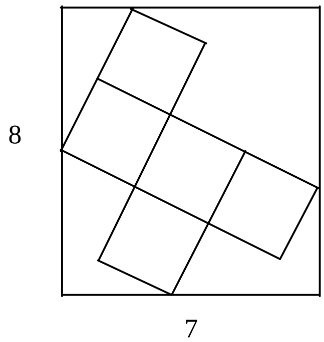
Általános geometria 1.

G1.1. Új-Zéland, Matematikai Olimpia, 1998, 1. kategória 3/5.

Az ABC derékszögű háromszög átfogójára kifelé megszerkesztjük az O középpontú BCDE négyzetet. Az AB és AC oldalak hossza m, ill. n. Határozzuk meg az AO szakasz hosszát!

G1.2. Észtország, 2001. október, őszi nyílt verseny, juniorok 1/5.

Egy 7x8-as téglalapba 5 egybevágó négyzetet helyeztünk el az ábra szerint. Határozzuk meg a négyzetek oldalának hosszát.



G1.3. Horvátország, 2002, városi verseny, 10. évf. 1/4.

Az ABC derékszögű háromszög AB átfogójának felezőpontja K, M pedig a BC oldal azon pontja, amelyre BM = 2MC. Bizonyítsuk be, hogy MAB∠ = MKC∠.

G1.4. Bulgária, 2001. március

Az egységnyi oldalú ABCD négyzet BC és CD oldalain az M és N pontok úgy helyezkednek el, hogy a MCN háromszög kerülete 2 egységnyi. Határozzuk meg az MAN szöget.

G1.5. Ázsiai Matematikai Olimpia, 2000. március, 3/5.

Az ABC háromszög A csúcsából húzott súlyvonal és szögfelező a BC oldalt az M, ill. N pontban metszi. Az N pontból húzzunk merőlegest NA-ra, ez az MA egyenest Q-ban, az AB oldalt P-ben metszi; végül az AB-re P-ben merőlegest állítunk, ez az AN egyenest O-ban metszi. Bizonyítsuk be, hogy QO és BC merőlegesek.

Általános geometria 2.

G2.1. Észtország, 2002. február, tavaszi nyílt verseny, szeniorok 3/5.

Az ABCD rombuszban DAB∠ = 60°. Vegyük fel a K és L pontokat az AD, ill. a DC oldalon, valamint az M pontot az AC átlón úgy, hogy KDLM paralelogramma legyen. Bizonyítsuk be, hogy a BKL háromszög szabályos.

G2.2. Kanada, 1996, olimpiai előkészítő (levelező)

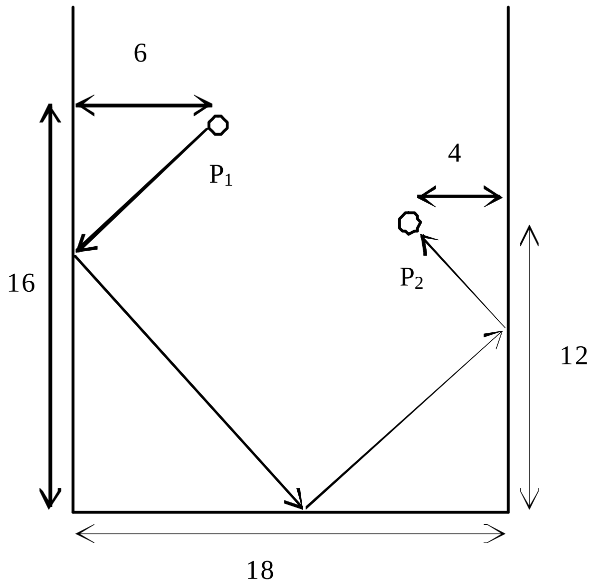
Az ABC háromszögben P olyan belső pont, amelyre $PAC\angle = 10°$, $PCA\angle = 20°$, $PAB\angle = 30°$ és $ABC\angle = 40°$. Határozzuk meg a $BPC\angle$-et.

G2.3. Szlovénia, Matematikai Olimpia, 2002, döntő, 9. évf. 3/4.

Az ABCD trapéz AB alapjának felezőpontja M. E az AC átló belső pontja, BC és ME metszéspontja F, FD és AB metszéspontja G, DE és AB metszéspontja H. Bizonyítsuk be, hogy M a GH szakasz felezőpontja.

G2.4. Belgium, Matematikai Olimpia, 1998, döntő, 4/4.

Az ábrán egy billiárdasztal három oldalát láthatjuk. A fehér golyó a P_1, a piros a P_2 pozícióban van, a mértékegység dm. A fehér golyóval az asztal mindhárom oldalának érintése után kell eltalálni a pirosat. Határozzuk meg a fehér golyó minimális hosszúságú útját.



G2.5. Horvátország, 2002, területi verseny, 9. évf. 3/4.

Az egységnégyzet belsejében rajzoljuk meg azokat az egyenlő szárú háromszögeket, melyek alapja a négyzet oldala, a szárak által meghatározott csúcsa pedig a szemköztes négyzetoldal felezőpontja. Határozzuk meg a négy háromszög által meghatározott nyolcszög területét.

Háromszög-geometria 1.

G3.1. Sharp-verseny, 2001. január

Az ABCD téglalap CD oldalának felezőpontja M, B-ből az AH szakaszra bocsátott merőleges talppontja H. Bizonyítsuk be, hogy a BHC háromszög egyenlő szárú.

G3.2. Spanyolország, Matematikai Olimpia, 2002, 1. forduló 2/8.

Az ABC háromszögben az A csúcsból húzott belső szögfelező a szemköztes oldalt T-ben, a BM súlyvonalat D-ben metszi. Határozzuk meg az a és c oldalak hosszát, ha BT = 572, BD = 200 és DM = 350.

G3.3. Macedónia, 2002, 2. forduló, 11. évf. 1/4.

Az ABC háromszögben $A\angle = \frac{\pi}{7}$, $B\angle = \frac{2\pi}{7}$, $C\angle = \frac{4\pi}{7}$, AB = c, BC = a és CA = b.
Bizonyítsuk be, hogy $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

G3.4. Bulgária, Matematikai Olimpia, 1997

Az ABC háromszög B és C csúcsából húzott belső szögfelezők a szemköztes oldalakat M, ill. N pontban metszik. Az MN szakasz N-n túli meghosszabbítása és a háromszög köré írt kör metszéspontja D. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{1}{BD} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{CD}$.

