Diofantikus egyenletek 1.

S1.1. $4x^2y^2 - (x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2)$ csoportosítással
$(x + y + z)(x + y - z)(x - y + z)(- x + y + z) = 576$.

Eredmény:

$(x, y, z) = (3, 4, 5)$ és ezek permutációi.

S1.2. Alakítsuk négyzetösszeggé az egy oldalra rendezett kifejezést!

Eredmény:

$(x, y) = (1, 0), (0, - 1), (2, - 1), (1, - 2), (0, 0)$.

S1.3. Átalakítások után $(m + n)^2 = (m - n)^2(m + n)$.

Eredmény:

$(m, n) = (k, - k)$; $\left(\frac{k(k+1)}{2}, \frac{k(k-1)}{2}\right)$, ahol $k \in \mathbb{Z}$, kivéve $(1, 0)$ és $(0, 1)$.

S1.4. Ha $k > 3$, az $n^2 = m^3(m^{k-3} - 1)$ átalakítás után mutassuk meg, hogy m csak négyzetszám lehetne (m és $m^{k-3} - 1$ relatív prímek).

S1.5. $n = 5k \pm 1$ alakú, ekkor $k(5k \pm 2) = p^m$. Ha $k = p^a$, $5k \pm 2 = p^{m-a}$, $5 \pm \frac{2}{k} = p^{m-2a}$ egész.

Eredmény:

$(n, m, p) = (4, 1, 3), (6, 1, 7), (9, 4, 2)$.

Diofantikus egyenletek 2.

S2.1. Vizsgáljuk az egyenletet mod 4.

S2.2. Az $\frac{mn}{m+n} = k$ egyenletet kell megoldanunk az m, n, k pozitív egész számokra.
Átalakítva $(m - k)(n - k) = k^2$, s ennek $k \neq 1$ esetén van $m \neq n$ megoldása.

Eredmény:

$k \neq 1$, $k \in \mathbb{N}$.

S2.3. Kezdésként vegyük észre, hogy $7(y - 2)$ osztható 5-tel, $y = 5s + 2$ alakú, $2y = 10s + 4$ alakú, s innen $(2y)_5 = 10s + 5$; vagyis a két egyenletből y, majd alkalmas együtthatókkal s is kiküszöbölhető. Ezután végezzünk monotonitási vizsgálatokat.

Eredmény:

(x, y) = (– 17, 12).

S2.4. Az $a^2 = b(b^{1998} - 1)$ átalakítás után a jobb oldalon b ≥ 2 esetén relatív prím négyzetszámok állnak.

Eredmény:

Három megoldás van: (a, b) = (0, – 1), (0, 0), (0, 1).

S2.5. Vegyük észre, hogy x csak egész szám lehet, s vizsgáljuk meg a mod 6 maradékosztályokat!

Eredmény:

Az x = 6k + 1 alakú számok kivételével minden pozitív egész szám megoldás.

Diofantikus egyenletek 3.

S3.1. Kiindulhatunk a szomszédos köbszámok összegére vonatkozó képletből, vagy vizsgálhatjuk a köbszámok maradékát mod 4.

Eredmény:

Nincs ilyen előállítás.

S3.2. A Vieta-formulák alkalmazásával $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 1999$.

Eredmény:

(p, q) = (– 2002, 4000) vagy (1998, 0).

S3.3. Alakítsuk teljes négyzetté a másodfokú paraméteres egyenletet (x változó, y paraméter): $\left|x + \frac{1}{2}y(y+1)\right| = \sqrt{\left(\frac{y(y+1)}{2}\right)^2 + 2y + 1}$ = z egész szám. Ezután mutassuk meg, hogy – 3 ≤ y ≤ 1, s próbáljuk végig az eseteket.

Eredmény:

6 megoldás van: (x, y) = (– 1, – 3), (– 5, – 3), (1, 0), (– 1, 0), (1, 1), (3, 1).

S3.4. A kifejezés átalakítva $1 + \frac{n+2}{2n+3}$. A kikötések miatt a nevező nem lehet ±1, egyébként pedig a számláló és a nevező relatív prímek.

S3.5. Legyen x = cz és y = bz, ahol b és c relatív prímek, ekkor c = az miatt $a + b^2 + z = abz^2$, vagyis tört alakban $a = \frac{b^2 + z}{bz^2 - 1}$, $z^2 a = b + \frac{b + z^3}{z^2 b - 1}$.
Ezután vizsgáljuk meg a z = 1, ill. z = 2 eseteket, s mutassuk meg, hogy ha $z \geq 3$, akkor $b \leq z$, s innen $a < 2$.

