

## Kombinatorika 1.

### K1.1. Észtország, Matematikai Olimpia, 1999, döntő, 10. évf. 4/5.

Adott 32 páronként különböző tömegű kő és egy mérő súlyok nélküli kétkarú mérleg. Hogyan tudjuk 35 méréssel meghatározni, hogy melyik a legnehezebb kő és melyik a második legnehezebb?

### K1.2. Oroszország, Matematikai Olimpia, 2002, 4. (körzeti) forduló, 8. évf. 8/8.

Adott 18 darab egymás mellé helyezett mérő súly. Tudjuk, hogy valamely 3 szomszédos mindegyikének 99 g a tömege, a többieké pedig 100 g. A súlyok tetszőlegesen választott két csoportjának lemérhetjük tömegét. Határozzuk meg, hogy mely súlyok tömege 99 g.

### K1.3. Macedónia, 2002, 1. forduló, 12. évf.

Határozzuk meg az  $x^n y^n$  tag együtthatóját az  $(1+x)^n(1+y)^n(x+y)^n$  szorzat kifejtett alakjában.

### K1.4. Új-Zéland, Matematikai Olimpia, 1998, 2. kategória 2/5.

A végtelen négyzetrács néhány mezőjét feketére festettük úgy, hogy minden  $2 \times 3$ -as vagy  $3 \times 2$ -es rács téglalap 2 fekete mezőt tartalmaz. Hány fekete mezőt tartalmazhat egy  $9 \times 11$ -es rács téglalap?

### K1.5. Ausztria, Matematikai Olimpia, 2002. június, döntő, 1. forduló 1/3.

A  $8 \times 8$ -as sakktábla összefüggő mezőiből téglalapokat állíthatunk elő, melyek mérete  $1 \times 1$ -estől  $8 \times 8$ -asig terjedhet. Mennyi az összes ilyen téglalap területének összege? Határozzuk meg az  $a \times b$  méretű tábla összes téglalapjának együttes területét is.

## Kombinatorika 2.

### K2.1. Görögország, 2002. április, döntő (juniorok) 4/4.

Adott 100 kártya, melyek egyik, „páratlan” oldalára páratlan számot írtunk, a másik, „páros” oldalra eggyel nagyobb páros számot írtunk úgy, hogy az 1, 2, ..., 200 számok mindegyikét felhasználtuk. Az A tanuló véletlenszerűen kiválasztott 21 kártyát, összeadta az ezek két oldalán található számokat, és így 913-at kapott. Ezután a B tanuló a maradék kártyák közül kiválasztott 20 darabot, összeadta az ezek két oldalán található számokat és 2400-at kapott.

a) Mutassuk meg, hogy A hibázott az összeadás folyamán.

b) Mutassuk meg, hogy ha viszont A helyes összege 903, akkor B követett el hibát.

### K2.2. Japán, Matematikai Olimpia, 1998, 1. forduló

Legyen  $a_n = 1998 \cdot 2^{n-1}$ ,  $1 \leq n \leq 100$ . A sorozat hány tagjára igaz, hogy a tízes számrendszerbeli alakja 1-essel kezdődik?

### **K2.3. Szovjetunió, Matematikai Olimpia, 1989**

Bizonyítsuk be, hogy a  $7 \times 9 \times 11$ -es méretű téglatestet nem tölthető ki 77 darab  $1 \times 3 \times 3$ -as méretű téglával.

### **K2.4. Horvátország, 2002, területi verseny, 4. évf. 3/4.**

9 tanuló vett részt egy matematikaversenyen. Tudjuk, hogy minden feladatot pontosan 3 tanuló oldott meg, valamint bármely két tanuló esetén pontosan egy olyan feladat van, amelyet mindketten megoldottak. Hány feladatot tűztek ki a versenyen?

### **K2.5. Észtország, Matematikai Olimpia, 1999, döntő, 12. évf. 4/5.**

A  $2n \times 2n$ -es sakktábla néhány mezőjére korongokat tettünk oly módon, hogy minden vízszintes és függőleges sorba páratlan számú korong került. Bizonyítsuk be, hogy a fekete mezőkön lévő korongok száma páros.

## **Skatulya-elv 1.**

### **K3.1. Szlovénia, Matematikai Olimpia, 1998, 1. forduló, 12. évf. 4/4.**

Egy törzsnek 90 harcosa van. Mindegyik harcos a lándzsáját 9 piros vagy sárga paradicsommadár-tollal díszíti fel. A tollakat sorban helyezik a lándzsára úgy, hogy nem kerül egymás mellé két piros toll. Lehetséges, hogy minden lándzsa különböző díszítésű?

### **K3.2. Görögország, Matematikai Olimpia, 2000, 4/4.**

Adottak az  $M$  halmaz részhalmazai  $A_1, A_2, \dots, A_{2000}$  úgy, hogy  $|A_i| \geq \frac{2|M|}{3}$  ( $i = 1, 2, \dots, 2000$ ) teljesül. ( $|X|$  az  $X$  halmaz elemszámát jelenti.) Bizonyítsuk be, hogy van olyan  $M$  halmazbeli  $m$  elem, amely legalább 1334 darab részhalmazban előfordul.

### **K3.3. Bulgária, Matematikai Olimpia, 1994**

Adott 33 természetes szám, amelyek prímosztói a 2, 3, 5, 7, 11 számok közül kerülnek ki. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható közülük két olyan szám, amelyek szorzata négyzetszám.

### **K3.4. Litvánia, 2001. október**

A  $6 \times 6$ -os sakktáblát 18 darab  $2 \times 1$ -es dominóval fedtük le (hézagmentesen és átfedés nélkül). Bizonyítsuk be, hogy a mezőket elválasztó függőleges vagy vízszintes vonalak között van olyan, amelyik egyetlen dominót sem metsz el.

### **K3.5. Brit Matematikai Olimpia, 2000, 2. forduló**

a) Adjunk meg a tíz pozitív egész számból álló  $A$  halmazt, ha tudjuk, hogy semelyik 6 különböző elemének összege sem osztható 6-tal.

b) Van-e megfelelő halmaz akkor, ha az a) feladatbeli tíz helyett tizenegy elemből áll  $A$ ?

## Skatulya-elv 2.

### **K4.1. Szlovénia, Matematikai Olimpia, 1998, 1. forduló, 11. évf. 4/4.**

12 személy helyet foglalt egy kerek asztal körül úgy, hogy semelyikük sem ült arra a helyre, amit a házigazda jelölt ki. Bizonyítsuk be, hogy legalább két személy a kijelölt helyére ültethető, ha azonos irányban megfelelő számú hellyel mindannyian arrébb ülnek.