G3.5. Kanada, 1996, olimpiai előkészítő (levelező)

Az ABC háromszög magasságpontja M, körülírt körének középpontja O. Tükrözzük M-et O-ra, kapjuk az N pontot. Bizonyítsuk be, hogy az NAB, NBC és NCA háromszögekben ugyanakkora az oldalak négyzetösszege.

Háromszög-geometria 2.

G4.1. Brazília, Matematikai Olimpia, 2001, 2. forduló, 3. kategória 2/6.

Az ABC háromszögben az A csúcsból kiinduló magasság és súlyvonal a BAC∠-et három egyenlő részre osztja. Határozzuk meg az ABC háromszög szögeit!

G4.2. Litvánia, 1997

Az ABC háromszög AC és BC oldalán úgy vesszük fel az N és M pontokat, hogy $\frac{AN}{CN} = 3$ és $\frac{BM}{CM} = 2$ legyen. Határozzuk meg az $\frac{AO}{MO}$ arányt, ha az AM és BN szakaszok metszéspontja O.

G4.3. Észtország, 2002, olimpiai válogatóverseny, 1. nap 2/3.

Tekintsük a KL_1L_2 egyenlőszárú háromszöget, melyben $|KL_1| = |KL_2|$, és KA, L_1B_1, L_2B_2 legyenek a belső szögfelezők. Bizonyítsuk be, hogy $\cos B_1AB_2 < \frac{3}{5}$.

G4.4. Brit Matematikai Olimpia, 1997

Az ABC hegyesszögű háromszögben a CF magasság és a BM súlyvonal egyenlőek (F, ill. M az AB, ill. AC oldalon vannak). Bizonyítsuk be, hogy ha $MBC\angle = FCA\angle$, akkor az ABC háromszög szabályos.

G4.5. Ausztrália, Matematikai Olimpia

Az ABC háromszög A, B és C csúcsán átmenő, közös pontra illeszkedő egyenesek a szemközti oldalakat rendre a K, L, M pontokban metszik. Az M ponton átmenő, KL-lel párhuzamos egyenes BC-t V-ben és AK-t W-ben metszi. Bizonyítsuk be, hogy VM = MW.

Háromszög-geometria 3.

G5.1. Spanyolország, Matematikai Olimpia, 2002, 1. forduló 6/8.

Az ABC hegyesszögű háromszögben AH, AD és AM rendre az A csúcsból húzható magasság, szögfelező és súlyvonal. Az AB, AC és MD szakaszok hossza 11, 8 és 1. Határozzuk meg a DH szakasz hosszát!

G5.2. Macedónia, 2002, 1. forduló, 10. évf.

Az ABC háromszögben a beírt és körülírt körök középpontjai az AB oldalra szimmetrikusan helyezkednek el. Határozzuk meg a háromszög szögeit!

G5.3. Horvátország, országos verseny, 2002, 10. évf. 3/4.

Két háromszög megfelelő oldalai a, b, c, illetve a’, b’, c’. Bizonyítsuk be, hogy ha $\alpha + \alpha' = \pi$ és $\beta = \beta'$, akkor $aa' = bb' + cc'$.

G5.4. Észtország, 2002. február, tavaszi nyílt verseny, juniorok 3/5.

Az ABC háromszögben AB = AC, $BAC\angle = \alpha$. Legyen $P \neq B$ az AB szakasz és Q az A csúcsból húzott magasság olyan pontja, amelyre PQ = QC. Határozzuk meg a $QPC\angle$-et.

G5.5. Kanada, 1996, olimpiai előkészítő (levelező)

Az ABC háromszög A csúcsból húzott magassága a BC oldalt D-ben metszi. Egy BC-t D-ben érintő kör az AB-t M és N, az AC-t P és Q pontokban metszi. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{AM + AN}{AC} = \frac{AP + AQ}{AB}.$$

Háromszög-geometria 4.

G6.1. Brit Matematikai Olimpia, 1998, 1. forduló 5/5.

Az ABC háromszög AB oldalának felezőpontja D, a BC oldal C-hez közelebbi harmadolópontja pedig E. Határozzuk meg a $BAC\angle$-et, ha $ADC\angle = BAE\angle$.

G6.2. Görögország, 2002. április, döntő, juniorok 3/4.

Az ABC háromszögben $AB \neq AC$, $A\angle = 60°$ és AD az $A\angle$ szögfelezője. Az AD-re A-ban emelt merőleges e egyenes BC meghosszabbítását E-ben metszi úgy, hogy $BE = AB + AC$. Határozzuk meg $B\angle$ és $C\angle$ értékét az ABC háromszögben.

G6.3. Horvátország, 2002, országos verseny, 11. évf. 1/4.

Adottak az ABC háromszög $BAC\angle = \alpha$ és $CBA\angle = \beta$ hegyesszögei. A háromszög AC és BC oldalaira mint alapokra kifelé megszerkesztjük az ACD és BCE egyenlő szárú háromszögeket úgy, hogy $ADC\angle = \beta$ és $BEC\angle = \alpha$ legyen. Az ABC háromszög köré írt kör középpontját jelölje O. Bizonyítsuk be, hogy $DO + EO$ akkor és csak akkor egyenlő az ABC háromszög kerületével, ha $ACB\angle$ derékszög.

G6.4. Dél-Afrika, 2001. április, Rhodes-verseny, 1. forduló (idő: 4.5 óra) 2/3.

Az ABC háromszögben $A\angle > 90°$. Vegyük fel a BC oldalon a különböző P és Q pontot úgy, hogy $BAP\angle = PAQ\angle$ és $BP \cdot CQ = BC \cdot PQ$ teljesüljön. Számítsuk ki a PAC szöget!

G6.5. Monthly, 1999

Az ABC háromszögben $A\angle = 30°$. Legyen K és I a háromszög köré, ill. beírható körének középpontja, D és E pedig a BA, ill. CA oldal olyan pontja, amelyre $BD = CE = BC$. Mutassuk meg, hogy KI és DE egyenlőek és merőlegesek.

Háromszög-geometria 5.

G7.1. Litvánia, Matematikai Olimpia, 1998

Egy nem-egyenlőszárú háromszögben a szögfelező felezi a súlyvonal és magasság szögét. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög derékszögű.

G7.2. Észtország, 1996

Legyen a, b, c egy háromszög három oldala, α, β, γ a megfelelő szögei, r a beírt körének sugara. Bizonyítsuk be, hogy $a \cdot \sin\alpha + b \cdot \sin\beta + c \cdot \sin\gamma \geq 9r$.

