is olvasható az alábbi műben, a „Könyv”-ben:
 Martin AIGNER – Günter M. ZIEGLER: Bizonyítások a KÖNYVBől.