### **K4.2. Görögország, Matematikai Olimpia, 2002. február 2/4.**

A National Technical University egy diákja a múlt nyáron 37 napon keresztül felsőfokú matematikai tanulmányokat folytatott a következő szabályok szerint:

- (1) Minden nap legalább egy órát olvasott.
- (2) Minden nap egész órányi ideig olvasott, legfeljebb 12 órát.
- (3) Összesen legfeljebb 60 órányit olvasott.

Bizonyítsuk be, hogy volt néhány szomszédos nap, amelyeken a diák összesen 13 órát olvasott.

### **K4.3. Oroszország, Matematikai Olimpia, 2002. 4. (körzeti) forduló, 10. évf. 2/8.**

Egy síkbeli konvex sokszög legalább  $m^2 + 1$  rácspontot tartalmaz (a belsejében). Mutassuk meg, hogy van olyan egyenes, amelynek a sokszögon belüli szakaszán  $m + 1$  rácspont található.

### **K4.4. Kanada, 1996, olimpiai előkészítő (levelező)**

Egy tudományos konferencia 9 résztvevője közül senki sem beszél háromnál több idegen nyelven, de bármely három résztvevőből kettő beszél közös nyelven. Mutassuk meg, hogy van olyan nyelv, amelyet legalább három résztvevő beszél.

### **K4.5. Írország, Matematikai Olimpia, 1999, 1. forduló (idő: 3 óra) 2/5.**

Mutassuk meg, hogy a Fibonacci-sorozatnak van 1000-rel osztható tagja. (A Fibonacci-sorozat definíciója:  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$  és  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ , ha  $n \geq 2$ . Néhány kezdőtag: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...)

## Skatulya-elv 3.

### **K5.1. Németország, 1999, országos verseny, 1. forduló**

100 majom között kiosztottunk 1600 kókuszdiót (lehetséges, hogy néhány majom egyet sem kapott). Bizonyítsuk be, hogy a kiosztástól függetlenül mindig lesz négy majom, akik ugyanannyi kókuszdiót kaptak.

### **K5.2. Szlovénia, Matematikai Olimpia, 2002, döntő, 11. évf. 4/4.**

Egy kastély pincéjében 7 törpe őrzi a kincsét. A kincs 12 ajtó mögött van, mindegyik ajtón 12 különböző zár. Mindegyik törpénél néhány kulcs található úgy, hogy bármely három törpénél megvan az összes zár kulcsa. Bizonyítsuk be, hogy a törpéknél együttesen legalább 333 kulcs található.

### **K5.3. Litvánia, 1997**

Van-e olyan pozitív egész  $n$  szám, amelyre  $1997^n - 1$  utolsó 1997 számjegye zérus?

### **K5.4. Új-Zéland, 1990**

Adott 101 téglalap, oldalai 100-nál nem nagyobb egész számok. Bizonyítsuk be, hogy található köztük három különböző, A, B, C, amelyekre igaz, hogy A lefedhető B-vel és B lefedhető C-vel. (Egy  $m \times n$ -es téglalap lefedhető egy  $m' \times n'$  méretű téglalappal, ha  $m < m'$  és  $n \leq n'$  vagy ha  $m \leq m'$  és  $n < n'$ .)

### **K5.5. Szerbia, Matematikai Olimpia, 1999, 9. évf. (idő: 4 óra) 2/5.**

Adott az  $A \subset \{1, 2, \dots, 100\}$  tíz elemű halmaz. Bizonyítsuk be, hogy található az A halmaznak két diszjunkt és nem-üres részhalmaza, S és T, amelyekben az elemek összege egyenlő.

## **Egzisztencia és konstrukció a kombinatorikában 1.**

### **K6.1. Szlovénia, Matematikai Olimpia, 2002, döntő, 9. évf. 4/4.**

A  $4 \times 4$ -es táblázatban legalább hány mezőbe kellene csillagot rajzolni, hogy két tetszőleges sor és két tetszőleges oszlop elhagyása után is maradjon még csillag a táblán?

### **K6.2. Észtország, 2002. február, tavaszi nyílt verseny, szeniorok 5/5.**

Legfeljebb hány négyjegyű, különböző pozitív egész szám készíthető az 1, 2, 3 számjegyekből, ha bármely két számban legfeljebb egy helyiértéken van azonos számjegy?

### **K6.3. Új-Zéland, 1992**

Egy varrónő szeretné, ha hat mérópálca segítségével 1 cm-től 63 cm-ig minden egész cm hosszúságot meg tudna mérni. Milyen hosszúak legyenek a pálcák?

### **K6.4. Kanada, 1996, olimpiai előkészítő (levelező)**

A  $8 \times 8$ -as sakktáblára mezőire 32 fehér és 32 fekete korongot helyeztünk. Két különböző színű korongot összetartozónak nevezünk, ha azonos sorban vagy oszlopban vannak. Határozzuk meg az összetartozó párok a) maximális; b) minimális számát (a korongok minden lehetséges elrendezése esetén).

### **K6.5. Oroszország, Matematikai Olimpia, 2002, 4. (körzeti) forduló, 10. évf. 8/8.**

Egy  $10 \times 10$ -es sakktábla minden egyes mezőjét kiszíneztük úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban legfeljebb 5 különböző színű mező található. Legfeljebb hány színt használhattunk?

### **Egzisztencia és konstrukció a kombinatorikában 2.**

#### **K7.1. Szerbia, Matematikai Olimpia, 1999, 11. évf. (idő: 4 óra) 3/5.**

Legfeljebb hány 5 egységnégyzetből álló, egyenlő szárú kereszt vágható ki egy  $6 \times 6$ -os papírból?

#### **K7.2. Észtország, 1999, nyílt verseny, 9. és 10. évf.**

Mely  $n \geq 3$  értékekre lehet a síkon olyan  $n$  szakaszból álló zárt töröttvonalat rajzolni, amelyben bármely két szakasznak pontosan egy közös pontja van (belső vagy határpont), de semelyik határpont sem tartozik kettőnél több szakaszhoz?

#### **K7.3. Bulgária, Matematikai Olimpia, 1993**

Adott az egységnyi oldalú szabályos hatszög. Határozzuk meg azt a legnagyobb  $n$  értéket, amelyre felvehető  $n$  pont a hatszög belsejében vagy oldalain úgy, hogy bármely két pont távolsága legalább  $\sqrt{2}$  legyen.

