Pogáts Ferenc

Feladatok

„A sík egybevágóságai és a tengelyes tükrözések” tanítási anyaghoz

Definiciók, fogalmak:

a.) Egy ponthalmaz (alakzat) *szimmetrikus,* ha van olyan pont, egyenes vagy sík, amelyre az alakzatot tükrözve, az önmagába megy át (helyben marad). Ezért beszélhetünk pontra, egyenesre, síkra szimmetrikus ponthalmazról, azaz *centrálszimmetrikus, tengelyszimmetrikus, síkszimmetrikus* alakzatról.

Ha egy alakzathoz található olyan pont, vagy egyenes, amely körül forgatva, az alakzat önmagába megy át, úgy

b_1.) ha ez pontosan *n*-féleképpen tehető meg, akkor *n-edrendben forgásszimmetrikus* alakzatról , és *n-edrendű forgásszimmetriáról* beszélünk. A helybenhagyást is az elforgatások közé soroljuk. $n \geq 3$ kell legyen, mert az $n = 1$ (a semmittevés) minden ponthalmaz sajátja, ennélfogva ez így nem osztályoz; az $n = 2$ –re pedig külön fogalmunk van, a centrálszimmetria illetve tengelyszimmetria. A definícióból következik, hogy a $2\pi/n$ egész többszöröseivel forgatva marad helyben alakzatunk.

b_2.) ha az elforgatás szöge tetszőleges, úgy *teljes szimmetriá*ról beszélünk, mégpedig

ha síkidom, akkor *körszimmetrikus,*

ha test, akkor *gömbszimmetrikus* az alakzat;

hengerszimmetrikus, ha egy egyenes (tengely) körüli tetszőleges szögű forgatás viszi az alakzatot önmagába.

c.) Egy síkidom *korlátos*, ha van sokszög, amely tartalmazza. **(**A síkidom pontjai egy síkban vannak.)

d.) *Eltolás-szimmetrikus* egy ponthalmaz, ha van olyan, a nullvektortól különböző vektor, amelynek egész többszöröseivel eltolva az alakzatot, az önmagába megy át.

1. Az $A_1B_1C_1$ háromszög csúcsai egy háromszög oldalainak felező pontjai.

a.) Szerkesszük meg a háromszöget;

b.) Bizonyítsuk be, hogy egyetlen ilyen háromszög van!

2. Az ABC háromszög belső szögei rendre α, β, γ . Az AB oldal egy P pontját forgassuk el A körül α szöggel úgy, hogy az elforgatott pont AC-re kerüljön. Ez a pont B_1. Most a B_1 pontot forgassuk a CB egyenesre C körül γ szöggel! Az elforgatott pont A_1. A_1-nek B körüli β szögű elforgatottja a BA egyenesen C_1.

A fenti eljárást C_1-gyel megismételjük. Igazoljuk, hogy C_1 harmadjára P-re kerül!

3. Az A_1, B_1, C_1 és D_1 pontok az $ABCD$ négyszög egy-egy oldalának felezőpontjai.

a) Szerkesszük meg a négyszöget!

b) Hány megoldása van a feladatnak?

4. Adottak egy *n*-szög oldalának felezőpontjai.

a) Szerkesszük meg az *n*-szöget!

b) Mely *n*-ekre van a feladatnak egyetlen megoldása?

5.

a.) Igazoljuk: ha egy ponthalmaznak van két szimmetriacentruma, akkor van három is!

b.) Igazoljuk: az ilyen alakzat eltolás-szimmetrikus!

6. Soroljunk fel olyan középpontosan szimmetrikus alakzatokat, amelyekben

a) egyetlen szimmetriacentrumuk sincs az alakzaton;

b) van általuk tartalmazott, meg általuk nem tartalmazott centrum!

7. Bizonyítsuk be: korlátos alakzatnak legfeljebb egy szimmetriacentruma van!

8. Mutassa meg, hogy korlátos alakzatnak nincs két párhuzamos szimmetriatengelye!

9. Igazolja: ha egy korlátos síkidomnak van két tengelye, akkor ezek metszik egymást!

10. Egy korlátos síkidomnak három tengelye van. Ezek kölcsönös helyzete milyen lehet?

11. Egy korlátos síkidomnak van két tengelye. A tengelyek mely helyzetére igaz:

a) pontosan n (≥ 2) darab tengelye van;

b) végtelen sok tengelye van.

12. Egy szabályos *n*-szöget középpontja körül 32° -kal elforgatva, a sokszög önmagába megy át. Legalább mekkora az *n*?

13. Adott a síkban 10 pont. E pontrendszernek k darab $(k \geq 1)$ szimmetriatengelye van. k = ?

Megoldásvázlatok

1.
a.) Az A_1, B_1, C_1 csúcsra illesztett, a szemközti oldallal párhuzamos egyenesek határolják a keresett háromszöget.
b.)
I. megoldás
Lásd: a)
vagy:
II. megoldás
Az A_1, B_1, C_1 pontokra való tükrözés egymásutánja (szorzata) egyetlen pontra való tükrözéssel azonos. E pont az A_1, B_1, C_1 által kifeszített paralelogramma negyedik csúcsa.

2.
I. megoldás
Ha $x=AP$, úgy rendre kapjuk a megfelelő csúcsoktól való távolságokra:

$$b\text{-}x,\ \ a\text{-}b+x,\ \ c\text{-}a+b\text{-}x,\ \ a\text{-}c+x \text{ és } c\text{-}x.$$

vagy:
II. megoldás
A háromszög belső szögfelezőire vonatkozó tükrözések szorzata nem valódi csúszás-tükrözés, azaz egyetlen egyenesre való tükrözés. Ennek önmagával való szorzata az identitás, tehát az elmozgatott pont önmagába tér vissza.

