Diofantikus egyenletek 1.

S1.1. Horvátország, 2002, országos verseny, 9. évf. 3/4.

Határozzuk meg az összes olyan (x, y, z) pozitív egész számokból álló számhármast, amelyekre $2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2z^2x^2 - x^4 - y^4 - z^4 = 576$.

Javaslat: Alakítsuk szorzattá az egyenlet bal oldalát.

S1.2. Litvánia, 2001. október

Határozzuk meg az $x - y = x^2 + xy + y^2$ egyenlet egész megoldásait.

S1.3. Észtország, Matematikai Olimpia, 1999, döntő, 11. évf. 1/5.

Határozzuk meg az m, n egész számokat, amelyekre $(m-n)^2 = \frac{4mn}{m+n-1}$.

S1.4. Szlovénia, Matematikai Olimpia, 1998, 1. forduló, 12. évf. 1/4.

Mutassuk meg, hogy az $n^2 + m^3 = m^k$ egyenlet nem oldható meg a pozitív egész számok halmazán.

S1.5. Belorusszia, Minszk 2002, 11. o.

Határozzuk meg az m, n természetes számokat, ha $n^2 - 5p^m = 1$, ahol p prímszám.

Diofantikus egyenletek 2.

S2.1. Szlovénia, Matematikai Olimpia, 1998, 1. forduló, 10. évf. 1/4.

Mutassuk meg, hogy az $x^2 + y^2 + z^2 = (xy)^2$ egyenletnek nincs megoldása a pozitív egész számok halmazán.

S2.2. Litvánia, 2001. október

Határozzuk meg azon pozitív egész értékeket, amelyekre igaz, hogy előállnak két különböző pozitív egész szám szorzatának és összegének hányadosaként.

S2.3. Cseh és Szlovák Matematikai Olimpia, 2002. április, döntő

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert az egész számok halmazán:

$(4x)_5 + 7y = 14,$
$(2y)_5 - (3y)_7 = 74,$

ahol $(n)_k$ k-nak azt a többszörösét jelöli, amely legközelebb van n-hez.

S2.4. Észtország, Matematikai Olimpia, 1999, döntő, 10. évf. 1/5.

Határozzuk meg azon (a, b) egész számpárokat, amelyekre $a^2 + b = b^{1999}$.

S2.5. Brit Matematikai Olimpia, 2001. december, 1. forduló (idő: 3.5 óra) 3/5.

Határozzuk meg az $x + \left[\frac{x}{6}\right] = \left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{2x}{3}\right]$ egyenlet pozitív valós megoldásait. ([t] jelenti a legnagyobb, t-nél nem nagyobb egész számot.)

Diofantikus egyenletek 3.

S3.1. Litvánia, 1997

Előállítható-e az 500…02 néhány szomszédos egész szám köbének összegeként?

S3.2. Szlovénia, Matematikai Olimpia, 1998, döntő, 10. évf. 2/4.

Határozzuk meg a (p, q) valós számpárokat, ha p + q = 1998, és az $x^2 + px + q = 0$ egyenlet megoldásai egészek.

S3.3. Japán, Matematikai Olimpia, 2002, 1. forduló

Határozzuk meg azon (x, y) egész számpárok számát, amelyekre $xy^2 + xy + x^2 – 2y – 1 = 0$.

S3.4. Észtország, 1999, nyílt verseny (9. és 10. évf.)

Bizonyítsuk be, hogy az $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+n}}}$ kifejezés értéke semmilyen n egész számra sem lesz egész.

S3.5. 1995, NMO feladatjavaslat

Oldjuk meg az $x + y^2 + z^3 = xyz$ egyenletet, ahol x, y, z pozitív egész számok és az x és y számok legnagyobb közös osztója z.

Diofantikus egyenletek 4.

S4.1. Szlovénia, Matematikai Olimpia, 1998, döntő, 11. évf. 4/4.

Alf nyolcosztályos elemi iskolába járt. Minden tanév végén megmutatta apjának a bizonyítványát. Ha Alf sikeresen elvégezte az évfolyamot, annyi macskát kapott apjától, amennyi életkorának és az adott évfolyam számának szorzata. Tanulmányai során Alf egyszer megbukott. Amikor befejezte az elemi iskolát, észrevette, hogy az apjától kapott macskák száma 1998-cal osztható. Melyik évfolyamot ismételte meg Alf?