Eredmény:

$(x, y, z) \in \{(5, 2, 1), (5, 3, 1), (4, 2, 2), (4, 6, 2)\}$.

Diofantikus egyenletek 4.

S4.1. Ha Alf n éves korában kezdte az iskolát és a k. évfolyamot ismételte meg, akkor a kapott macskák száma $36n + 240 - \frac{k(k-1)}{2}$, s mivel $1998 = 27\cdot 2\cdot 37$, $\frac{k(k-1)}{2}$-nek 6-tal oszthatónak kell lennie.

Eredmény:

Alf a 4. évfolyamot ismételte meg.

S4.2. $(2x + 3y)(x + 4y) + 4x + 5y + 6 = 2m$ átalakítás után legyen pl. $3y = -2x$.

Eredmény:

$x = 3m - 9$ és $y = 6 - 2m$.

S4.3. Ha pl. $n > 1999$, a $2^{1999}(2^{n-1999} + 1) = k^2$ átalakításból $(2^{n-1999} + 1) = 2m^2$.

Eredmény:

n = 1999.

S4.4. Keressünk megoldást kettőhatványok körében.

Eredmény:

$(x, y, z) = (2^5, 2^3, 2^4)$, ill. $(x, y, z) = (2^{5+2n}, 2^{3+12n}, 2^{4+15n})$.

S4.5. $z = 3 - (x + y)$ behelyettesítésével $8 = (x + y)(3 - x)(3 - y)$ adódik.

Eredmény:

$(x, y, z) = (1, 1, 1)$ vagy $(4, 4, -5)$, ill. a megfelelő permutációk.

Diofantikus egyenletek 5.

S5.1. Négyzetszám 4-gyel osztva nem adhat 3 maradékot.

Eredmény:

$(m, n) = (1, 2)$ vagy $(3, 3)$.

S5.2. Tegyük fel, hogy n számot fog közre x és y (vagyis $y = x + n + 1$). Ekkor $(x + 1) + (x + 2) + \ldots + (x + n) = 1999$ egyenletből $nx + \frac{n(n+1)}{2} = 1999$, $n(2x + n + 1) = 3998$, s n 3998 osztója.

Eredmény:

$(x, y) = (998, 1001)$.

S5.3. Ha $n > 500$, akkor $4^{473} + 4^{n-27} = k^2 - 1$ egyenletből $4^{473}(1 + 4^{n-500}) = (k + 1)(k - 1)$.

Eredmény:

$n = 972$.

S5.4. Először mutassuk meg, hogy a és b 19 többese (egyébként a^{18}, $b^{18} \equiv 1 \pmod{19}$, s egy négyzetszám nem adhat 2 vagy 3 maradékot mod 19). Ezután alkalmazzuk a végtelen leszállás módszerét a legkisebb $|a + b|$ megoldásra.

Eredmény:

$a = b = 0$.

S5.5. Az $a = x - 1$, $b = y - 1$, $c = z - 1$ helyettesítéssel $a + b + c = abc$. Bontsuk meg a szimmetriát: $|a| \le |b| \le |c|$, majd becsléssel $|a| = 1$ adódik (Könnyítés: ha (a, b, c) megoldás, akkor $(-a, -b, -c)$ is az.)

Eredmény:

$(x, y, z) = (1, 1, 1), (2, 3, 4), (-2, -1, 0), (1, 1 + n, 1 - n)$, ill. a megfelelő permutációk.

Diofantikus egyenletek 6.

S6.1. Legyen a harmadik magasság hossza n, és írjuk fel a háromszög-egyenlőtlenségeket a $\frac{2t}{9}, \frac{2t}{29}$ és $\frac{2t}{n}$ oldalakra.

Eredmény:

A harmadik magasság $7 \le n \le 13$ lehet.

S6.2. A diszkriminánsnak négyzetszámnak kell lennie.

S6.3. Elég megmutatni, hogy minden prímszám lehet egy primitív pitagoraszi számhármas befogója. Ez pedig az $u^2 - v^2 = p$ egyenlet megoldhatóságából következik.

S6.4. $x^p + y^q$, $x^r + y^q$, $x^s + y^q$ racionalitása miatt $x^r - x^p$ és $x^s - x^r$ is racionális. Ezután helyettesítsük $p = 3$, $r = 5$, $s = 7$-et.