G7.3. Szlovénia, Matematikai Olimpia, 2002, döntő, 12. évf. 3/4.

A hegyesszögű ABC háromszög BC oldalhoz tartozó magasságának talppontja A’. Az AA’ átmérőjű kör az AB és AC oldalakat rendre az A és D, ill. A és E pontokban metszi. Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög körülírt körének középpontja rajta van az ADE háromszög DE oldalhoz tartozó magasságvonalán.

G7.4. Németország, 1999, országos verseny, 1. forduló

A síkban adott AC szakasz belső pontja B. Rajzoljuk meg az óramutató járásával ellentétes körüljárási irányban az ABS_1, BCS_2 és CAS_3 egyenlő szárú háromszögeket úgy, hogy alapon fekvő szögeik 30°-osak legyenek. Bizonyítsuk be, hogy az $S_3S_2S_1$ háromszög szabályos.

G7.5. Irán, Matematikai Olimpia, 2002, 1. forduló 2/6. (idő: 2x4 óra)

Az ABC hegyesszögű háromszög oldalaira kifelé megszerkesztettük az A'BC, B'AC, C'AB háromszögeket úgy, hogy A'BC∠ = B'AC∠ = C'BA∠ = 30°, A'CB∠ = B'CA∠ = C'AB∠ = 60° legyen. Mutassuk meg, hogy ha N a BC szakasz felezőpontja, akkor B'N merőleges A'C'-re.

Illeszkedési feladatok 1.

G8.1. Dél-Afrika, 2000. december, Stellenbosch-verseny, 4. forduló (idő: 3.5 óra) 4/7.

Az ABC háromszögben az AD, BE és CF transzverzálisok O-ban metszik egymást. Határozzuk meg FO érékét, ha AO = 23, BO = 24, CO = 29, DO = 7 és EO = 8.

G8.2. Szlovénia, Matematikai Olimpia, 1998, döntő, 11. évf. 3/4.

Az ABCD téglalap oldalaira $|AB| > |AD|$. A B középpontú, $|AB|$ sugarú kör a DC egyenest az E és F pontokban metszi.
a) Bizonyítsuk be, hogy az EBF háromszög köré írt kör érinti az AD átmérőjű kört.
b) Ha a két kör érintési pontját G-vel jelöljük, bizonyítsuk be, hogy D, G és B egy egyenesen vannak.

G8.3. Cseh és Szlovák Matematikai Olimpia, 2001. december, 1. forduló

Az ABC háromszög beírt körének középpontja I. Bocsássunk a C csúcsból merőlegeseket a BAC és ABC szögek belső szögfelezőire, a két talppont legyen P és Q. Mutassuk meg, hogy PQ és AB párhuzamos!

G8.4. Ausztria, Matematikai Olimpia, 2002. június, döntő, 1. forduló 3/3.

Az ABCD és AEFG hasonló húrnégyszögek, melyek csúcsait az óramutató járásával ellentétes irányban betűztük. A két négyszög köré írt köre az A ponton kívül másodszor P-ben metszi egymást. Mutassuk meg, hogy P rajta van a BE egyenesen.

G8.5. Hong Kong (Kína), Matematikai Olimpia, 1999, 1/4.

A PQRS húrnégyszögben PSR∠ = 90°. Legyen a Q pontból a PR, ill. PS szakaszokra (esetleg a szakaszok meghosszabbítására) bocsátott merőlegesek talppontja H, ill. K. Mutassuk meg, hogy HK felezi a QS szakaszt.

Illeszkedési feladatok 2. - Három egyenes egy ponton

G9.1. Horvátország, 2002, területi verseny, 11. évf. 1/4.

Adott az ABCD négyzet és a P pont. Bizonyítsuk be, hogy ha a B, C, D, A csúcsokból rendre merőlegeseket bocsátunk az AP, BP, CP és DP egyenesekre, ezek a merőlegesek egy ponton mennek át.

G9.2. Dél-Afrika, Stellenbosch-verseny, 2000. december, 5. forduló (idő: 4 óra) 1/3.

Az ABC háromszög beírt köre a BC, CA és AB oldalakat rendre a D, E, F pontokban érinti. A BC, CA és AB oldalak felezőpontjait jelöljük A', B' és C'-vel. A P, Q és R pontokat úgy választjuk az EF, FD és DE egyeneseken, hogy A’P ⊥ EF, B’Q ⊥ FD és C’R ⊥ DE teljesüljön. Bizonyítsuk be, hogy A’P, B’Q és C’R egy ponton mennek át.

G9.3. Új-Zéland, 1990

A PQR hegyesszögű háromszögben Q∠ = 60°. Bizonyítsuk be, hogy a P és R csúcsokból húzott magasságvonalak egyik szögfelezője átmegy a körülírt kör középpontján.

G9.4. Észtország, 1998, döntő

Az ABC háromszög BC, CA és AB oldalainak felezőpontjai A_1, B_1 és C_1, az A_2, B_2 és C_2 pontok pedig rendre a B_1C_1, C_1A_1 és A_1B_1 szakaszok felezőpontjai. A B_1AC_1, C_1BA_1 és A_1CB_1 háromszögek beírt köreinek középpontjai A_3, B_3 és C_3. Bizonyítsuk be, hogy az A_2A_3, B_2B_3 és C_2C_3 egyenesek egy ponton mennek át.

G9.5. Brazilia, Matematikai Olimpia, 2001, 2. nap 2/3.

A konvex négyszögben az oldalak felezőpontjából bocsássunk merőlegest a szemköztes oldalra. Bizonyítsuk be, hogy a négy merőleges akkor és csak akkor megy át egy ponton, ha a négyszög húrnégyszög.

Illeszkedési feladatok 3. – Három pont egy egyenesen

G10.1. Észtország, 1999, nyílt verseny (11. és 12. évf.)

Az ABC háromszög BC oldalán úgy vesszük fel a D belső pontot, hogy az ACB és ADB szögek szögfelezői az AB oldalon metszik egymást. D tükörképe AB-re legyen D’. Bizonyítsuk be, hogy a C, A és D’ pontok egy egyenesen vannak.

G10.2. Cseh és Szlovák Matematikai Olimpia, 2002. január, 2. forduló

A k körbe írt ABCD húrnégyszög BD átlója a körben nem átmérő. Mutassuk meg, hogy a k körhöz a B és D pontokban húzott érintők metszéspontja akkor és csak akkor esik az AC egyenesre, ha AB·CD = AD·BC.