S4.2. Szerbia, Matematikai Olimpia, 1999, 1. kategória (idő: 4 óra) 3/5.

Adott az m egész szám. Bizonyítsuk be, hogy van olyan (x, y) egészekből álló számpár, amelyekre $2x^2 + 11xy + 12y^2 + 4x + 5y + 6 = 2m$.

S4.3. Spanyolország, Matematikai Olimpia, 1999, 1. (helyi) forduló, 1. nap 3/3.

Határozzuk meg azon n természetes számokat, amelyekre $2^n + 2^{1999}$ négyzetszám.

S4.4. Litvánia, 1997

Adjuk meg az $x^3 + y^5 = z^4$ egyenlet (x, y, z pozitív egész számok) egy megoldását és mutassuk meg, hogy végtelen sok hasonló típusú megoldás van.

S4.5. Kanada, 1996, olimpiai előkészítő (levelező)

Határozzuk meg az (x, y, z) egész számhármasokat, amelyekre $3 = x + y + z = x^3 + y^3 + z^3$.

Diofantikus egyenletek 5.

S5.1. Szlovénia, Matematikai Olimpia, 2002, 1. forduló, 11. évf. 1/4.

Határozzuk meg az m, n pozitív egész számokat, ha $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (m-1) \cdot m + 3 = n^2$.

S5.2. Spanyolország, Matematikai Olimpia, 1999, 2. (helyi) forduló, 2. nap 1/3.

Határozzuk meg azon x, y ($x < y$) természetes számokat, amelyekre igaz, hogy a közéjük eső természetes számok összege 1999.

S5.3. Japán, 1990, olimpiai válogatóverseny, első forduló

Határozzuk meg azt a legnagyobb n egész számot, amelyre $4^{27} + 4^{500} + 4^n$ négyzetszám.

S5.4. Ausztria, Matematikai Olimpia, 2002. május, döntő, selejtező forduló, 1/4.

Határozzuk meg azon a és b egész számokat, amelyekre $(19a + b)^{18} + (a + b)^{18} + (19b + a)^{18}$ négyzetszám.

S5.5. Németország, 1998, országos verseny, második forduló

Határozzuk meg mindazon (x, y, z) egész számokat, amelyekre $xy + yz + zx - xyz = 2$.

Diofantikus egyenletek 6.

S6.1. Dél-Afrika, Stellenbosch-verseny, 1998. december, 1. forduló (idő: 3 óra) 3/5.

Egy háromszög két magasságának hossza 9 cm és 29 cm, a harmadik magasság hossza is egész szám (cm-ben). Mekkora lehet a harmadik magasság?

S6.2. Szlovénia, Matematikai Olimpia, 2002, döntő, 11. évf. 1/4.

A pozitív egész k számra a $kx^2 - (1 - 2k)x + k - 2 = 0$ másodfokú egyenlet megoldásai racionális számok. Bizonyítsuk be, hogy k két szomszédos egész szám szorzata.

S6.3. Spanyolország, Matematikai Olimpia, 1999, országos forduló, 1. nap 2/3.

Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ pozitív egész számokból álló sorozat, amelyekre $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$ minden n-re négyzetszám.

S6.4. Oroszország, Matematikai Olimpia, 2002, 4. (körzeti) forduló 11. évf. 1/8.

Az x és y valós számokra teljesül, hogy $x^p + y^q$ racionális szám, ha p, q tetszőleges páratlan prímszámok. Mutassuk meg, hogy x és y racionális.

S6.5. Ausztria, Matematikai Olimpia, 2001. május, országos verseny, 1. nap 1/3.

Bizonyítsuk be, hogy $\frac{1}{25}\sum_{k=0}^{2001}\left[\frac{2^k}{25}\right]$ egész szám. ([x] az x-nél nem nagyobb egész számok közül a legnagyobbat jelenti.)

Diofantikus egyenletek számjegyekkel 1.

S7.1. Sharp verseny, 2001. január

Egy bizonyos n pozitív egész szám osztható 383-mal és minden számjegye 3. Mennyi $\frac{n}{383}$ utolsó öt számjegye?