S6.5. Vizsgáljuk 2 maradékait mod 25: 1, 2, 4, 8, 16, 7 , …; egy 20-hosszú ciklust kapunk, melyben a maradékok összege 250.

Eredmény:

$\dfrac{2^{2002}-4}{625} - 40$, s ez valóban egész.

Diofantikus egyenletek számjegyekkel 1.

S7.1. Alkalmazzuk a visszaszorzás módszerét!

Eredmény:

Az utolsó öt számjegy 48651.

S7.2. Ha $n = km$ alakú lenne ($k, m > 1$ egészek), akkor $\overbrace{11...1}^{n\text{-szer}}{}_{(b)}$ osztható lenne pl. a $\overbrace{11...1}^{k\text{-szor}}{}_{(b)}$ számmal.

S7.3. Az $(m^2 - 1) - (m - 2)^2 = 99(c - a)$ egyenletet kell megoldani.

Eredmény:

26 megfelelő m érték van.

S7.4. Két esetet vizsgálhatunk aszerint, hogy az $\underline{abcd}$ számban $a = 2$ és $d = 6$, vagy $a = 1$ és $d = 8$.

Eredmény:

$n = 1818$ és 1998.

S7.5. Megoldandó a $2(100c + 10b + a) + (a + b + c) = 100a + 10b + c$ diofantikus egyenlet. Oszthatósági vizsgálatokkal gyorsíthatjuk a megoldást.

Eredmény:

Ilyen szám nincsen.

Diofantikus egyenletek számjegyekkel 2.

S8.1. Mivel $\underline{abcdefghij} = 99999 \cdot \underline{abcde} + \underline{abcde} + \underline{fghij}$, ezért $a + f = b + g = \ldots = e + j = 9$. Az $\underline{abcde}$-típusú számokat számoljuk le. (5 különböző számjegy, az első nem 0, s semelyik két jegy összege nem lehet 9.)

Eredmény:

$9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 3456$.

S8.2. Az $1000a + b = b^2$ diofantikus egyenletben $1000 \mid b(b-1)$, s használjuk fel, hogy a tényezők relatív prímek.

Eredmény:

Két megoldás van: 141376 és 390625.

S8.3. Az $1998 = xn^2 + yn + z$ és $x + y + z = 24$ egyenletrendszerből $1974 = x(n^2 - 1) + y(n - 1) \geq n^2 - 1$ becslés miatt $10 < n < 45$, továbbá $n - 1$ osztója 1974-nek.

Eredmény:

$n \in \{15, 22, 43\}$.

S8.4. Vegyük észre, hogy 111111 osztható 7-tel, s elég 88m99-et vizsgálni.

Eredmény:

$m = 5$.

S8.5. Elég megmutatni, hogy $f(n) \leq f(n + 1)$. Ha $n \equiv 9 \pmod{10}$ nem teljesül, $s(n + 1) = s(n) + 1$, s $f(n) = f(n + 1)$. Ha $n \equiv 9 \pmod{10}$, akkor $(n + 1) - s(n + 1) > n - s(n)$, és indukcióval bizonyíthatunk.

Eredmény:

Az állítás igaz.

Diofantikus egyenletek számjegyekkel 3.

S9.1. Legyenek a, b, c megfelelő számjegyek. Ha az egyik számjegy páros, akkor mindegyik az, s az $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$ számjegyeket szintén megfelelők, ezért elég a páratlan számjegyeket vizsgálni.
Ezután kizárhatjuk az 5-öt, s ha pl. $a = 3$ vagy $a = 9$, akkor $\{b, c\} = \{3, 9\}$ ellentmondás.

Eredmény:

Nincsenek ilyen számjegyek.

S9.2. Használjuk fel, hogy n^k utolsó számjegye periodikusan ismétlődik. (Pl. ha n utolsó számjegye 1, a periódus hossza 1; ha n utolsó számjegye 2, a periódus hossza 4 stb.)

Eredmény:

n utolsó számjegye	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
S(n) utolsó számjegye	0	1	5	0	5	5	1	0	5	0

S9.3. $(38 + n)^2 = 1444 + n(76 + n)$, ezért $n(76 + n)$ 000-ra végződik. Innen az egyik tényező osztható 125-tel és valamelyik tényező osztható 4-gyel.

Eredmény:

$38 + n = 462$.

S9.4. Mutassuk meg, hogy ha a k-jegyű m utolsó számjegye nem 0, akkor az $n = 99\ldots9$ (k darab 9-es) szám megfelelő.