G10.3. Balkáni Matematikai Olimpia, 2002, juniorok 2/4.

A különböző sugarú k_1 és k_2 körök az A és B pontban metszik egymást. Tükrözzük a B pontot a körök O_1 és O_2 középpontjaira, így kapjuk a B_1 és B_2 pontokat, s legyen M a B_1B_2 szakasz felezőpontja. Vegyük fel az M_1 és M_2 pontot rendre a k_1, ill. k_2 körön úgy, hogy az AB_1M_1 és ABM_2 ívekhez tartozó, 180°-ál kisebb középponti szögek egyenlőek legyenek. Mutassuk meg, hogy $MM_1B\angle = MM_2B\angle$.

G10.4. Görögország, 2001, olimpiai válogatóverseny 3/4.

Az ABC hegyesszögű háromszög köré írt körének középpontja O. Legyen a háromszög AC és BC oldalának egy-egy belső pontja M és N, az MN szakasz felezőpontja K. A CAN és BCM háromszögek köré írt körök másodszor D-ben metszik egymást. Bizonyítsuk be, hogy C, D és O akkor és csak akkor esik egy egyenesbe, ha az AB szakasz felezőmerőlegese áthalad K-n.

G10.5. Irán, Matematikai Olimpia, 2002, 2. forduló 2/6. (idő: 2x4 óra)

A k kör átmérője AB, az A és B pontba húzott éintőket jelöljük l_a és l_b-vel. A k kör tetszőleges pontja C. BC l_a-t K-ban, a CAK∠ szögfelezője CK-t H-ban metszi. Legyen M a CAB ív felezőpontja, S a HM egyenes és k kör másik metszéspontja, T pedig l_b és a k körhöz az M pontban húzott érintő metszéspontja. Bizonyítsuk be, hogy S, T, K egy egyenesre esik.

Illeszkedési feladatok 4.

G11.1. Dél-Afrika, 2001. július, Potchefstroom-verseny, 5. forduló (idő: 4.5 óra) 1/4.

Az ABC hegyesszögű háromszög magasságai AA', BB', CC', magasságpontja H. Az AA', BB', CC' szakaszok belső pontjai rendre A_1, B_1, C_1, melyekre $T(ABC_1) + T(BCA_1) + T(CAB_1) = T(ABC)$. (Itt T(ABC) az ABC háromszög területét jelenti.) Bizonyítsuk be, hogy H az $A_1B_1C_1$ háromszög körülírt körén van.

G11.2. Románia, 1996, olimpiai válogatóverseny, 2. forduló

Adott egy AB átmérőjű O középpontú félkör. Az AB egyenes B-n túli meghosszabbításán felvett M pontból húzott szelő a félkört C és D pontokban metszi ($|CM| < |DM|$). Az AOD és BOC háromszögek köré írt körök az O és K pontokban metszik egymást. Bizonyítsuk be, hogy OK és KM merőlegesek.

G11.3. Brit Matematikai Olimpia, 1998, 2. forduló 2/4.

Az ABC háromszögben BAC∠ > BCA∠. A háromszög belsejében vegyük fel a P pontot úgy, hogy PAC∠ > BCA∠, s a háromszögön kívül a Q pontot úgy, hogy PQ || AB és BQ || AC. Legyen R a BC oldal olyan pontja, amelyet AP elválaszt Q-tól, s amelyre PRQ∠ = BCA∠. Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög és a PQR háromszög körülírt körei érintik egymást.

G11.4. Írország, Matematikai Olimpia, 1999, 1. nap (idő: 3 óra) 3/5.

Felvettük az ABC háromszög BC, CA, AB oldalán rendre a D, E, F pontokat úgy, hogy AD magasságvonal, BE szögfelező és CF súlyvonal. Bizonyítsuk be, hogy AD, BE és CF akkor és csak akkor mennek át egy ponton, ha $a^2(a - c) = (b^2 - c^2)(a + c)$, ahol $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ a háromszög oldalai.

G11.5. Irán, Matematikai Olimpia, 2002, 3. forduló 3/6. (idő: 2x4 óra)

Az ABC háromszög beírt köre a BC oldalt A'-ben érinti. Az AA' a beírt kört P-ben metszi, hasonlóan CP, BP a beírt kört N, M pontokban metszi. Mutassuk meg, hogy AA', BN, CM egy ponton mennek át.

Körgeometria 1.

G12.1. Litvánia, 2001. október

Egy húrtrapéz párhuzamos oldalai 4 és 16 egység hosszúak, s tudjuk, hogy a trapézba kör írható. Határozzuk meg a körök sugarát!

G12.2. Új-Zéland, Matematikai Olimpia, 1998, 2. kategória

Az egymást M és N pontokban metsző k_1 és k_2 körök sugara r_1, ill. r_2. Az M ponthoz közelebbi közös érintő A_1 és A_2 pontokban érinti a két kört. Bizonyítsuk be, hogy az A_1MA_2 háromszög köré írt kör sugara független az A_1A_2 szakasz hosszától, és egyenlő $\sqrt{r_1r_2}$ -vel.

G12.3. Szlovénia, Matematikai Olimpia, 1998, döntő, 10. évf. 3/4.

Az O középpontú K körön kívül lévő A pontból meghúzzuk az AO egyenest, amely B-ben és C-ben metszi a kört. Az A-ból húzott érintő D-ben érinti a kört. A BD szakasz D-n túli meghosszabbításán felveszünk egy tetszőleges E pontot. A DCE háromszög köré írt kör az AB egyenest másodszor F-ben, az AD egyenest másodszor G-ben metszi. Bizonyítsuk be, hogy BD és FG párhuzamosak.

G12.4. Pán-Afrikai Matematikai Olimpia, 2001. július, 2. nap (idő: 4.5 óra) 3/3.

Az AB átmérőjű, O középpontú S_1 félkörbe P középpontú C_1 érintőkört rajzolunk, mely AB-t O-ban érinti. Az S_2 félkör érinti S_1-et és C_1-et, s Q középpontja rajta van AB-n; végül az R középpontú C_2 kör belülről érinti S_1-et és kívülről S_2-t és C_1-et. Bizonyítsuk be, hogy OPRQ téglalap.

G12.5. Dél-Afrika, 2000. december, Stellenbosch-verseny, 3. forduló (idő: 3.5 óra) 6/7.

Szerkesszük meg az ABCD konvex négyszögben az E pontot úgy, hogy az ABE és CDE háromszögek hasonlók legyenek.