S7.2. Szlovénia, Matematikai Olimpia, 1998, 1. forduló, 11. évf. 1/4.

Legyen b, n > 1 pozitív egész szám. Bizonyítsuk be, hogy ha a b alapú számrendszerben $\overbrace{11\dots1}^{n\text{-szer}}{}_{(b)}$ prím, akkor n is prím.

S7.3. Japán, Matematikai Olimpia, 2002, 1. forduló

Határozzuk meg az összes olyan m értéket, amelyre $(m - 2)^2$ egy 3-jegyű *abc* alakú szám, továbbá $m^2 - 1$ szintén háromjegyű, *cba* alakú szám.

S7.4. Észtország, 1999, nyílt verseny (9. és 10. évf.)

Határozzuk meg azokat az n négyjegyű számokat, amelyeket $\frac{9}{2}$-del szorozva az n jegyeinek fordított sorrendben történő felírásával adódó számot kapjuk.

S7.5. Spanyolország, Matematikai Olimpia, 2002, döntő, 1/6.

Legyen m az n pozitív egész szám megfordításával kapott szám, S pedig az n szám számjegyeinek összege. Van-e olyan háromjegyű szám, amelyre $2m + S = n$ teljesül?

Diofantikus egyenletek számjegyekkel 2.

S8.1. Észtország, tavaszi nyílt verseny, 2002. február, szeniorok, 4/5.

Nevezzük bűvös számnak azokat a 10-jegyű természetes számokat, amelyek 10 különböző számjegyből állnak és oszthatók 99999-cel. Hány bűvös szám van? (0-val nem kezdődhet egy szám.)

S8.2. Dél-Afrika, Potchefstroom-verseny, 2001. július, 1. forduló (idő: 4 h 15 p) 2/5.

Határozzuk meg azokat a 6-jegyű számokat, amelyek egyenlők az utolsó 3 számjegyükből alkotott szám négyzetével.

S8.3. Szlovénia, Matematikai Olimpia, 1998, döntő, 12. évf. 1/4.

Ha az 1998-at felírjuk n-alapú számrendszerben (n pozitív egész), olyan háromjegyű számot kapunk, amelyben a számjegyek összege 24. Határozzuk meg n összes lehetséges értékét!

S8.4. Új-Zéland, 1990

Határozzuk meg az m számjegyet, ha 88…88m99…99 osztható 7-tel (50 darab 8-as és 50 darab 9-es szerepel).

S8.5. Kanada, 1996, olimpiai előkészítő (levelező)

Jelöljük s(n)-nel a tízes számrendszerbeli n természetes szám jegyeinek összegét. Az n természetes számokra értelmezett f(n) függvényre $f(0) = 0$, $f(n) = f(n - s(n)) + 1$ ($n = 1, 2, \ldots$). Igaz-e, hogy ha $1 \le m \le n$, akkor $f(m) \le f(n)$?

Diofantikus egyenletek számjegyekkel 3.

S9.1. Észtország, Matematikai Olimpia, 2002, döntő, 9. évf. 2/5.

Megadhatók-e olyan a, b, c különböző nemzérus számjegyek, amelyekre a kétjegyű $\overline{ab}$ szám osztható c-vel, $\overline{bc}$ osztható a-val és $\overline{ac}$ osztható b-vel?

S9.2. Ausztria, Matematikai Olimpia, 2001. április, területi verseny, 1/3.

Az n egész számra $S(n) = \sum_{k=0}^{2000} n^k$. Határozzuk meg S(n) tízes számrendszerbeli alakjának utolsó számjegyét.

S9.3. Szlovénia, Matematikai Olimpia, 2002, Döntő, 9. évf. 1/4.

A 38 a legkisebb pozitív egész szám, melynek a négyzete három 4-esre végződik ($38^2 = 1444$). Melyik a következő ilyen egész szám?

S9.4. Litvánia, 1997

Bizonyítsuk be, hogy bármely pozitív egész m számhoz található olyan n pozitív egész szám, amelyre teljesül, hogy tízes számrendszerbeli alakja nem tartalmaz 0 számjegyet, és számjegyeinek összege megegyezik mn számjegyeinek összegével.