S9.5. Induljunk ki abból, hogy ha 5^n 1-essel kezdődik, akkor $5^n = a \cdot 10^k$, ahol $1 < a < 2$; és ekkor $2^{n+1} = \dfrac{2 \cdot 10^{n-k}}{a}$.

Eredmény:

Az állítás megfordítása is igaz.

Diofantikus egyenletek számjegyekkel 4.

S10.1. $A = 10^{81} - 1$.

Eredmény:

729.

S10.2. Az $1000a + b = b^2$ diofantikus egyenletben $1000 \mid b(b - 1)$, s használjuk fel, hogy a tényezők relatív prímek.

Eredmény:

Két megoldás van: 141376 és 390625.

S10.3. Ha a szám végén t darab 0 van ($t \geq 0$), akkor $\underline{1\ldots1} \cdot 2^{t+1} \cdot 5^t$ alakú, s mivel $\underline{1\ldots1}$ nem osztható sem 2-vel, sem 5-tel, $5 \mid t + 1$ és $5 \mid t$.

Eredmény:

Ilyen szám nincs.

S10.4. A $2n - 1$, $2n + 1$, $2n + 3$ számok négyzetösszege $12n(n + 1) + 11 = 1111, 2222, \ldots$ Az 1100, 2211, … számokat mod 12 vizsgálva 5544 marad csak.

Eredmény:

$5555 = 41^2 + 43^2 + 45^2$.

S10.5. Az $\overline{xyxy} = xb^3 + yb^2 + xb + y = (b^2 + 1)(xb + y) < (b^2 + 1)b^2$ átalakításból következik, hogy $b^2 + 1$ nem lehet prím, vagy különböző prímek szorzata; tehát $b \neq 2, 3, 4, 5, 6, 10$.

Eredmény:

$b = 7$ esetben $\overline{xyxy} = 2626 = 13^3$.

Számelmélet 1.

S11.1. Mutassuk meg, hogy ha p^k osztja m-et, akkor osztja n-et is (p prím).

S11.2. Ha $a \equiv b \pmod{100}$, akkor $a \equiv b \pmod 4$, ezért $a_{n+2} \equiv a_n + a_{n+1} \pmod 4$; s ha $a \equiv b \pmod 4$, akkor $a^2 \equiv b^2 \pmod 8$. Ezután mutassuk meg, hogy (a_n) periodikus mod 4.

Eredmény:

A maradék 0.

S11.3. Ha $p > 2$, akkor $p = 2s + 1$ helyettesítéssel $(2^s - 1)(2^s + 1) = px^2$, s itt $2^s - 1$ és $2^s + 1$ relatív prímek. Vizsgáljunk két esetet aszerint, hogy p melyik tényezőt osztja.

Eredmény:

$p = 3$ vagy $p = 7$.

S11.4. Vegyük észre, hogy $g(n)$ azonosítható az n szám 2-es számrendszerbeli alakjában a számjegyek összegével.

Eredmény:

$g(n)$ maximuma 10, s ezeket felveszi az 1023, 1535, 1791, 1919, 1983 helyeken.

S11.5. Mutassuk meg, hogy bármely (a, b) esetén található olyan (a', b'), amelyre $a' \in \{0, 1, 2, 3\}$, $b' \in \{0, 1\}$ és $2^a7^b \equiv 2^{a'}7^{b'} \pmod{15}$ és $3^a5^b \equiv 3^{a'}5^{b'} \pmod{16}$. Ezután végigvizsgálhatjuk a 8 esetet.

Megjegyzés:

Itt két csoport izomorf. Az egyik a 15-höz relatív prím maradékok, a másik a 16-hoz relatív prím maradékok multiplikatív csoportja. Előbbit 2 és 7, utóbbit pedig 3 és 5 generálja.

Számelmélet 2.

S12.1. Négy különböző egész szám szorzatára kell a 4-et felbontanunk.

S12.2. A szimmetriatulajdonság miatt elég megmutatni, hogy ha pl. 11 osztja $16a + 17b$-t, akkor osztja $17a + 16b$-t is.

S12.3. Használjuk $p(x)$ gyöktényezős alakját. Ha $p(x) = (x - \alpha)(x - \beta)$, akkor levezethető, hogy $p(n)p(n + 1) = (m - \alpha)(m - \beta) = p(m)$, ahol $m = n^2 - n(\alpha + \beta) + \alpha\beta + n$, s a Vieta-formulák miatt m valóban egész szám.