Körgeometria 2.

G13.1. Olaszország, Matematikai Olimpia, 2002. május, 3/6.

Legyen A és B két pont, e pedig adott egyenes a síkon. Az AB szakasz felezőpontja M, A és B merőleges vetületei az e egyenesen R és S. Tegyük fel, hogy A, M és R nem esik egy egyenesbe, s bizonyítsuk be, hogy az AMR és BSM háromszögek köré írt körök sugarai egyenlők.

G13.2. Balkáni Matematikai Olimpia, 2002, juniorok 1/4.

Az ABC egyenlő szárú háromszögben AC = BC. A háromszög köré írt körének C-t nem tartalmazó AB ívén vegyük fel a P pontot. Bizonyítsuk be, hogy ha D a C-ből PB-re bocsátott merőleges talppontja, akkor PA + PB = 2PD.

G13.3. Brit Matematikai Olimpia, 2000, 2. forduló

A k_1 és k_2 metsző körök közös érintője k_1-et P-ben, k_2-t Q-ban érinti. A két kör PQ-hoz közelebbi metszéspontja N, a távolabbi metszéspontja M. PN k_2-t másodszor R-ben metszi. Bizonyítsuk be, hogy MQ a $PMR\angle$ szögfelezője.

G13.4. Észtország, 2002, olimpiai válogatóverseny, 2. nap 1/3.

Az ABCD húrnégyszögben $ACB\angle = 2CAD\angle$ és $ACD\angle = 2BAC\angle$. Bizonyítsuk be, hogy $CA = CB + CD$.

G13.5. Dél-Afrika, 1999. július, Potchefstroom-verseny, 4. forduló (idő: 4.5 óra) 1/3.

Az ABC háromszög beírt köre az AB és AC oldalakat rendre a P, ill. Q pontban érinti. A kör középpontján átmenő, BC-vel párhuzamos egyenes AB-t K-ban, AC-t L-ben metszi. A KQ és LP egyenesek metszéspontját jelöljük S-sel, s legyen SN a KLS háromszög magassága. Mutassuk meg, hogy $PNS\angle = QNS\angle$.

Körgeometria 3.

G14.1. Új-Zéland, 1992

Két kör közös külső érintője 26, közös belső érintője 22 egység hosszú. Határozzuk meg a két kör sugarának szorzatát! (A két belső érintő a két kör között metszi egymást.)

G14.2. Brit Matematikai Olimpia, 2000, 2. forduló

A k_1 és k_2 metsző körök közös érintője k_1-et P-ben, k_2-t Q-ban érinti. A két kör PQ-hoz közelebbi metszéspontja N, a távolabbi metszéspont M. Bizonyítsuk be, hogy az MNP és MNQ háromszögek területe egyenlő.

G14.3. Litvánia, 2001. október

Az ABC háromszög AB oldalának felezőpontja M, a körülírt kör középpontja O, és $COM\angle = 90°$. Bizonyítsuk be, hogy $|ABC\angle - BAC\angle| = 90°$.

G14.4. Dél-Afrika, 2001. július, Potchefstroom-verseny, 2. forduló (idő: 4.5 óra) 2/4.

Az ABCD húrnégyszög oldalai a, b, c, d, köré írt körének sugara R, területe T. Bizonyítsuk be, hogy $R^2 = \frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{16T^2}$, s vezessük le, hogy $R \geq \frac{(abcd)^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{2}T}$.

G14.5. Irán, Matematikai Olimpia, 2002, 2. forduló 5/6. (idő: 2x4 óra)

Vegyük fel az ABC háromszög BC oldalán az M, N pontokat úgy, hogy $BM = CN$ teljesüljön (az M pont B és N között helyezkedik el); valamint az AN, ill. AM szakaszokon a P, ill. Q pontokat úgy, hogy $PMC\angle = MAB\angle$ és $QNB\angle = NAC\angle$ legyen. Bizonyítsuk be, hogy $QBC\angle = PCB\angle$.

Körgeometria 4.

G15.1. Litvánia, 2001. október

Az R sugarú kör 60°-os középponti szögéhez tartozó húrja két részre osztja a kört. Határozzuk meg a kisebbik körcikkbe beírható négyzet oldalát!

G15.2. Brit Matematikai Olimpia, 2001. december, 1. forduló (idő: 3.5 óra) 2/5.

Az ABCD húrnégyszög AC és BD átlója Q-ban metszi egymást. Az AD egyenes A-n túli és a BC egyenes C-n túli meghosszabbításainak metszéspontja P. Bizonyítsuk be, hogy ha CD = CP = DQ, akkor CAD = 60°∠.

G15.3. Új-Zéland, 1990

Az ABCD négyzet belsejében felvett M pontra MAC∠ = MCD∠ = x. Határozzuk meg az ABM∠-et.

G15.4. Szlovénia, Matematikai Olimpia, 1998, döntő, 12. évf. 3/4.

Az ABC derékszögű háromszög BC átfogójához tartozó magasságának talppontja D. Az ABD és ADC háromszögek beírt köreinek középpontján átmenő egyenes az ABC háromszög befogóit az E és F pontokban metszi. Bizonyítsuk be, hogy a DEF háromszög körülírt körének középpontja A.

G15.5. Dél-Afrika, 1999. április, Rhodes-verseny, 4. forduló (idő: 4.5 óra) 2/3.

Az ABCD húrnégyszög AB oldalán felvett O középponttal olyan félkört rajzolunk, amely érinti a négyszög másik három oldalát. Bizonyítsuk be, hogy AD + BC = AB.

Körgeometria 5.

G16.1. Litvánia, 1997

Egy trapézba, melynek párhuzamos oldalai 16 és 6 egység hosszúak, kör írható. Lehet-e ennek a körnek a sugara 10 egység?

G16.2. Ázsiai Matematikai Olimpia, 1999. március, 4/5. (4 óra)

A k_1 és k_2 körök a P és Q pontokban metszik egymást. A két kör P felőli közös érintője k_1-et A-ban és k_2-t B-ben érinti. A k_1 körhöz P-ben húzott érintő k_2-t a P-től klönböző C pontban metszi, AP meghosszabbítása pedig R-ben metszi BC-t. Bizonyítsuk be, hogy a PQR háromszög körülírt körének BP és BR érintője.