S9.5. Dél-Afrika, Stellenbosch-verseny, 1998. december, 1. forduló (idő: 3 óra) 4/5.

Bizonyítsuk be, hogy ha valamely pozitív egész n számra 5^n első jegye 1-es, akkor 2^{n+1} szintén 1-essel kezdődik. Igaz-e az állítás megfordítása?

Diofantikus egyenletek számjegyekkel 4.

S10.1. Japán, Matematikai Olimpia, 1991, 1. forduló

Határozzuk meg A^2 tízes számrendszerbeli alakjában a számjegyek összegét, ha $A = \overset{\mathbf{678}}{99...9}$.

S10.2. Belgium, Matematikai Olimpia, 1999, döntő, 1/4.

Határozzuk meg azokat a hatjegyű $\underline{abcdef}$ természetes számokat, amelyekre $\underline{abcdef} = (\underline{def})^2$ ($a, d \neq 0$).

S10.3. Észtország, Matematikai Olimpia, 2002, döntő, 12. évf. 2/5.

Van-e olyan 2-esekből és 0-ákból álló egész szám, amely egyenlő valamely pozitív egész szám k-adik hatványával ($k \geq 2$)?

S10.4. Szlovénia, Matematikai Olimpia, 2002, első forduló, 10. évf. 3/4.

Határozzuk meg azon a, b, c szomszédos páratlan számokat, amelyekre $a^2 + b^2 + c^2$ négy egyforma számjegyből áll.

S10.5. Írország, Matematikai Olimpia, 1998, 1. nap (idő: 3 óra) 3/5.

Mutassuk meg, hogy a tízes számrendszerbeli xyxy számok (ahol x és y számjegyek) nem lehetnek köbszámok.
Határozzuk meg a legkisebb b > 1 egész számot, amelyre igaz, hogy xyxy köbszám a b alapú számrendszerben.

Számelmélet 1.

S11.1. Albánia, Matematikai Olimpia, 2002. március, 9. évf. 1/5.

Bizonyítsuk be, hogy az m, n természetes számok egyenlőek, ha $\frac{m^2+n^2}{mn} \in N$.

S11.2. Brit Matematikai Olimpia, 1998, 1. forduló 2/5.

Definiáljuk az (a_n) sorozatot a következőképpen: $a_1 = 19$, $a_2 = 98$ és ha $n \geq 1$, akkor a_{n+2} legyen $a_n + a_{n+1}$ maradéka 100-zal osztva. Mennyi $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{1998}^2$ maradéka 8-cal osztva?

S11.3. Litvánia, Matematikai Olimpia, 1998

Mely p prímszámra lesz $\frac{2^{p-1}-1}{p}$ négyzetszám?

S11.4. Spanyolország, Matematikai Olimpia, 2002, döntő, 4/6.

A természetes számok halmazán értelmezett g függvényre teljesül, hogy $g(2) = 1$, $g(2n) = g(n)$ és $g(2n + 1) = g(2n) + 1$. Határozzuk meg g(n) maximumát és a maximumhelyek számát, ha $1 \leq n \leq 2002$.

S11.5. Észtország, Matematikai Olimpia, 1999, döntő, 12. évf. 1/5.

Legyenek a, b, c és d nemnegatív egész számok. Bizonyítsuk be, hogy 2^a7^b és 2^c7^d akkor és csak akkor adják ugyanazt a maradékot 15-tel osztva, ha 3^a5^b és 3^c5^d azonos maradékot ad 16-tal osztva.

Számelmélet 2.

S12.1. Kanada, Manitoba verseny, 2001. február

Az a, b, c, d számok különböző egészek, az $(x - a)(x - b)(x - c)(x - d) = 4$ egyenlet egész gyöke r. Bizonyítsuk be, hogy $a + b + c + d = 4r$.

S12.2. Macedónia, 2002, 2. forduló, 9. évf. 1/4.

Legyen a és b olyan egész szám, amelyekre $(16a + 17b)(17a + 16b)$ osztható 11-gyel. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $(16a + 17b)(17a + 16b)$ 121-gyel is osztható!

S12.3. Szlovénia, Matematikai Olimpia, 1998, 1. forduló, 11. évf. 2/4.