S12.4. a) Vegyük észre, hogy i^2 és $(16 - i)^2$ azonos maradékot ad mod (16).
b) 3^k osztja $(a + 1)(a - 1)$-et, s ekkor mindkét tényező 3-hatvány. Innen megmutatható, hogy valamelyik tényező 1 (egyébként 3 osztja 2-t).

Eredmény:

a) A maradék lehet 1, 7, 9 vagy 15;
b) a maradék lehet 1 vagy $3^k - 1$.

S12.5. Legyen c a legkisebb pozitív egész, amelyre $ca \equiv 0 \pmod{1995}$, s $d = \frac{1995}{c}$. Ekkor d is egész és a-nak osztója. Mutassuk meg, hogy az S halmaz elemei előállnak $ma + nb$ (mod 1995) alakban, ahol $m = 0, 1, \dots, c - 1$ és $n = 0, 1, \dots, d - 1$. Ezután feleltessünk meg S minden elemének egy (m, n) rácspontot, s az előállítást úgy adjuk meg, mint szomszédos rácspontok közötti lépegetést.

Számelmélet 3.

S13.1. $k^{2001} + (2002 - k)^{2001} \equiv 0 \pmod{13}$.

Eredmény:

Az összeg maradéka 0.

S13.2. Négyzetre emelés után először mutassuk meg, hogy az egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha sem a, sem b nem köbszám; majd a $3\sqrt[3]{ab}$ - mint egyetlen lehetséges racionális tag – és 49 egyenlőségét használjuk fel.

S13.3. a) Mivel $(k!, p) = 1$, ezért $k!\binom{p}{k} \equiv 0 \pmod{p}$.

b) Van olyan a, b természetes szám, amelyre $\left(2+\sqrt{5}\right)^p = a + b\sqrt{5}$ és $\left(2-\sqrt{5}\right)^p = a - b\sqrt{5}$, s innen $(-1)^p = a^2 - 5b^2$, vagyis $5b^2 = 1 + a^2$. Mivel $\left\lfloor\sqrt{5}b\right\rfloor = a$ (és $a = 2^p + \binom{p}{2}2^{p-2}\cdot 5$ stb.), fejtsük ki $\left[\left(2+\sqrt{5}\right)^p\right] - 2^{p+1}$-t, s használjuk fel az a) feladat eredményét.

S13.4. Az $np = (k + 1)(k - 1)$ átalakítás után két esetet vizsgálunk aszerint, hogy p melyik tényezőt osztja.

Erdemény:

$n + 1 = (p - 1)m^2 + (m \pm 1)^2$.

S13.5. Először mutassuk meg, hogy $f(x) + f(1 - x) = 1$, majd használjuk fel, hogy $(k, 2002) = 1 \Leftrightarrow (2002 - k, 2002) = 1$.

Eredmény:

$\frac{1}{2}\varphi(2002) = 360.$

Számelmélet 4.

S14.1. Ha Tom x darab 10 centes és y darab 28 centes bélyeget vesz, akkor $10x + 28y = 2002$, s innen $x + y = \frac{1001-9y}{5}$. A legkisebb megfelelő y érték $y = 4$.

Eredmény:

Legfeljebb 193 darab bélyeget tud Tom vásárolni.

S14.2. Vegyük észre, hogy $60\sqrt{11} - 199 = \left(10 - 3\sqrt{11}\right)^2$.

Eredmény:

Pl. $n = 28$ esetén $a_{28} = 20$.

S14.3. p^k osztja $(a + 1)(a - 1)$-et, s ez csak úgy lehet, ha pl. p^i osztja $(a + 1)$-et és p^j osztja $(a - 1)$-et $(i + j = k)$. Innen $i = 0$ vagy $j = 0$ következik (egyébként p osztja 2-t).

Eredmény:

$a \equiv 1 \pmod{p^k}$ vagy $a \equiv p^k - 1 \pmod{p^k}$.

S14.4. a) Induljunk ki a számok kanonikus alakjából; a páratlan kitevőt adó r tényező a bal oldalon csak az egyik tényezőben szerepelhet.

b) Legyen $p = 2q + 1$ és $b = pk$, ekkor $(2^{q+1} - 1)(2^{q+1} + 1) = pk^2$, s az a) eredmény szerint $c^2 = (2^{q+1} - 1)$ vagy $c^2 = (2^{q+1} + 1)$.

Eredményül azt kapjuk, hogy nincs a feltételeknek megfelelő négyzetszám.