#### **K7.4. Írország, Matematikai Olimpia, 1998, 2. forduló (idő: 3 óra) 3/5.**

Tekintsük a pozitív egész számok  $N$  halmazát.

- Bizonyítsuk be, hogy  $N$  felbontható három, páronként diszjunkt halmazra úgy, hogy ha  $m, n \in N$  és  $|m - n| = 2$  vagy  $5$ , akkor  $m$  és  $n$  különböző halmazba tartozik.
- Bizonyítsuk be, hogy  $N$  felbontható négy, páronként diszjunkt halmazra úgy, hogy ha  $m, n \in N$  és  $|m - n| = 2, 3$  vagy  $5$ , akkor  $m$  és  $n$  különböző halmazba tartozik.
- Mutassuk meg, hogy a b) esetben  $N$  már nem bontható fel három megfelelő részhalmazra.

#### **K7.5. Németország, 1999, országos verseny, 1. forduló**

Határozzuk meg, hogy legalább hány háromszög lapja van azoknak a poliédereknek, amelyeknek több lapjuk van, mint csúcsuk.

### **Algoritmusok 1.**

#### **K8.1. Új-Zéland, Matematikai Olimpia, 1997, 1. kategória 5/5.**

Írjunk a táblára egy 1-est, majd minden lépésben helyettesítsük a táblán lévő számot a kétszeresével vagy a négyzetével. Hogyan érhető el  $2^{45}$  pontosan 10 lépésben?

#### **K8.2. Litvánia, 2001. október**

Előállítható az  $\frac{1}{2}$  tört  $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \dots + \frac{1}{n_k}$  alakban, ahol az  $n_1, n_2, \dots, n_k$  különböző pozitív egész számok?

**K8.3. Szlovénia, Matematikai Olimpia, 1998, döntő, 9. évf. 4/4.**

A 8x8-as sakkárta bal alsó 3x3-as sarkában 9 korong áll (az ábrán • jelöli a korongokat). Bármely koronggal átugorhatjuk a vele élben vagy csúcsban szomszédos korongot, ha a korong mögötti érkezési mező üres. Eljuttathatjuk-e az adott lépésekkel a 9 korongot a tábla bal felső 3x3-as sarkába? (A célmezőket o jelöli.)

o	o	o					
o	o	o					
o	o	o					
•	•	•					
•	•	•					
•	•	•					

**Megjegyzés:**

Érdemes megemlíteni a következő feladatot:

**K8.4. Feladat:**

A 8x8-as sakkárta bal alsó 3x3-as sarkában 9 korong áll. Bármely koronggal átugorhatjuk a vele élben vagy csúcsban szomszédos korongot, ha a korong mögötti érkezési mező üres; valamint bármely korongot feltolhatjuk függőleges irányban egy mezővel, ha ott nincs korong. Legkevesebb hány lépéssel juttathatjuk el a 9 korongot a tábla bal felső 3x3-as sarkába?

**K8.5. Kanada, 2001. április, Konhauser-verseny**

a) Az A, B, C betűkből egy 10-hosszúságú sorozatot készítünk, pl. A B C C B A B C B A. Ezután minden lépésben a következő sorba egy betűvel rövidebb sorozatot írunk oly módon, hogy két egyforma betű alá ugyanazt a betűt írjuk, míg két különböző betű alá a harmadikat. Ezt az eljárást folytatva végül egyetlen betűt kapunk. Konkrét példa a fenti sorozatra:

```

A B C C B A B C B A
  C A C A C C A A C
    B B B B C B A B
      B B B A A C C
        B B C A B C
          B A B C A
            C C A B
              C B C
                A A
    
```

A

Bizonyítsuk be, hogy az így kapott háromszög három sarka vagy három egyforma betűből áll, vagy három különbözőből.

b) Mely pozitív egész  $n$  értékekre (a fenti példában  $n = 10$ ) igaz az állítás tetszőleges  $n$ -hosszú A, B, C-betűsorozatra?

## Algoritmusok 2.

### K9.1. Oroszország, Matematikai Olimpia, 2002, 4. (körzeti) forduló, 8. évf. 5/8.

Egy négyjegyű számot írtunk a táblára. Ezután minden lépésben vagy két szomszédos számjegyet megnövelhetünk 1-gyel, ha egyik sem volt 9-es; vagy két szomszédos számjegyet csökkenthetünk 1-gyel, ha egyik sem volt 0. Ezen műveletek tetszőleges számú alkalmazásával elérhető-e a kezdeti 1234 számból 2002?

### K9.2. Litvánia, 1997

Egy táblára felírtuk a  $\sqrt{2}$ , 2 és  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  számokat. Ezután minden lépésben letörölhetünk két számot, s helyettük visszaírhatjuk összegük, ill. különbségük  $\sqrt{2}$ -d részét. Lehetséges-e, hogy néhány lépés után az 1,  $\sqrt{2}$  és  $1 + \sqrt{2}$  számokat kapjuk?

### K9.3. Dél-Afrika, Potchefstroom-verseny, 2001. július, 1. forduló (idő: 4 óra 15 p.) 4/5.

A számítógép 98x98-as képernyője kezdetben sakktáblaszerűen színezett. Egy-egy lépésben az egérrel a képernyő bármely téglalap alakú részét kijelölhetjük, s az ott lévő mezők színét ellentétesre változtathatjuk. Legkevesebb hány lépésben érhető el, hogy minden mező egyszínű legyen?

### K9.4. Brazília, Matematikai Olimpia, 2001, második nap 1/3.

Egy számológép kijelzője kezdetben 1-et mutat. Ezután minden lépésben az aktuális érték szinuszát vagy koszinuszát számolhatjuk ki radiánban. Mi lesz az elérhető legnagyobb érték 2001 lépés után?

### K9.5. Irán, Matematikai Olimpia, 2002, 1. forduló 6/6. (idő: 2x4 óra)

Tekintsünk szomszédos négyzetek egyik irányban végtelen hosszú sorozatát. Néhány négyzetben érméket helyeztünk el, egy-egy négyzetben több érme is lehet. Minden egyes lépésben az alábbi két művelet valamelyikét végezhetjük el:

- 1) Ha egyszerre két szomszédos négyzetben (legyen pl. az  $(n-1)$ . és  $n$ .) található érmék, akkor mindkét négyzetről elvehetünk egy-egy érmét, és az  $(n+1)$ . négyzetre helyezhetjük az egyiket.
- 2) Az  $n$ . négyzetről ( $n \geq 3$ ) elvehetünk két érmét és az egyiket az  $(n+1)$ ., a másikat az  $(n-2)$ . négyzetre helyezhetjük.