A $p(x) = x^2 + ax + b$ másodfokú függvény együtthatói egészek. Mutassuk meg, hogy minden n egész számhoz található olyan m egész szám, hogy $p(n)p(n + 1) = p(m)$ teljesüljön.

S12.4. Észtország, nyílt verseny, 1999, (11. és 12. évf.)

Az a egész szám négyzete n-nel osztva 1 maradékot ad. Mennyi lehet a maradék, ha a-t n-nel osztjuk, és

a) $n = 16$;
b) $n = 3^k$, ahol k pozitív egész szám?

S12.5. Dél-Afrika, Rhodes-verseny, 2001. április, 2. forduló (idő: 4.5 óra) 3/3.

Az $S = \{0, 1, 2, \dots, 1994\}$ halmaz két pozitív, egymáshoz relatív prím eleme a és b. Bizonyítsuk be, hogy az S halmaz elemei az $s_1, s_2, s_3, \dots, s_{1995}$ sorozatba rendezhetők oly módon, hogy $s_{i+1} - s_i \equiv \pm a$ vagy $\equiv \pm b \pmod{1995}$ minden $i = 1, 2, \dots, 1994$-re.

Számelmélet 3.

S13.1. Észtország, őszi nyílt verseny, 2001. október, juniorok 2/5.

Határozzuk meg az $1^{2001} + 2^{2001} + 3^{2001} + \dots + 2001^{2001}$ összeg maradékát mod 13.

S13.2. Brit Matematikai Olimpia, 2000, 2. forduló

Határozzuk meg az a, b pozitív egész számokat, ha $\left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} - 1\right)^2 = 49 + 20\sqrt[3]{6}$.

S13.3. Albánia, Matematikai Olimpia, 2002. március, 11. évf. 4/5.

Bizonyítsuk be, hogy ha p páratlan prímszám, akkor
a) p osztja $\binom{p}{k}$-t, minden $k = 1, 2, \dots, p - 1$ esetén;
b) p osztja $\left[\left(2 + \sqrt{5}\right)^p\right] - 2^{p+1}$-t.
([x] az x-nél nem nagyobb egész számok legnagyobbikát jelenti.)

S13.4. Irán, Matematikai Olimpia, 2002, 1. forduló 1/6. (idő: 2x4 óra)

Legyen p prím és n természetes szám, amelyekre $1 + np$ négyzetszám. Bizonyítsuk be, hogy $n + 1$ előállítható p darab négyzetszám összegeként.

S13.5. Ausztria, Matematikai Olimpia, 2002. május, döntő, selejtező nap, 3/4.

Tekintsük az $f(x) = \frac{9^x}{9^x + 3}$ függvényt, s legyen k 0 és 2002 közötti egész szám. Határozzuk meg azon $f\left(\frac{k}{2002}\right)$ alakú kifejezések összegét, amelyekben a $\frac{k}{2002}$ tört tovább már nem egyszerűsíthető.

Számelmélet 4.

S14.1. Szlovénia, Matematikai Olimpia, 2002, döntő, 9. évf. 2/4.

Tom bélyeget gyűjt, s elhatározta, hogy a teljes 2002 centnyi spórolt pénzét bélyegre költi. A barátja 10 centes és 28 centes bélyegeket kínált neki. Tom úgy döntött, hogy a lehető legtöbb bélyeget vásárolja meg. Hány bélyeget tud vásárolni?

S14.2. Litvánia, 2001. október

Legyen $a_n = \sqrt{\left|60\sqrt{11} - 199\right| + \sqrt{60\sqrt{11} + 171 + n}}$. Tartalmaz-e egész számot a sorozat?

S14.3. Albánia, Matematikai Olimpia, 2002. március, 12. évf. 2/5.

Az a természetes számra $a^2 \equiv 1 \pmod n$. Határozzuk meg a (mod n) értékét, ha $n = p^k$, ahol p páratlan prímszám és k természetes szám.

S14.4. Görögország, Matematikai Olimpia, 2002. február, 4/4.

a) A p, q, r, a pozitív egész számokra $pq = ra^2$, r prím és p, q relatív prímek. Bizonyítsuk be, hogy p és q valamelyike négyzetszám.

b) Létezik-e $p(2^{p+1} - 1)$ alakú négyzetszám, ha p pozitív prím?