S14.5. Ha $x^2 - x = k$, a megoldóképletből $x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4k}}{2}$, $k \geq 0$. Ha $k = 0$, akkor $x = 0$ vagy $x = 1$. Ha $k > 0$, akkor $x^2 = x + k$-ból kiindulva teljes indukcióval mutassuk meg, hogy $x^m = a_m x + b_m$, ahol a_m, b_m pozitív egészek, $a_m > 1$. Ebből megkapjuk, hogy x racionális; $x = \frac{r}{s}$ helyettesítésből $s = \pm 1$ adódik.

Számelmélet 5. – prímszámok

S15.1. A $p = q^5 - r^5$ szorzattá alakításából adódik, hogy $q - r$ osztója p-nek.

Eredmény:

$p = 3^5 - 2^5 = 211$.

S15.2. Pl. megmutathatjuk, hogy n prím és m kettőhatvány.

S15.3. Az (a) egyenletből $a = 2$ vagy $c = 2$.
Ha $c = 2$, (c)-ből $3 + a = ab$, ellentmondás.
Ha $a = 2$, átalakítások után $b = 2m + 1$ alakú, s $9 = (c - 2)(m - 2)$.

Eredmény:

$(a, b, c, d) = (2, 7, 11, 13)$, $n = 2002$.

S15.4. Két másodfokú diofantikus egyenletet kapunk aszerint, hogy $a = 2$ vagy $a = 3$.

Eredmény:

$(a, b, c) = (3, 8, 1)$ és $a^2 + b + c = 18$.

S15.5. Ágaztassunk el aszerint, hogy
- n páratlan (ekkor $5^n + 1$ szorzattá alakítható);
- $n = 4k + 2$ alakú (ekkor $3^n + 1 = 9^{2k+1} + 1$ szorzattá alakítható);
- $n = 4k$ alakú. Ekkor vizsgáljuk meg a $25^{2k} + 9^{2k} + 1$ kifejezést a 7-tel való oszthatóság szempontjából.

Megjegyzés:

Ha $n = 12$, akkor $m = 244672067$ prím.

Számelmélet – kanonikus alak 1.

S16.1. $1998 = 2 \cdot 3^3 \cdot 37$. Mivel 111 osztható 37-tel, 3k darab egyforma számjegyről van szó.

Eredmény:

n = 666666666.

S16.2. d(a’ + b’ + c’) = 1998 miatt a’ + b’ + c’-t kell minimalizálni.

Eredmény:

a’ + b’ + c’ = 18 a minimális érték, ekkor d = 111. A lehetséges előállítások: (a’, b’, c’) = (4, 7, 7), (5, 6, 7).

S16.3. Az egészrész leválasztása után 3x + 1 alakú, 48-nál nagyobb prímszámot keresünk.

Eredmény:

x = 20.

S16.4. a) 6n osztói között szerepelnek n osztói, valamint ezek 2-, 3- és 6-szorosai, ezért S(6n) ≤ S(n) + 2S(n) + 3S(n) + 6S(n) = 12S(n).
b) Akkor állhat fenn az egyenlőség, ha n nem osztható 2-vel vagy 3-mal.

S16.5. A kanonikus alak kétféle lehet; $n = p^5$ nem lehetséges, $n = pq^2$ esetén
$p = 5 + \frac{30q + 24}{q^2 - 5q - 5}$. Becsléssel q ≤ 35.

Eredmény:

$n = 31 \cdot 7^2 = 1519$.

Számelmélet – kanonikus alak 2.

S17.1. A hatványkitevő növekedtével az utolsó számjegyek periodikusan ismétlődnek.

Eredmény:

399.

S17.2. $\frac{a}{b}$ pontosan akkor egyszerűsíthető, ha $\frac{b - a}{b}$ is; innen adódik, hogy n + 2 prím és n > 29.

Eredmény:

n = 35.

Megjegyzés:

Ld. S.16.3.

S17.3. Használjuk fel, hogy (ka, kb) = k(a, b).

S17.4. Mivel x osztja 4y-t, [x, y] értékére három lehetőségünk van: [x, y] = y, 2y vagy 4y.

Eredmény:

Az (x, y) = $(7k, 7k^2)$ vagy $(4k, k^2)$ alakú számok a megoldások (k tetszőleges természetes szám).

Más megoldási lehetőség:

Vezessük be a két szám legnagyobb közös osztóját új változóként.