- a) Bizonyítsuk be, hogy bármely lépéssorozat olyan végállapothoz vezet, amelyben már nem tehetünk további lépéseket.  
b) Tegyük fel, hogy az első  $n$  négyzet mindegyikében egyetlen érme van. Mutassuk meg, hogy semmilyen lépéssorozattal sem érhetjük el, hogy az  $(n + 1)$ . négyzetbe érme kerüljön.

### Kétszemélyes játékok

#### K10.1. Szlovénia, Matematikai Olimpia, 1998, döntő, 10. évf. 4/4.

Tekintsük a következő kétszemélyes játékot. Kezdetben adott egy legalább két kavicsot tartalmazó kupac. A soron következő játékos kiválaszt egy kupacot és azt két vagy három részre osztja úgy, hogy mindegyik részben legalább egy kavics maradjon. A következő játékos ugyanígy jár el. Az a játékos veszít, aki már nem tud kettéosztani egy kupacot sem. Melyik játékos nyer, ha mindketten okosak (jól játszanak)?

#### K10.2. Észtország, 1998, nyílt verseny

Mary és Peter az alábbi kétszemélyes játékot játssza egy  $100$  oszlopból és  $n$  sorból álló táblázaton ( $n \geq 2$ ). Kezdetben Marynek a jobb alsó sarokban van egy fehér bábujja, Peternek a jobb felsőben egy fekete figurája. A játékos függőleges vagy vízszintes irányban egyetlen mezővel elmozdíthatja bábuját, ha a célmező üres. Mary kezd, majd felváltva lépnek. Mary akkor nyer, ha bábuját a felső sorba juttatja, Peter pedig akkor, ha ezt megakadályozza (tehát ha valamelyik játékhelyzet ismétlődik). Kinek van nyerő stratégiája?

#### K10.3. Észtország, 1998, nyílt verseny

Mary és Peter az alábbi kétszemélyes játékot játssza egy  $100$  oszlopból és  $n$  sorból álló táblázaton ( $n \geq 2$ ). Kezdetben Marynek a jobb alsó sarokban van egy fehér bábujja, Peternek a jobb felsőben két fekete figurája. Mary függőleges vagy vízszintes irányban egyetlen mezővel elmozdíthatja bábuját, ha a célmező üres, míg Peternek minden lépésben mindkét bábujával lépnie kell. Mary kezd, majd felváltva lépnek. Mary akkor nyer, ha bábuját a felső sorba juttatja, Peter akkor nyer, ha Mary nem tud lépni, s a játék döntetlen, ha valamelyik játékhelyzet ismétlődik a táblán. Kinek van nyerő stratégiája?

#### K10.4. Szerbia, Matematikai Olimpia, 1999, 10. évf. (idő: 4 óra) 3/5.

Felírtuk a táblára az  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  kifejezést, majd ezután két diák az alábbi játékot játssza:

A kezdő játékos az  $a, b, c$  paraméterek egyikének helyére valamilyen valós számot ír; a második játékos ugyanezt teszi a maradék két együttható egyikével; végül az első játékos az utolsó paraméternek is értéket ad. Ha a kapott polinomnak nincs pozitív gyöke, akkor a kezdő nyer, egyébként a második. Határozzuk meg, hogy melyik játékosnak van nyerő stratégiája.

#### K10.5. Dél-Afrika, Stellenbosch-verseny, 1998. december, 4. forduló (idő: 3 óra) 1/3.

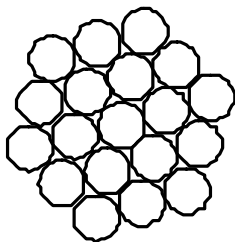
Két játékos felváltva tölti ki az  $f(x) = x^{10} + *x^9 + *x^8 + \dots + *x + 1$  polinom \*-gal jelölt együtthatóit (összesen 9 lépést tesznek). A kezdő játékos akkor nyer, ha a játék végén keletkezett polinomnak nem lesz valós gyöke, egyébként a második játékos nyer. Mutassuk meg, hogy a második játékosnak van nyerő stratégiája.



## Kombinatorikai rekurziók 1.

### K11.1. Ausztrália, Matematikai Olimpia, 1996

Hatszög alakban csöveket helyeztünk egymás mellé, számuk rendre 1, 7, 19 (ez látható az ábrán), 37, 61, 91 stb. Ha folytatjuk ezt a sorozatot, észrevehetjük, hogy gyakran kapunk 69-re végződő számot. A sorozat melyik tagja lesz a 69-re végződő tagok közül a 69-ik?



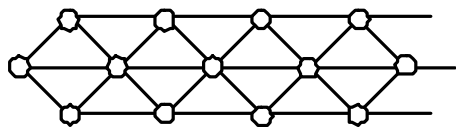
### K11.2. Brit Matematikai Olimpia, 2001. december, 1. forduló (idő: 3.5 óra) 4/5.

Egy kerek asztal körül 12-en ülnek. Hányféleképpen foghat hat pár kezet egymással úgy, hogy a kézfogások ne keresztezzék egymást? (Egyszerre mindenki csak egyvalakivel fog kezet.)

### K11.3. Észtország, Matematikai Olimpia, 2002, döntő, 10. évf. 5/5.

A tanár felír egy-egy 1-est a tábla két végére. Az első diák a két 1-es közé egy 2-est ír; ezután minden következő diák az éppen táblán lévő számok közé beírja azok összegét. (Pl. a második diák után az 1, 3, 2, 3, 1 számok szerepelnek a táblán, a harmadik után 1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 1 stb.) Határozzuk meg az  $n$ . diák után a táblán lévő számok összegét.

### K11.4. Ausztria, Matematikai Olimpia, 2002. június, döntő, 2. nap 2/3.



Az ábra egy úthálózat kezdetét mutatja. A középső sor pontjait az 1, 4, 7, ..., a felső sorét a 2, 5, 8, ..., az alsó sorét pedig a 3, 6, 9, ... számokkal számozzuk. Hányféleképpen juthatunk el az „1” pontból a „ $3n + 1$ ” pontba, ha közben csak növekvő számozású pontra léphetünk?

### K11.5. Bulgária, Matematikai Olimpia, 1995, 3. forduló

Legyen  $n > 1$  pozitív egész szám. Határozzuk meg az  $1, 2, \dots, n$  számok azon  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  permutációinak számát, amelyekre igaz, hogy pontosan egy  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  indexre teljesül, hogy  $a_i > a_{i+1}$ .