S14.5. Írország, Matematikai Olimpia, 1998, 1. nap (idő: 3 óra) 5/5.

Bizonyítsuk be, hogy ha $x^2 - x$ és valamely $n \geq 3$-ra $x^n - x$ is egész szám, akkor x is egész szám.

Számelmélet 5. – prímszámok

S15.1. Litvánia, 1997

Van olyan prímszám, amely egyenlő két prímszám ötödik hatványainak különbségével?

S15.2. Belgium, Matematikai Olimpia, 1999, döntő, 4/4.

Tekintsük azon $a, b, m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ számokat, amelyekre $a^n - 1$ és $b^m + 1$ prímszámok. Adjunk minél több információt a, b, n és m-re vonatkozóan.

S15.3. Írország, Matematikai Olimpia, 2002. május, 2. forduló (idő: 3 óra) 2/5.

Tegyük fel, hogy n az a, b, c, d különböző prímek szorzata, valamint

(a) $a + c = d$;
(b) $a(a + b + c + d) = c(d - b)$;
(c) $1 + bc + d = bd$.

Határozzuk meg n értékét.

S15.4. Thaiföld, Matematikai Olimpia, 2001

Határozzuk meg $a^2 + b + c$ értékét, ha a, b, c olyan pozitív egész számok, amelyekre $(a + 1)(b + 1)(c + 1) = 3abc$, valamint $a < 5$ prím és $b + c > 6$.

S15.5. Olaszország, Matematikai Olimpia, 2002. május, 5/6.

Bizonyítsuk be, hogy ha $m = 5^n + 3^n + 1$ prímszám, akkor 12 osztja n-et.

Számelmélet – kanonikus alak 1.

S16.1. Japán, Matematikai Olimpia, 1998, 1. forduló

Határozzuk meg azt a legkisebb 1998-cal osztható n pozitív egész számot, melynek tízes számrendszerbeli alakjában minden számjegy egyenlő.

S16.2. Belgium, Matematikai Olimpia, 1998, döntő, 1/4.

Igazoljuk, hogy van olyan a, b, c egész számhármas, amelyre $0 < a < b \le c < 2a$, $a + b + c = 1998$, és az a, b, c számok legnagyobb közös osztója a lehető legnagyobb. Egyértelmű-e a megoldás?

S16.3. Ausztria, Matematikai Olimpia, 2002. április, selejtező, 1. forduló 1/4.

Határozzuk meg azt a legkisebb pozitív egész x számot, amelyre az alábbi törtek már nem egyszerűsíthetők (a számlálójuk és nevezőjük relatív prím):

$$\frac{3x+9}{8}, \frac{3x+10}{9}, \frac{3x+11}{10}, ..., \frac{3x+49}{48}.$$

S16.4. Észtország, őszi nyílt verseny, 2001. október, szeniorok, 3/5.

Tetszőleges pozitív egész n-re jelöljük S(n)-nel az n szám pozitív osztóinak összegét (beleértve 1-et és önmagát is).
a) Bizonyítsuk be, hogy $S(6n) \le 12S(n)$.
b) Milyen n-re teljesül az $S(6n) = 12S(n)$ egyenlőség?

S16.5. Szingapúr, Matematikai Olimpia, 1997

Határozzuk meg azon n pozitív egész számokat, amelyekre
a) n-nek pontosan 6 pozitív osztója van: $1, d_1, d_2, d_3, d_4, n$;
b) $1 + n = 5(d_1 + d_2 + d_3 + d_4)$.

Számelmélet – kanonikus alak 2.

S17.1. Japán, Matematikai Olimpia, 1998, 1. forduló

Hány 1998-nál nem nagyobb pozitív egész n számra igaz, hogy $n^{1998} – 1$ osztható 10-zel?

S17.2. Litvánia, 1997

Határozzuk meg azt a legkisebb n egész számot, amelyre a $\frac{7}{n+9}, \frac{8}{n+10}, \frac{9}{n+11}, ..., \frac{31}{n+33}$ törtek egyike sem egyszerűsíthető.