3. a.) b.)
I. megoldás
$A_1B_1C_1D_1$ paralelogramma kell legyen, mivel A_1B_1 illetve C_1D_1 ugyanazzal az átlóval párhuzamos, és ennek fele. Így a sík bármely (az adottak egyeneseitől különböző) pontja lehet a keresett négyszög egyik csúcsa.
vagy:
II. megoldás
a négy pontra való tükrözés szorzata eltolás, ami nem lehet valódi, mivel a négyszöget valódi eltolás nem viszi önmagába. Így ez az identitás, vagyis a sík végtelen sok pontnégyese ad megoldást.

4. Páros sok pontra tükrözés szorzata egyetlen eltolás, páratlan sok középpontos szimmetria szorzata egyetlen pontra való tükrözés. Így, ha n páros, akkor végtelen sok megoldás van, mert az eltolás csak az identitás (a nem valódi eltolás) lehet, míg páratlan *n*-re egyetlen (esetleg elfajuló *n*-szög) megoldás van.
Szerkesztése: lásd **1.) b.** megoldása.

5. Tükrözzük az alakzatot az O_1 centrumával együtt az O_2 közepére. Az O_1 tükörképe O_2-re legyen az O_3. Az O_3 az alakzat (O_2-re való) tükörképének a közepe, azaz az alakzatnak is, hiszen O_2 szimmetriacentrum. Ha az alakzat egy tetszőleges pontja *P*, úgy az O_1, O_2-re vonatkozó tükrözések szorzata a *P* pontot a $2\cdot\underline{O_1O_2}$ –vel eltoltjába viszi.

6. a.) Két párhuzamos egyenes. A szimmetriaközepek a középpárhuzamosuk pontjai.
b.) A számegyenes egész (rács) pontjai. A közepek: ezek, és felező pontjaik.

7. Indirekt: Ha két közép lenne, úgy tetszőleges távolságnál is nagyobb távolságra levő pontpárja is van a ponthalmaznak.

Lásd: **5.) b.)** megoldást. Ha a P eltoltja $2\underline{O_1O_2}$-vel P_2, úgy P_2 ugyanilyen eltoltja P_4, stb …

P_{2k} a P-nek $2k\underline{O_1O_2}$ –vel eltoltja, azaz $|\underline{PP_{2k}}| = 2k|\underline{O_1O_2}|$.

8. Az 5. feladat megoldásának a mintájára: ha van két párhuzamos tengely, akkor az ezekre való tükrözésszorzat $2\underline{AB}$-vel való eltolás, ahol $\underline{AB}$ az egyik tengelyt a másikba vivő, ezekre merőleges eltolás. Az eltolás-szimmetrikus alakzatok nem korlátosak.

9. Lásd: 8. feladat.

10. A 9. feladat szerint a korlátos síkidom tengelyei páronként metszik egymást. A három tengelyes tükrözés szorzata nem valódi csúszástükrözés, különben eltolás-szimmetrikus lenne alakzatunk. A három tengely tehát egy pontban metszi egymást.

11. A 10. feladat szerint a tengelyek egy pontban metszik egymást. Az 5. feladat megoldásának módjára egy tengelynek egy másik tengelyre vonatkozó tükörképe is tengely.
Az n darab tengely a síkot $2n$ darab (közös csúcsú) szögtartományra darabolja, és - a fentiek miatt – mindegyikük felezi szomszédjai szögét.
a) Ha a két egyenes szöge α (≤90º), úgy $k(360º/n) = \alpha$ kell legyen, ahol $(k;n)=1$.
b) Ha a két egyenes szöge a teljes szögnek nem racionális többszöröse.

12. A 11. feladatból $k{\cdot}360º/n = 32º$, azaz $k{\cdot}45º = 4ºn$. Mivel (4;45)=1, ezért $n = 45$ az a legkisebb oldalszám, amelyre teljesül a feladat feltétele.

13.
Ha a 10 pont egy egyenesen van, akkor k=1 vagy k=2. Ez utóbbi akkor áll fenn, ha két pont felező merőlegesére szimmetrikusan helyezkedik el a 10 pont.
Ha a szabályos háromszög középpontja és csúcsai az adottak közül való, akkor az a két középpontos hasonlóság, amelyiknek centruma a szabályos háromszög középpontja, a háromszög csúcsait két, az eredetivel „koncentrikus” szabályos háromszögbe viszi, és ezek csúcsai az eredeti csúcsaival és közepével a k=3 esetet valósítják meg.
Két „koncentrikus” középpontosan hasonló szabályos ötszög csúcsai a k=5 esetet szolgáltatják.
Egy szabályos 9-szög csúcsai és középpontja a k=9-re, míg egy szabályos 10-szög csúcsai a k=10-re példa.
Miért nincs k=4 tengely? A 11. feladat megoldásából következik, hogy a négy tengely egy négyzet két átlójának és két középvonalának az egyenese. Ezek a síkot 8 részre darabolják. Ha egy pont ezek egyikén sincs, akkor mind a nyolc síkrészben van 1-1 képük. Ha egy pont a tengelyek egyikén van, de nem a négy egyenes közös pontja, akkor további három képe van. Így 4 tengelyes szimmetriával csakis a $4m$ illetve $4m$+1 darab pontból álló pontrendszer rendelkezhet (m pozitív egész, és a $4m$+1 esetben a pontok egyike a tengelyek közös pontja kell legyen).

Ugyanígy igazolhatjuk, hogy a $k \in \{6, 7, 8\}$ sem lehetséges 10 pontra.
Általánosíts!