G16.3. Észtország, 1996

Legyen H az ABC tompaszögű háromszög magasságpontja, A_1, B_1, C_1 pedig tetszőleges pontok a BC, AC, AB oldalakon. Bizonyítsuk be, hogy a H pontból az AA_1, BB_1, CC_1 átmérőjű körökhöz húzott érintők egyenlőek.

G16.4. Bulgária, 2001. március

Az ABCD konvex négyszögben $OA = \dfrac{OB \cdot OD}{OC + OD}$, ahol O a négyszög átlóinak metszéspontja. Az ABC háromszög köré írt kör a BD egyenest a Q pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy CQ a DCA∠ szögfelezője.

G16.5. Dél-Afrika, 1999. július, Potchefstroom-verseny, 3. forduló (idő: 4.5 óra) 1/3.

Az ABC háromszög belsejében M és N olyan pontok, amelyekre MAB∠ = NAC∠ és MBA∠ = NBC∠. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC} + \frac{BM \cdot BN}{BA \cdot BC} + \frac{CM \cdot CN}{CA \cdot CB} = 1$.

Körgeometria 6.

G17.1. Oroszország, Matematikai Olimpia, 2002, 4. (körzeti) forduló, 9. évf. 3/8.

Az ABC egyenlő szárú háromszög (AB = BC) körülírt körének középpontja O. A BO szakasz egy M pontját tükrözve az AB oldal D felezőpontjára kapjuk M'-t. Legyen AB és OM' metszéspontja K, a BC szakasz L pontjára pedig CLO∠ = BLM∠ teljesül. Mutassuk meg, hogy O, K, B, L egy körön vannak.

G17.2. Németország, 1998, országos verseny, 2. forduló

Az ABC háromszög AB oldalán felvett P pontra az alábbiak teljesülnek:
a) BC = AC + $\frac{1}{2}$AB,
b) AP = 3PB.
Bizonyítsuk be, hogy PAC∠ = 2CPA∠.

G17.3. Észtország, Matematikai Olimpia, 2002, döntő, 12. évf. 4/5.

Az ABCD húrnégyszög körülírt köre ω. Az AD és BC egyenesek K-ban, az AB és CD egyenesek L-ben metszik egymást. Bizonyítsuk be, hogy az AKL háromszög körülírt köre akkor és csak akkor érinti ω-t, ha a CKL háromszög körülírt köre érinti ω-t.

G17.4. Irán, Matematikai Olimpia, 1995

A D és E pontok úgy helyezkednek el az ABC háromszög AB, ill. AC oldalán, hogy DE ∥ BC. Az ABC háromszög belsejében P tetszőleges pont. PB és PC a DE szakaszt rendre F és G pontban metszi. Legyen O_1 és O_2 a PDG, ill. PFE háromszög körülírt körének középpontja. Mutassuk meg, hogy AP ⊥ O_1O_2.

G17.5. Balkáni Matematikai Olimpia, 2002. április, 3/4.

Két különböző sugarú kör az A és B pontban metszi egymást. Közös érintőjük MN és ST, ahol M, S az egyik, N, T a másik kör pontjai. Bizonyítsuk be, hogy az AMN, AST, BMN és BST háromszögek magasságpontjai téglalapot alkotnak.

Mértani hely

G18.1. Észtország, Matematikai Olimpia, 1999, döntő, 10. évf. 5/5.

Az AB szakasz belső pontja C. Megrajzoljuk az ADC és CEB szabályos háromszögeket az AB szakasz ugyanazon oldalán. Határozzuk meg a DE szakasz felezőpontjainak mértani helyét, miközben C befutja az AB szakasz belsejét.

G18.2. Kanada, 1996, olimpiai előkészítő (levelező)

A, B, C a sík három különböző pontja, amelyekre AB = AC teljesül. Határozzuk meg azon P pontok mértani helyét, amelyekre APB∠ = APC∠.

G18.3. Japán, Matematikai Olimpia, 1998, 1, forduló

Az ABCD trapéz AB és CD oldala párhuzamos, AB = BC = DA = 1, CD = 1 + $\sqrt{2}$. Az AD oldalon felvett E pontra teljesül, hogy a trapézt összehajthatjuk egy E ponton átmenő egyenes mentén úgy, hogy az A csúcs a CD oldalra kerüljön. Legfeljebb mekkora lehet DE?

G18.4. Bulgária, 2001. március

Az egységnyi oldalú ABCD négyzet BC és CD oldalain az M és N pontok úgy helyezkednek el, hogy a MCN háromszög kerülete 2 egységnyi. Az A csúcsból MN-re bocsátott merőleges talppontját jelöljük P-vel, s határozzuk meg a P pontok mértani helyét.

G18.5. Vietnám, Matematikai Olimpia, 2002. március, 1. nap 2/3.

Adott az ABC egyenlő szárú háromszög (AB = AC). A változó k kör O középpontja a BC egyenesen mozog úgy, hogy a k kör átmegy A-n, de nem érinti az AB és AC egyeneseket. Legyen M és N a k kör második metszéspontja az AB, ill. AC egyenesekkel. Határozzuk meg az AMN háromszög magasságpontjának mértani helyét.

Területszámítás 1.

G19.1. Japán, Matematikai Olimpia, 1992, 1. forduló

Az ABC szabályos háromszögben a D, E, F pontok a BC, CA, AB oldalakat rendre 3 : (n – 3) arányban osztják (n > 6). Határozzuk meg n értékét, ha az AD, BE, CF egyenesek által közrezárt háromszög területe $\frac{4}{49}T_{ABC}$.

G19.2. Szerbia, Matematikai Olimpia, 1999, 9. évf. (idő: 4 óra) 1/5.

Az ABCDEF konvex hatszögben az AD és BE átló is felezi a területet. Bizonyítsuk be, hogy BDEA trapéz.

G19.3. Észtország, Matematikai Olimpia, 1999, döntő, 10. évf. 3/5.

Az ABC háromszög I középpontú beírt köre az AB, AC és BC oldalakat rendre a K, L és M pontokban érinti. Vegyük fel a P és Q pontokat az AC, ill. BC oldalon úgy, hogy AP = CL és BQ = CM teljesüljön. Bizonyítsuk be, hogy az APIQB és CPIQ sokszögek területének különbsége egyenlő a CLIM négyszög területével.

G19.4. Dél-Afrika, 2000, tehetségkutató verseny, szeniorok, 5. forduló 5/5.