## Kombinatorikai rekurziók 2.

### K12.1. Kanada, 2001. április, Konhauser-verseny

Amikor Mark felmegy a lépcsőházban, lépésenként 1, 2 vagy 3 fokot halad egyszerre.

a) Hányféleképpen tud felmenni a 10-hosszú lépcsőn? (Az utolsó fokon kell befejeznie az utat; két út akkor azonos, ha minden lépésben ugyanarra a lépcsőfokra lép.)

b) Hányféleképpen tud felmenni a 10-hosszú lépcsőn, ha a 6. lépcsőfokra nem lép rá? (Korábban már elesett ott.)

### K12.2. Japán, Matematikai Olimpia, 2002, 1. forduló

Egy körlemez 7 egybevágó körcikkre osztottunk fel, amelyek mindegyikét 4 szín (piros, kék, sárga, zöld) valamelyikével színezhetünk ki. Egy színt – természetesen – többször is felhasználhatunk, s nem szükséges mind a négy színt felhasználni; viszont megköveteljük, hogy a szomszédos körcikkek különböző színűek legyenek. Hány különböző színezés létezik? Két színezést azonosnak tekintünk, ha a kör középpontja körüli forgatással egymásba vihetők.

### K12.3. Bulgária, 2001. február

Jelentse  $A_n$  azon 0-kból és 1-esekből álló  $n$ -hosszú sorozatok számát, amelyekben nem szerepel a 0101 számjegycsoport. Határozzuk meg  $A_{2001}$  paritását.

### K12.4. Észtország, Matematikai Olimpia, 2002, döntő, 11. évf. 5/5.

John egy robotot épít, amely egy szabályos nyolcszög oldalain mozog úgy, hogy pontosan egy perc alatt halad végig egy oldalon. A robot kezdetben a nyolcszög valamely  $A$  csúcsában van, a továbbiakban az egyes csúcsoknál vagy eredeti irányban halad tovább, vagy megfordul és az ellenkező irányban folytatja útját. Hányféleképpen érhet a robot  $n$  perc után az  $A$  csúccsal szemköztes  $B$  csúcsba?

### K12.5. Írország, Matematikai Olimpia, 1999, 1. nap (idő: 3 óra) 5/5.

Az  $a < b < c$  számok számtani sorozatot alkotnak, ha  $c - b = b - a$ . Definiáljuk az  $u_n$  sorozatot ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) a következőképpen:  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = 1$ , valamint minden  $n \geq 1$  esetén legyen  $u_{n+1}$  az a legkisebb pozitív egész szám, amelyre  $u_{n+1} > u_n$  és az  $\{u_0, u_1, \dots, u_n, u_{n+1}\}$  sorozatban semelyik három elem sem alkot számtani sorozatot. Határozzuk meg  $u_{100}$  értékét.

## Kombinatorikus számelmélet 1.

### K13.1. Oroszország, Matematikai Olimpia, 2002, 4. (körzeti) forduló, 8. évf. 1/8.

Ki lehet-e tölteni egy  $9 \times 2002$ -es táblázat mezőit pozitív egész számokkal úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban prímszám legyen a számok összege?

**K13.2. Horvátország, 2002, országos verseny, 9. évf. 4/4.**

A 30 tartományra osztott szerencsekerék egyes részeire – valamilyen sorrendben – az 50, 100, 150, ... , 1500 számokat írták. Bizonyítsuk be, hogy található három szomszédos tartomány, amelyekre az együttesen írt számok összege legalább 2350.

**K13.3. Belgium, Matematikai Olimpia, 1998, döntő, 3/4.**

Határozzuk meg az összes  $3 \times 3$ -as bűvös négyzetet.

Definíció: Az  $n \times n$ -es bűvös négyzet egy  $n \times n$ -es táblázat, melynek mezőit az  $1, 2, \dots, n^2$  számokkal úgy töltöttük ki, hogy bármely sorban, bármely oszlopban és a két átlóban az elemek összege egyenlő.

**K13.4. Észtország, Matematikai Olimpia, 2002, döntő, 11. évf. 4/5.**

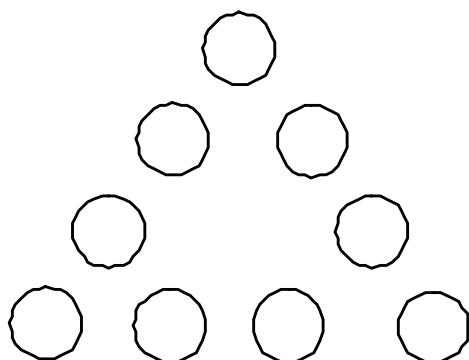
Az  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  olyan valós számok, melyekre az  $a_i + a_j$  összegek között ( $i < j$ ) legalább  $N$  egész szám van. Határozzuk meg a lehetséges legnagyobb  $N$  értéket, amelyre nem minden  $a_i + a_j$  összeg egész szám.

**K13.5. Ázsiai Matematikai Olimpia, 2000. március, 2/5.**

Az ábra szerint háromszög alakú kilenc körbe az  $1, 2, \dots, 9$  számokat az alábbi feltételek szerint kell elhelyezni:

- 1) a háromszög bármely oldalán levő négy szám összege legyen egyenlő;
- 2) a háromszög bármely oldalán levő négy szám négyzetének összege is legyen egyenlő.

Határozzuk meg az összes kitöltési lehetőséget.



**Kombinatorikus számelmélet 2.**

**K14.1. Írország, Matematikai Olimpia, 2002. május, 2. forduló (idő: 3 óra) 1/5.**

Egy  $3 \times n$ -es táblázatot a következőképpen töltöttünk ki:

Az első sor az  $1, 2, \dots, n$  számokat tartalmazza balról jobbra növekvő sorrendben. A második sort a felső sor ciklikus eltolásával kapjuk, tehát valamilyen  $i$ -re ( $i, i + 1, \dots, n - 1, n, 1, 2, \dots, i - 1$ ), a harmadik sorba pedig úgy írtuk be az  $1, 2, \dots, n$  számokat, hogy a számok összege mindhárom oszlopban ugyanannyi legyen.

Mely  $n$  értékekre végezhető el a fenti kitöltés?

Azon  $n$  értékekre, amelyekre a kitöltés lehetséges, határozzuk meg a különböző kitöltések számát.

#### **K14.2. Észtország, 2002. február, tavaszi nyílt verseny, juniorok 5/5.**

Egy körre felírunk  $n$  darab valós számot úgy, hogy nem mindegyik szám  $0$ , s bármely szám egyenlő két szomszédja különbségének abszolút értékével. Mely pozitív egész  $n$  értékekre tehetjük ezt meg?