S17.5. Az x = ah, y = bh, z = ch, (a, b, c) = 1 helyettesítéssel c(b – a) = ab, s azt kell megmutatnunk, hogy $h^4abc = h^4c^2(b - a)$ és $h^2(b - a)$ négyzetszámok. Hogy (b – a) négyzetszám, ennek megmutatására első lépésben alkalmazzuk pl. a b = fk, c = fl, (k, l) = 1 helyettesítést.

Számelmélet – kanonikus alak 3.

S18.1. A keresett szám osztható 9-cel, 11-gyel és 5-tel is.

Eredmény:

495.

S18.2. Az m = dm’ és n = dn’ (ahol (m’, n’) = 1) helyettesítéssel a 3m’ + n’ = 3m’n’ + 1 diofantikus egyenletet kapjuk, amely pl. szorzattá alakítható.

S18.3. Ha n = 2k, akkor az n – 1, … , k + 1 számokkal való osztás után a maradékok 1, 2, … , k – 1.
Ha n = 2k + 1, akkor a maradékok 1, 2, … , k.

Eredmény:

n = 10.

S18.4. Legyen $n = 2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13$, ekkor $a \mid n$, s $\frac{1}{a} = \frac{\bar{a}}{n}$, $\sum_{a\in A}\frac{1}{a} = \frac{1}{n}\sum_{a\in A}\bar{a} = \frac{1}{n}\sum_{a\in A} a$, vagyis az osztók összegének n-ed része.

Eredmény:

$\frac{2304}{715}$.

S18.5. Az első 6 osztó 1, 2, 3, 6, 9, 18, ezért $n = 2^a \cdot 3^b \cdot p^c \cdot q^d$ alakú. Ezután mutassuk meg, hogy a = 1 lehet csak; legfeljebb három különböző prímosztó lehet csak stb.

Eredmény:

$n = 2 \cdot 3^3 \cdot 37$ vagy $n = 2 \cdot 3^3 \cdot 71$

Egzisztencia és konstrukció a számelméletben 1.

S19.1. $n \geq 5$ esetén az összeg végződését az első 4 tag végződése határozza meg.

Eredmény:

n = 1, 3.

S19.2. a) A szomszédos számhármasok különböző összegűek, ezért 6 szomszédos szám összege legfeljebb 27 lehetne; de a szomszédos 6-os összegek is különböznek.
b) Egy példa: 3, 8, 1, 5, 9, 0, 6, 7, 2, 4.

S19.3. Oldjuk meg az egyenletet az x = 0, 1, 2 értékekre, majd mutassuk meg, hogy $x \geq 3$ esetén nincs megoldás. ($xyz \geq 3yz, 3zx, 3xy$; adjuk össze a három egyenlőtlenséget stb.)

Eredmény:

(x, y, z) = (0, 1, 2), (1, 1, 1), (2, 3, 4).

S19.4. Ha n páros, $\frac{1}{n} = \frac{n+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$.
Ha n páratlan, $\frac{1}{n} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$-ból pq = n(p + q) ellentmondást ad.

Eredmény:

450 darab kívánt tulajdonságú szám van.

Megjegyzés:

A Bergengóc példatár 2. (szerk: Fazakas Tünde, Hraskó Andás, Typotex, 2001) 218. és 226. feladatai ide tartoznak. Ez utóbbi pl. így hangzik:

Lehet-e 2000 különböző pozitív egész szám reciprokának összege 1?

A könyvben több igen szép megoldást találhatunk.

S19.5. Az n leválasztása után a $\frac{7n-3}{n^2+7}$ tört vizsgálatakor csak n < 7 egészek jöhetnek szóba. Ezek ellenőrzése adja az n = 2 és n = 5 eredményeket.

S20.1. A legnagyobb közös osztó mindegyik tagot osztja.

Eredmény:

A maximális legnagyobb közös osztó 91.

S20.2. a) Pl. 16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, 6, 10, 15, 1, 8.
b) Nem lehetséges. Mutassuk meg, hogy a 16-nak csak a 9 lehet a szomszédja.

S20.3. Ha $m > 0$ vagy $m \leq -2$, akkor $m^2 + m + 1$ két négyzetszám közé esik.

Eredmény:

$m = 0$ vagy $m = -1$.

S20.4. Vizsgáljuk $p, q > 3$ esetén az egyenletet mod 3!

Eredmény:

$(p, q, n) = (2, 3, 4)$ vagy $(3, 7, 8)$.