S17.3. Észtország, 1998, döntő

Legyen az n pozitív egész szám két pozitív osztója d_1 és d_2, s $\left(\frac{n}{d_1}, d_2\right) = \left(\frac{n}{d_2}, d_1\right)$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $d_1 = d_2$.

S17.4. Cseh és Szlovák Matematikai Olimpia, 2002. január, 2. forduló

Határozzuk meg az x, y természetes számokat, ha $x^2 = 4y + 3\cdot[x, y]$, ahol [x, y] az x és y számok legkisebb közös többszörösét jelenti.

S17.5. Brit Matematikai Olimpia, 1998, 2. forduló 3/4.

Tegyük fel, hogy az x, y, z pozitív egész számok kielégítik az $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ egyenletet és legyen h az x, y, z számok legnagyobb közös osztója. Bizonyítsuk be, hogy hxyz és h(y – x) négyzetszámok.

Számelmélet – kanonikus alak 3.

S18.1. Szlovénia, Matematikai Olimpia, 2002, döntő, 10. évf. 2/4.

Határozzuk meg azt a legkisebb pozitív egész számot, amely előáll 9, 10 és 11 szomszédos pozitív egész szám összegeként is.

S18.2. Észtország, Matematikai Olimpia, 2002, döntő, 10. évf. 1/5.

Az m és n pozitív egész számok d legnagyobb közös osztója és v legkisebb közös többszöröse eleget tesz a $3m + n = 3v + d$ egyenletnek. Bizonyítsuk be, hogy m osztható n-nel.

S18.3. Szerbia, Matematikai Olimpia, 1999, 1. kategória (idő: 4 óra) 5/5.

Osszuk el az $n \geq 2$ természetes számot az összes nála kisebb pozitív egész számmal, s az így kapott osztási maradékok közül adjuk össze a különbözőket. Határozzuk meg n értékét, ha az összeg n.

S18.4. Japán, Matematikai Olimpia, 1992, 1. forduló

Az A halmaz elemei $2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \cdot 5^{n_3} \cdot 7^{n_4} \cdot 11^{n_5} \cdot 13^{n_6}$ alakú pozitív egész számok, ahol $0 \leq n_i \leq 1$ minden $1 \leq i \leq 6$ esetén. Határozzuk meg $\sum_{a \in A} \frac{1}{a}$ értékét.

S18.5. Írország, Matematikai Olimpia, 1998, 2. nap (idő: 3 óra) 1/5.

Határozzuk meg azon pozitív egész n számokat, melyeknek 16 darab d_1, d_2, … , d_{16} pozitív osztójuk van, s ezekre $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_{16} = n$, $d_6 = 18$ és $d_9 - d_8 = 17$.

Egzisztencia és konstrukció a számelméletben 1.

S19.1. Kanada, 2002

Határozzuk meg azon n értékeket, amelyekre $1! + 2! + 3! + \ldots + n!$ négyzetszám.

S19.2. Észtország, Matematikai Olimpia, 1999, döntő, 12. évf. 5/5.

Egy kör kerületére valamilyen sorrendben ráírtuk a 0, 1, 2, … , 9 számokat. Bizonyítsuk be, hogy
a) található három szomszédos szám, melyek összege legalább 15;
b) nem feltétlenül található három szomszédos szám, melyek összege nagyobb, mint 15.

S19.3. Görögország, Matematikai Olimpia, 2002. február, juniorok, 3/4.

Határozzuk meg a pozitív egész x, y, z számokat ($x \le y \le z$), ha $xy + yz + zx - xyz = 2$.

S19.4. Thaiföld, Matematikai Olimpia, 2001

Hány olyan háromjegyű pozitív egész szám van, amelyek reciproka előállítható két különböző paritású pozitív egész szám reciprokának összegeként?

S19.5. Pán-Afrikai Matematikai Olimpia, 2001. július, 1. nap (idő: 4.5 óra) 1/3.

Határozzuk meg azon $n \ge 1$ egész értékeket, amelyekre az $\frac{n^3+3}{n^2+7}$ tört értéke is egész.

Egzisztencia és konstrukció a számelméletben 2.

S20.1. Macedónia, 2002, 1. forduló, 9. évf.