Az ABC derékszögű háromszög (B∠ = 90°) AC átfogójára befelé r_b sugarú félkört szerkesztünk úgy, hogy a félkör érintse az AB és BC oldalakat. Az AB és BC befogókra is megszerkesztjük az átfogót érintő félköröket úgy, hogy átmérőjük egyik végpontja B. Ezek

sugara legyen r_c és r_a. Bizonyítsuk be, hogy ha a háromszög beírt körének sugara r, akkor
$\frac{2}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$.

G19.5. Macedónia, 2002, országos verseny, 1. forduló, 9. évf.

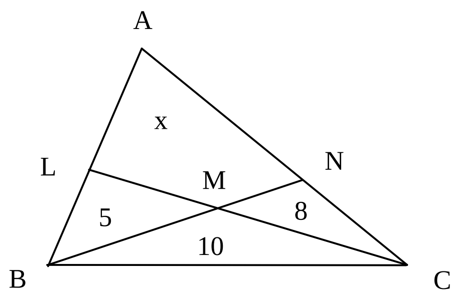
Az ABC háromszög beírt k köréhez az oldalakkal párhuzamos érintőket húzunk. Ezek az érintők az ABC háromszögből három kisebb háromszöget vágnak le, melyek beírt köreinek sugarai rendre r_1, r_2, r_3. Bizonyítsuk be, hogy $r_1 + r_2 + r_3 = r$.

Területszámítás 2.

G20.1. Japán, Matematikai Olimpia, 1998, 1. forduló

A derékszögű koordináta-rendszer ABCD téglalapjának csúcsai A(3, 0), B(3, 2), C(0, 2), D(0, 0). Legyen S azon (u, v) koordinátájú pontok halmaza, amelyekre $0 \leq ux + vy \leq 1$ teljesül minden olyan (x, y) pontra, amely az ABCD téglalapban (belsejében vagy kerületén) van. Határozzuk meg S területét.

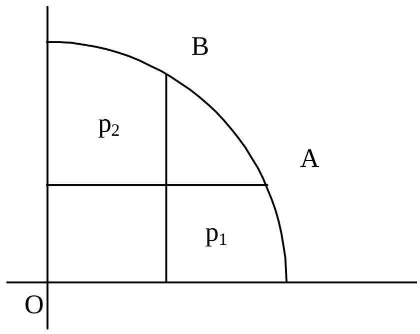
G20.2. Új-Zéland, 1991



A fenti ábrán adott a három kisebb háromszög területe. Határozzuk meg az ALMN négyszög x területét.

G20.3. Szlovénia, Matematikai Olimpia, 2002, döntő, 11. évf. 3/4.

Tekintsük az origó középpontú egységsugarú kör első síknegyedében az AB ívet (ábra). Legyen p_1 az AB ív és az x-tengelyre vett vetülete által bezárt fél-körszelet területe, hasonlóan p_2 az AB ív és az y-tengelyre vett vetülete által bezárt fél-körszelet területe. Bizonyítsuk be, hogy a $p_1 + p_2$ összeg csak az AB ív hosszától függ (és nem függ AB helyzetétől).

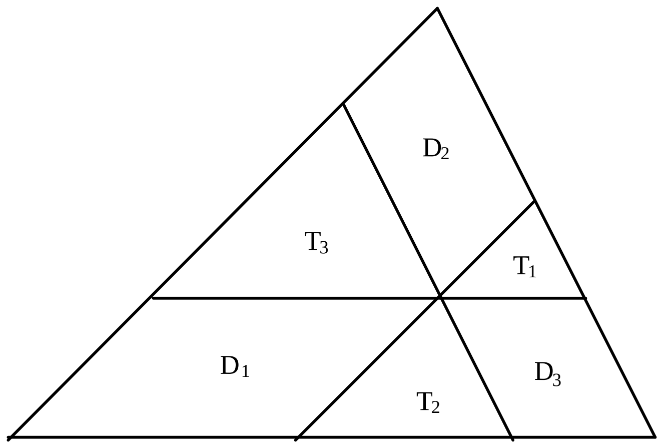


G20.4. Szerbia, Matematikai Olimpia, 1999, 10. évf. (idő: 4 óra) 1/5.

A hegyesszögű ABC háromszög AA_1, BB_1 és CC_1 magasságvonalai az A_2, B_2, C_2 pontokban metszik a háromszög köré írt kört. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{AA_2}{AA_1}+\frac{BB_2}{BB_1}+\frac{CC_2}{CC_1}=4$.

G20.5. Dél-Afrika, 2001. július, Potchefstroom-verseny, 5. forduló (idő: 4.5 óra) 4/4.

Egy háromszöget belső pontján átmenő, az oldalakkal párhuzamos egyenesekkel hat részre osztottunk (ábra). Bizonyítsuk be, hogy a részek területére $\frac{|T_1|}{|D_1|}+\frac{|T_2|}{|D_2|}+\frac{|T_3|}{|D_3|}\ge\frac{3}{2}$.



Geometriai egyenlőtlenségek 1.

G21.1. Új-Zéland, Matematikai Olimpia, 1997, 2. kategória 4/5.

Az S területű ABC derékszögű háromszög beírt és körülírt körének sugara r, ill. R. Bizonyítsuk be, hogy $r + R > \sqrt{2S}$.

G21.2. Albánia, Matematikai Olimpia, 2002. március, 9. évf. 3/5.

Az S területű derékszögű háromszög beírt köre egyúttal körülírt köre az s területű derékszögű háromszögnek. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{S}{s} \geq 3 + 2\sqrt{2}$. Mikor áll fenn egyenlőség?

G21.3. Cseh és Szlovák Matematikai Olimpia, 2001. október

Legyen az a, b, c oldalú háromszög területe S, az a + b, b + c, c + a oldalú háromszög területe T. Bizonyítsuk be, hogy T ≥ 4S. Mikor áll fenn egyenlőség?

G21.4. Dél-Afrika, 2001. július, Potchefstroom-verseny, 3. forduló (idő: 4.5 óra) 1/3.

Az ABC háromszög P belső pontjának távolsága a BC, CA és AB oldalaktól rendre r_1, r_2 és r_3. Mutassuk meg, hogy $\left(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} + \sqrt{r_3}\right)^2 \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R}$, ahol R a háromszög köré írt kör sugara.

G21.5. Kanada, Matematikai Olimpia, 1992, 3/1. (idő: 3 óra)

U és V az ABCD négyzet AB, ill. CD oldalának belső pontjai. Az AV és DU szakaszok P-ben, a BV és CU szakszok Q-ban metszik egymást. Határozzuk meg U és V összes lehetséges helyzetét, amelyre a PUQV négyszög területe maximális.