Másik megoldási lehetőség:

Mivel $n(n + 3) = p(p + 3) + q(q + 3) < (p + q + 3)(p + q)$, $n < p + q$. Ezután vizsgáljuk a $p(p + 3) = (n - q)(n + q + 3)$ egyenletet. (Mivel p prím, p osztja $n + q + 3$ stb.)

S20.5. Az $(n + 1)(2n + 1) = 6m^2$ egyenletben n páratlan, ezért alkalmazzuk az $n = 2k - 1$ helyettesítést, majd vizsgáljuk k-t mod 3.

Eredmény:

$n = 337$.

Egzisztencia és konstrukció a számelméletben 3.

S21.1. Próbálkozzunk kétjegyű számokkal; ha a szám páros, akkor négyzete csak 44-re vagy 88-ra végződhet (mod 4 miatt) stb.

Eredmény:

$38^2 = 1444$.

S21.2. Mutassuk meg, hogy ha $p > 3$, akkor $p^2 + 11$ osztható 12-vel!

Eredmény:

$p = 3$.

S21.3. Mutassuk meg, hogy ha n > 1, akkor $(n^2 + n - 1)^2 < 1 + n^2 + n^3 + n^4 < (n^2 + n - 1)^2$.

Megjegyzés:

Vagyis nem csak prímekre, hanem n > 1 esetén semmilyen n-re sem lesz teljes négyzet $1 + n^2 + n^3 + n^4$.

S21.4. Először mutassuk meg, hogy ha $n = m^{m^{m+2}}$, akkor minden szétosztás megfelelő.
Legyen pl. $m \in A$, ekkor $m^m \in B$, $\left(m^m\right)^{m^m} = m^{m^{m+1}} \in A$ és $\left(m^{m^{m+1}}\right)^m = m^{m^{m+2}} \in B$, és tekintsük az $m^{m^{m+1}}$ számot.
Az $\left\{m, m+1, ..., m^{m^{m+2}} - 1\right\}$ halmaz „kicsi”; legyen az egyik részhalmaz $\{m, m + 1, \dots, m^m - 1\}$.

S21.5. Először mutassuk meg, hogy $m \geq 4$ esetén $(2m + 2)(2m + 1) < (m - 1)(m + 1)(m + 3)$.
Ezután a $(2m)! = (m - 2)!\cdot m!\cdot(m + 2)!$ egyenletből becsléssel adódik, hogy $m \geq 4$ esetén $(2(m + 1))! < \leq (m - 1)!\cdot(m + 1)!\cdot(m + 3)!$.

Eredmény:

A megoldás n = 3 vagy n = 5.

Geometriai számelmélet

S22.1. Ha az alapéleket a, az olaléleket b jelöli, akkor $8a + 4b = 2a^2 + 4ab$ a megoldandó diofantikus egyenlet. Pl. szorzattá alakítva: $(2a - 2)(a + 2b - 3) = 6$.

Eredmény:

(a, b) = (2, 2).

Más megoldási lehetőség:

Kifejezhetjük pl. 2b-t: $2b = 3 - a + \frac{3}{a-1}$, s innen a – 1 osztója 3-nak.

S22.2. Az a = b + 1 egyenletet vizsgáljuk, ha a^3 és b^2 egész számok. Köbre emelés után $b(b^2 + 3)$ is egész szám, ahonnan b racionális.

S22.3. Pitagorasz tételéből $AD^2 - CD^2 = AB^2 - BC^2$. Innen szorzattá alakítás után diofantikus egyenletet kapunk.

S22.4. Írjuk fel a koszinusz-tételt az ADC és BEC háromszögekre, s az így kapott $AD^2 - BE^2 = (b - a)(b + a - 2|DC|\cos\gamma)$ egyenlet jobb oldalát fejezzük ki a háromszög oldalaival.
Az $ab(AD^2 - BE^2) = (b - a)[4(s - a)(s - b)(s - c) + abc]$ egyenletből a $2ab \geq ab|AD^2 - BE^2| > (b - a)ab$ becslés célhoz vezet, innen a = b.

S22.5. Írjuk fel a szinusz-tételt kétszer a háromszögben, majd fejezzük ki sin(3B∠) értékét B∠ szögfüggvényeivel az addíciós tételek segítségével. Az $a^2 = b(b + c)$ egyenletben mutassuk meg, hogy $(b, b + c) = 1$, ezért b és $b + c$ is négyzetszám; valamint $B\angle < 30°$ miatt $m \geq 4$ is következik.

Eredmény:

$k \geq 77$.