20 pozitív egész szám összege 2002. Határozzuk meg a számok legnagyobb közös osztójának lehetséges maximumát.

S20.2. Észtország, tavaszi nyílt verseny, 2002. február, juniorok, 1/5.

Elhelyezhetjük-e az 1, 2, … , 16 számokat egy
a) egyenes mentén;
b) körvonalon
úgy, hogy bármely két szomszédos szám összege egy egész szám négyzete legyen?

S20.3. Litvánia, 2001. október

Határozzuk meg azon m pozitív egész értékeket, amelyekre $\sqrt{m^2+m+1}$ is pozitív egész szám.

S20.4. Írország, Matematikai Olimpia, 2002. május, 1. forduló (idő: 3 óra) 3/5.

Határozzuk meg az összes (p, q, n) pozitív egészekből álló számhármast, ahol p, q prímek és

$p(p + 3) + q(q + 3) = n(n + 3)$.

S20.5. Bulgária, 2001. március

Adjuk meg azt a legkisebb, 1-nél nagyobb n egész számot, amelyre $\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n}$ négyzetszám.

Egzisztencia és konstrukció a számelméletben 3.

S21.1. Japán, 1990, olimpiai válogatóverseny, 1. forduló

Határozzuk meg azt a legkisebb pozitív egész számot, amelynek a négyzete három egyforma (nemzérus) számjegyre végződik.

S21.2. Új-Zéland, Matematikai Olimpia, 1998, 2. kategória

Határozzuk meg a p prímszámot, ha $p^2 + 11$-nek pontosan 6 különböző osztója van (beleértve az 1-et és önmagát is).

S21.3. Görögország, Matematikai Olimpia, 2000, 2/4.

Határozzuk meg azon p prímszámokat, amelyekre $1 + p^2 + p^3 + p^4$ egy egész szám négyzetével egyenlő.

S21.4. Dél-Afrika, Rhodes-verseny, 2001. április, 3. forduló (idő: 4.5 óra) 3/3.

Legyen $m \geq 2$ egész szám. Határozzuk meg azt a legkisebb $n > m$ egész számot, amelyre bárhogyan is osztjuk két részhalmazra az $\{m, m + 1, \ldots, n\}$ halmazt, legalább az egyik halmazban lesz három (nem szükségképpen különböző) a, b, c szám, amelyekre $a^b = c$.

S21.5. Észtország, 1998, döntő

Határozzuk meg azon $n > 2$ egész számokat, amelyekre $(2n)! = (n - 2)!\cdot n!\cdot(n + 2)!$.

Geometriai számelmélet

S22.1. Horvátország, regionális verseny, 2002, 11. évf. 3/4.

Határozzuk meg a négyzet alapú egyenes hasáb éleinek hosszát, ha az élek hossza egész szám, és az oldallapok területének számértéke egyenlő az élek összegével.

S22.2. Szlovénia, Matematikai Olimpia, 2002, 1. forduló, 11. évf. 2/4.

Adott egy kocka, melynek térfogata, és egy négyzet, melynek területe egész szám. A kocka éle 1 egységgel hosszabb, mint a négyzet oldala. Bizonyítsuk be, hogy a kocka éle és a négyzet oldala is egész szám.

S22.3. Dél-Afrika, Stellenbosch-verseny, 2000. december, 2. forduló (idő: 3.5 óra) 5/7.

Az ABC nem-tompaszögű háromszög oldalai egész számok, $a < b < c$. A B-ből húzott magasság az AC oldalt D-ben metszi. Bizonyítsuk be, hogy $AD – CD = 4 \Leftrightarrow AB – BC = 2$.

S22.4. Írország, Matematikai Olimpia, 2002. május, 2. forduló (idő: 3 óra) 5/5.

Az ABC háromszög oldalai egész számok, beírt köre a BC, valamint AC oldalakat a D, ill. E pontokban érinti. Mutassuk meg, hogy ha $|AD^2 – BE^2| \le 2$, akkor $AC = BC$.

S22.5. Új-Zéland, 1991

Az ABC háromszögben $A\angle = 2B\angle$, $C\angle$ tompaszög, az a, b, c oldalak egészek. Határozzuk meg a háromszög lehetséges legkisebb kerületét.