#### **K14.3. Ázsiai Matematikai Olimpia, 2001. április, (4 óra) 2/5.**

Határozzuk meg azt a legnagyobb  $N$  pozitív egész számot, amelyre igaz, hogy az  $\{1, 2, \dots, N\}$  halmaz elemei között ugyanannyi  $3$ -mal osztható szám van, mint  $5$ -tel vagy  $7$ -tel osztható (vagy  $2$ -vel és  $7$ -tel is).

#### **K14.4. Szlovénia, Matematikai Olimpia, 2002, döntő, 12. évf. 2/4.**

Legyen  $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  különböző pozitív egész számok halmaza. Az  $S$  halmaz bármely valódi részhalmazában az elemek összege nem osztható  $n$ -nel. Bizonyítsuk be, hogy ekkor  $S$  elemeinek összege osztható  $n$ -nel.

#### **K14.5. Hong Kong (Kína), Matematikai Olimpia, 1999, 3/4.**

Legyenek  $s, t$  adott nemzérus egész számok,  $(x, y)$  pedig egész számok tetszőleges rendezett párja. Egy lépésben az  $(x, y)$  párból az  $(x + t, y - s)$  párt állíthatjuk elő. Azt mondjuk, hogy az  $(x, y)$  pár *jó*, ha néhány (esetleg nulla) lépés után olyan számpárt kapunk, amelynek tagjai nem relatív prímek.

a) *Jó* pár-e maga  $(s, t)$ ?

b) Mutassuk meg, hogy minden  $s, t$  esetén található olyan  $(x, y)$  pár, amelyik *nem jó*.

### **Kombinatorikus számelmélet 3.**

#### **K15.1. Litvánia, Matematikai Olimpia, 1998**

Az  $n$  pozitív egész szám tízes számrendszerbeli alakjában az első (legmagasabb helyiértékű) számjegy megegyezik a szám jegyei közt szereplő  $0$ -k számával. Hasonlóan, ha  $1 \leq m \leq 9$ , akkor az  $(m + 1)$ . jegy az  $n$  felírásában szereplő  $m$ -jegyek száma. Határozzuk meg  $n$  lehetséges értékeit.

#### **K15.2. Kanada, 1997. december, Mandelbrot-verseny**

Pozitív egész számok összege  $n$ . Legfeljebb mekkora lehet a számok szorzata?

**K15.3. Észtország, Matematikai Olimpia, 2002, döntő, 9. évf. 3/5.**

Az  $a_1, a_2, \dots, a_n$  páronként különböző valós számok esetén jelöljük  $m$ -mel az  $a_i + a_j$  ( $i \neq j$ ) különböző értékű összegek számát. Határozzuk meg  $m$  lehetséges legkisebb értékét.

**K15.4. Japán, Matematikai Olimpia, 1992, 1. forduló**

Hány  $f: A \rightarrow A$  leképezést adhatunk meg az  $A = \{1, 2, \dots, 10\}$  halmazon, amelyre teljesül, hogy:

- $f^{30}(x) = x$  minden  $x \in A$  esetén;
- ha  $1 \leq k \leq 29$ , akkor van olyan  $a \in A$ , amelyre  $f^k(a) \neq a$ .

**K15.5. Németország, 1998, országos verseny, 2. forduló**

Legyen  $M = \{1, 2, 3, \dots, 10000\}$ . Bizonyítsuk be, hogy megadható  $M$ -nek 16 részhalmaza úgy, hogy minden  $z \in M$  esetén található 8 olyan részhalmaz, melyeknek pontosan  $z$  a közös elemük.

**Kombinatorikus számelmélet 4.**

**K16.1. Litvánia, Matematikai Olimpia, 1998**

Egy 1998 darab különböző számból álló  $H$  halmazra teljesül, hogy ha tetszőleges elemét helyettesítjük a többi szám összegével, s ezt az eljárást mindegyik számra elvégezzük, akkor ugyanazt a  $H$  halmazt kapjuk. Bizonyítsuk be, hogy az összes szám szorzata negatív.

**K16.2. Oroszország, Matematikai Olimpia, 2002, 4. (körzeti) forduló, 9. évf. 5/8.**

Egy körvonalra tetszőleges sorrendben felírtuk az  $1, 2, \dots, 60$  számokat. Legyen két szám távolsága valamely körüljárási irányban a körvonalon  $k$ , ha közöttük pontosan  $(k - 1)$  darab szám van. Lehetséges-e, hogy bármely két 2-távolságú szám összege osztható 2-vel, bármely két 3-távolságú szám összege osztható 3-mal és bármely két 7-távolságú szám összege osztható 7-tel?

**K16.3. Észtország, Matematikai Olimpia, 2002, döntő, 10. évf. 3/5.**

John választ hét pozitív egész számot,  $a_1, a_2, \dots, a_7$ -et és felírja az  $a_i a_j$ ,  $a_i + a_j$  és  $|a_i - a_j|$  számokat (ahol  $i \neq j$ ) a táblára. Határozzuk meg, legfeljebb hány különböző páratlan egész szám lehet a táblán.

**K16.4. Kanada, 1996, olimpiai előkészítő (levelező)**

Határozzuk meg azokat a  $(w_0, w_1, \dots, w_n)$  nemnegatív egész számokból álló véges sorozatokat, amelyekre teljesül, hogy minden  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ -re az  $i$  egész szám pontosan  $w_i$ -szer fordul elő a sorozatban.

**K16.5. Norvégia, 1998**

Mely pozitív egész  $n$  értékekre található az  $1, 2, \dots, n$  számoknak olyan  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  permutációja, amelyre  $k$  osztja  $x_1 + x_2 + \dots + x_k$ -t minden  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  esetén?

### **Kombinatorikus geometria 1.**

#### **K17.1. Dél-Afrika, 1998. december, Stellenbosch-verseny, 1. forduló (idő: 3 óra) 5/5.**

Egy körbe szabályos 21-szöget írtunk. Ki lehet-e választani a csúcsok közül ötöt úgy, hogy az általuk meghatározott ötszög minden oldala és minden átlója különböző hosszúságú legyen?

#### **K17.2. Kanada, 1996, olimpiai előkészítő (levelező)**

Adott a síkon  $n > 5$  pont, melyek páronként vett távolságai különbözők. Egyenes szakasszal összeköttöttük mindegyik pontot a hozzá legközelebbi ponttal. Bizonyítsuk be, hogy semelyik pont sincs 5-nél több másik ponttal összekötve.

#### **K17.3. Litvánia, 1997**

A  $d$  átlójú négyzetet felosztottuk  $m$  darab téglalapra, melyek átlói rendre  $d_1, d_2, \dots, d_m$  hosszúak. Bizonyítsuk be, hogy  $d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_m^2 \geq d^2$ .

#### **K17.4. Albánia, Matematikai Olimpia, 2002. március, 12. évf. 4/5.**

Adott a síkon a végtelen sok pontból álló  $S$  halmaz, melynek semelyik három pontja nincs egy egyenesen és bármely kettő között legalább 1 cm a távolság. Felosztható-e  $S$  két diszjunkt, végtelen részhalmazra,  $R$ -re és  $B$ -re úgy, hogy bármely  $R$ -beli csúcsú háromszög tartalmazzon a belsejében  $B$ -beli pontot, és bármely  $B$ -beli csúcsú háromszög tartalmazzon a belsejében  $R$ -beli pontot?

#### **K17.5. Ázsiai Matematikai Olimpia, 2001. április, (idő: 4 óra) 5/5.**

Adott a síkon  $n + 4$  darab pont:  $A, B, C, D, X_1, \dots, X_n$  úgy, hogy  $AB \neq CD$ , és minden  $i = 1, 2, \dots, n$  esetén az  $ABX_i$  és  $CDX_i$  háromszögek egybevágóak. Határozzuk meg  $n$  maximális értékét!

### **Kombinatorikus geometria 2.**

#### **K18.1. Észtország, Matematikai Olimpia, 2002, döntő, 10. évf. 4/5.**

Határozzuk meg annak az egységkocka felszínén haladó töröttvonalnak a maximális hosszát, amelyre a következő feltételek teljesülnek:

- a kocka éleiből és lapátlóiból áll;
- a töröttvonal nem metszi önmagát;
- bármely csúcson legfeljebb egyszer halad át;
- a töröttvonal egy testátló két végpontját köti össze.

#### **K18.2. Dél-Afrika, 2001. július, Potchefstroom-verseny, 1. forduló (idő: 4 óra 15 p.) 1/5.**

Mutassuk meg, hogy az egységsugarú körön felvehető 2001 pont úgy, hogy bármely két pont távolsága racionális legyen.

**K18.3. Törökország, 1999. március, olimpiai válogatóverseny, 2. nap (idő: 4.5 óra) 3/3.**

Bizonyítsuk be, hogy a sík nem fedhető le véges sok parabola tartománnyal.

**K18.4. Irán, Matematikai Olimpia, 2002, 1. forduló 3/6, idő: 2x4 óra**

Határozzuk meg az összes  $n$  természetes számot, amelyre igaz, hogy megadható  $n$  darab vízszintes és függőleges oldalú síkbeli egységnégyzet úgy, hogy a kapott alakzatnak legalább 3 szimmetriatengelye legyen.

**K18.5. NMO feladatjavaslat, 1996**

Adott egy  $axb$  és egy  $cx d$  méretű téglalap úgy, hogy  $a < c \leq d < b$  és  $ab < cd$ . Bizonyítsuk be, hogy az első téglalap pontosan akkor helyezhető el a második belsejében, ha

$$(b^2 - a^2)^2 \leq (bd - ac)^2 + (bc - ad)^2.$$

**Kombinatorikus geometria 3.**

**K19.1. Litvánia, 2001. október**

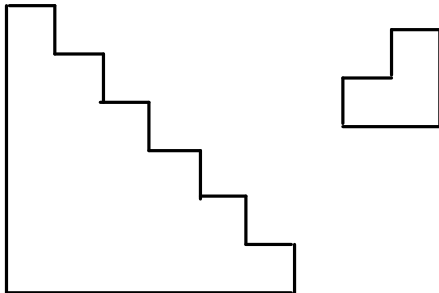
Legalább hány rácspontot fed le a 2.1 oldalú négyzet a síkbeli négyzetrácsban?

**K19.2. Japán, Matematikai Olimpia, 1991, 1. forduló**

Hány olyan sík van a térben, amelyik áthalad egy adott kocka élei közül legalább három felezőpontján?

**K19.3. Észtország, Matematikai Olimpia, 1999, döntő, 11. évf. 4/5.**

Mely  $n$  értékekre lehet az  $n$  lépcsőből álló lépcsőházat az ábrán mellékelt lemezzel lefedni? Az ábrán  $n = 6$  a lépcsőház magassága, a lépcsők magassága és szélessége 1 dm, a  $2 \times 2$ -es lemez egyik  $1 \times 1$ -es sarka hiányzik.



**K19.4. Kanada, 1996, olimpiai előkészítő (levelező)**

Adott  $n$  pont a síkon úgy, hogy nincs mind egy egyenesen, és bármely három pont által meghatározott háromszög területe kisebb, mint 1. Bizonyítsuk be, hogy a pontok lefedhetők egy 4 egység területű háromszöggel.

**K19.5. Spanyolország, Matematikai Olimpia, 2002 (módosítás)**

Adott a síkon 2002 szakasz, melyek összege 1. Bizonyítsuk be, hogy van olyan 1 egyenes, amelyre a szakaszokat merőlegesen vetítve a vetületek összege kisebb, mint  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Színezések 1.**

**K20.1. Litvánia, Matematikai Olimpia, 1998**

Az  $n^2$  egységnégyzetből álló  $n \times n$ -es fehér tábla  $n$  mezőjét feketére festettük. Ki tudunk-e vágni egy  $S \geq n$  területű fehér téglalapot a táblából, ha a)  $n = 7$ ; b)  $n = 8$ ?

**K20.2. Japán, Matematikai Olimpia, 1991, döntő**

Egy  $10 \times 14$ -es méretű téglalap mezőit sakktáblaszerűen fehérre és feketére színeztük. A mezőkre 0-t vagy 1-et írunk úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban páratlan számú 1-es legyen. Bizonyítsuk be, hogy a fekete mezőkön lévő 1-esek száma páros.

**K20.3. Oroszország, Matematikai Olimpia, 2002, 4. (körzeti) forduló, 8. évf. 2/8.**

Egy  $9 \times 9$ -es táblázat minden mezőjét pirosra vagy kékre festettük. Két mezőt akkor nevezünk szomszédosnak, ha csúcsban érintkeznek. Mutassuk meg, hogy van olyan mező, amelynek pontosan két egyszínű szomszédja van (lehet mindkét színből két-két szomszédja).

**K20.4. Spanyolország, Matematikai Olimpia, 2002, döntő, 6/6.**

Egy szabályos  $6n + 1$ -csúcsú sokszög csúcsait pirossal és kézzel kiszíneztük. Bizonyítsuk be, hogy az egyszínű csúcsokkal rendelkező egyenlő szárú háromszögek száma a színezéstől független (csak a piros és kék csúcsok számától függ).

**K20.5. Románia, 1997, válogató verseny**

Egy szabályos 12-szög csúcsait kiszíneztük pirossal vagy kézzel. Határozzuk meg azon színezések számát, amelyek során nem keletkezik egyszínű csúcsú szabályos sokszög.

**Színezések 2.**

**K21.1. Hong Kong (Kína), Matematikai Olimpia, 1999, 2/4.**



Egy konvex 9-szög alapú gúla oldaléleit és alaplapjának átlóit feketére vagy fehérre festettük úgy, hogy mindkét színt felhasználtuk. (A gúla alaplapjának éleit nem színeztük ki.) Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható három egyszínű szakasz, amelyek háromszöget alkotnak.

**K21.2 Dél-Afrika, 2000. december, 2. forduló (idő: 3.5 óra) 6/7.**

Bizonyítsuk be, hogy a végtelen négyzetrács rácspontjai nem színezhetők ki négy színnel úgy, hogy a rács-egység négyzetek négy csúcsa különböző színű legyen, és minden függőleges vagy vízszintes rácsegyenesen előforduljon mindegyik szín.

**K21.3 Japán, Matematikai Olimpia, 1992, 1. forduló**

Adott két ponthalmaz a koordináta-rendszerben:  $A = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 \leq x \leq 20, 1 \leq y \leq 20\}$  és  $B = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 2 \leq x \leq 19, 2 \leq y \leq 19\}$ . Az A halmaz minden pontját pirosra vagy kékre színeztük. A piros pontok száma 219, s közülük 180 B-ben van. Az (1, 1), (1, 20), (20, 1), (20, 20) pontok kék. A kiszínezett, egymástól 1-távolságra lévő rácspontokat összekötjük az alábbi szabályok szerint:

- Két piros pontot piros szakasszal kötünk össze.
- Két kék pontot kék szakasszal kötünk össze.
- Ha a két rácspont különböző színű, fekete szakasszal kötjük össze őket.

Hány 1-hosszúságú kék szakasz keletkezett, ha az 1-hosszúságú fekete szakaszok száma 237?

**K21.4 Egy hasonló versenyfeladat 1973-ból (Arany Dániel verseny, haladók, 1. forduló):**

627 piros és 273 kék pontot négyzet alakban 30 sorba és 30 oszlopba rendeztünk el. A piros pontok közül 2 esett a négyzet kerületére. Egy sorban fekvő szomszédos pontokat és egy oszlopban fekvő szomszédos pontokat egyenes szakaszokkal kötünk össze, így négyzetrács keletkezik. Piros pontok összekötő szakasza piros, kék pontok összekötő szakasza kék, különböző színű pontokat összekötő szakasz fekete, és fekete szakaszból 101 jött létre. Hány piros összekötő szakasz keletkezett?

**K21.5. Szerbia, Matematikai Olimpia, 1999, 11. évf. (idő: 4 óra) 4/5.**

A síkon  $n$  vízszintes és  $n$  függőleges egyenes  $n^2$  pontban metszi egymást. Az egyeneseket pirosra, kékre vagy zöldre színezzük. Két azonos színű egyenes metszéspontját ugyanolyan színűre, két különböző színű egyenes metszéspontját pedig a harmadik színre színezzük. Határozzuk meg az  $n^2$  pont így nyerhető különböző színezéseinek a számát.

### Gráfok

**K22.1. Dél-Afrika, 2001. április, Rhodes-verseny, 1. forduló (idő: 4.5 óra) 3/3.**

Egy összejövetelelen nagy körben állt 1994 diák, s mindegyikük mindkét szomszédjával összeütötte néhányszor tenyerét. Jelöljük  $S$ -sel a diákok csoportját és  $f(x)$ -szel azt a számot, ahányszor az  $x$  diák összeütötte szomszédjaival a tenyerét. (Pl. három diák esetén ha A B-vel kétszer, B C-vel háromszor és C A-val ötször tapsolt, akkor  $f(A) = 7$ ,  $f(B) = 5$  és  $f(C) = 8$ .)

- Bizonyítsuk be, hogy  $\{f(x) : x \in S\} \neq \{n : n \in \mathbb{Z}, 2 \leq n \leq 1995\}$ .

b) Adjunk példát arra, amikor  $\{f(x): x \in S\} = \{n: n \in \mathbb{Z}, n \neq 3, 2 \leq n \leq 1996\}$ .

**K22.2. Kanada, 1996, olimpiai előkészítő (levelező)**

Egy szobában lévő kilenc személyből bármely háromra igaz, hogy van közöttük kettő, akik ismerik egymást. Mutassuk meg, hogy ekkor található négy személy, akik közül mindenki ismer mindenkit.

**K22.3. Írország, Matematikai Olimpia, 2002. május, 1. forduló (idő: 3 óra) 2/5.**

a) Tudjuk, hogy egy összejöveten a társaság bármely tagja legalább három másik résztvevőt ismer, továbbá bármely két személyhez, akik nem ismerik egymást, található egy olyan harmadik, akit mindketten ismernek. Legfeljebb hányan vesznek részt az összejöveten?

b) És akkor legfeljebb hányan lehetnek az összejöveten, ha még azt is tudjuk, hogy van három olyan személy, akik kölcsönösen ismerik egymást?

**K22.4. Balkáni Matematikai Olimpia, 2002. április, 1/4.**

Adott a síkon  $n \geq 4$  pont,  $A_1, A_2, \dots, A_n$  úgy, hogy semelyik három pont sincs egy egyenesen. Behúztunk néhány pontpár közötti szakaszt oly módon, hogy minden pontot legalább három másikkal kötöttünk össze. Bizonyítsuk be, hogy van olyan  $k > 1$  egész szám és  $X_1, X_2, \dots, X_{2k} \in \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  különböző pontok, amelyekre igaz, hogy minden  $i$ -re,  $1 \leq i \leq 2k - 1$ , összekötöttük  $X_i$ -t és  $X_{i+1}$ -et, valamint  $X_{2k}$ -t és  $X_1$ -et.

**K22.5. Japán, Matematikai Olimpia, 1998, döntő**

Egy országban 1998 repülőtér van. Bármely három A, B, C repülőtér esetén az AB, BC, AC közvetlen repülőjáratokból legalább az egyik hiányzik. Legalább hány repülőjárat van?