Geometriai egyenlőtlenségek 2.

G22.1. Dél-Afrika, 2000. december, Stellenbosch-verseny, 2. forduló (idő: 3.5 óra) 3/7.

Az ABC háromszögben $a^3 + b^3 = c^3$. Bizonyítsuk be, hogy C∠ < 90°.

G22.2. Brit Matematikai Olimpia, 2000, 2. forduló

Határozzuk meg, hogy az ABC derékszögű háromszög (A∠ = 90°) kerületének melyik P pontjára lesz AP + BP + CP minimális.

G22.3. Görögország, Matematikai Olimpia, 2002. február, 3/4.

Az ABC háromszögben C∠ > 10° és B∠ = C∠ + 10°. Vegyük fel az AB, ill. AC szakaszokon az E, ill. D pontokat úgy, hogy ACE∠ = 10° és DBA∠ = 15° legyen. Legyen továbbá Z ≠ A az ABD és AEC háromszögek köré írt körök metszéspontja. Bizonyítsuk be, hogy ZBA∠ > ZCA∠.

G22.4. 1997, NMO-feladatjavaslat

Az ABCDEF konvex hatszögben AB = BC, CD = DE, EF = FA. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{BC}{BE} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{FC} \geq \frac{3}{2}$. Mikor áll fenn egyenlőség?

G22.5. Albánia, Matematikai Olimpia, 2002. március, 12. évf. 5/5.

Legyen a tetszőleges ABC háromszög beírt és körülírt köreinek sugara r és R, a három szöge A, B, C, a megfelelő szögfelezők és magasságvonalak hossza rendre l_a, l_b, l_c és h_a, h_b, h_c. Bizonyítsuk be, hogy

a) $\frac{h_a}{l_a^2}+\frac{h_b}{l_b^2}+\frac{h_c}{l_c^2}=\frac{R+2r}{2Rr}$,

b) $\frac{1}{l_a}+\frac{1}{l_b}+\frac{1}{l_c}\le\frac{1}{r}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{r}{R}}$.

Geometriai egyenlőtlenségek 3.

G23.1. Ukrajna, Matematikai Olimpia, 1998. április, 10. évf.

Legyen M az ABC háromszög AC oldalának belső pontja. Az AM és MC szakaszok felezőpontjából a BC, ill. AB oldalakra bocsátott merőleges metszéspontja O. Határozzuk meg az M pont helyzetét, ha OM minimális.

G23.2. Spanyolország, Matematikai Olimpia, 1999, országos forduló, 2. nap 2/3.

Legyen az ABC háromszög súlypontja G, s jelöljük g_a, g_b, g_c-vel a G súlypont a, b és c oldalaktól vett távolságát, r pedig a beírt kör középpontját. Bizonyítsuk be, hogy

a) $g_a\ge\frac{2r}{3}, g_b\ge\frac{2r}{3}, g_c\ge\frac{2r}{3}$;

b) $\frac{g_a+g_b+g_c}{r}\ge 3$.

G23.3. Szerbia, Matematikai Olimpia, 1999, 10. évf. (idő: 4 óra) 5/5.

Egy matematikus eltévedt egy végtelen hosszú, 1 km szélességű erdősávban. Bizonyítsuk be, hogy legfeljebb $2\sqrt{2}$ km hosszú út megtétele után kijuthat az erdőből.

G23.4. Ausztria, Matematikai Olimpia, 2002. április, selejtező 3/4.

Legyen az ABCDEF konvex hatszög kerülete s, az ACE és BDF háromszögek kerülete u és v.

a) Bizonyítsuk be, hogy $\frac{1}{2}<\frac{s}{u+v}<1$.

b) Lehet-e élesíteni az egyenlőtlenség valamelyik oldalát?

G23.5. Észtország, Matematikai Olimpia, 2002, döntő, 12. évf. 3/5.

Bizonyítsuk be, hogy az a, b, c pozitív valós számokra $2(a^4 + b^4 + c^4) < (a^2 + b^2 + c^2)^2$ akkor és csak akkor teljesül, ha a, b, c egy háromszög oldalai.

Vektorok

G24.1. Dél-Afrika, 2001. április, Rhodes-verseny, 3. forduló (idő: 4.5 óra) 1/3.

Az ABC egyenlő oldalú háromszög beírt körének tetszőleges pontja P. Mutassuk meg, hogy $PA^2 + PB^2 + PC^2$ állandó.

G24.2. Spanyolország, Matematikai Olimpia, 1999, 2. helyi forduló, 1. nap 3/3.

Az ABC háromszög súlypontja G. Bizonyítsuk be, hogy a sík tetszőleges M pontjára teljesül, hogy $MA^2 + MB^2 + MC^2 \geq GA^2 + GB^2 + GC^2$, s egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha M = G.

G24.3. Albánia, Matematikai Olimpia, 2002. március, 9. évf. 4/5.

Az ABC háromszög magasságpontja H. Vegyük fel az A_1 pontot a HA szakasz A-n túli meghosszabbításán, s hasonlóan vegyük fel a B_1, C_1 pontokat is úgy, hogy $HA_1 = BC$, $HB_1 = CA$, $HC_1 = AB$ teljesüljön. Bizonyítsuk be, hogy

a) $\overrightarrow{HA_1} + \overrightarrow{HB_1} + \overrightarrow{HC_1} = \vec{0}$.

b) A H pont az $A_1B_1C_1$ háromszög súlypontja.

G24.4. Észtország, Matematikai Olimpia, 1999, döntő, 11. évf. 3/5.

Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög AB oldalán felvett X pontra $\overrightarrow{XA} \cdot \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC} \cdot \overrightarrow{XC} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ akkor és csak akkor teljesül, ha X a magasság vagy a súlyvonal talppontja. (A $\vec{v} \cdot \vec{u}$ a $\vec{v}$ és $\vec{u}$ vektorok skaláris szorzatát jelenti.)

G24.5. Kanada, 1996, olimpiai előkészítő (levelező)

A 2t területű konvex ABCD négyszögnek nincsenek párhuzamos oldalai. Vegyük fel a CD oldalon a P_1 pontot úgy, hogy P_1 és C az AB egyenes azonos partjára kerüljön és az ABP_1 háromszög területe t. Hasonlóan vegyük fel a P_2, P_3 és P_4 pontokat rendre a DA, AB és BC oldalakon. Bizonyítsuk be, hogy P_1, P_2, P_3 és P_4 egy egyenesen van.

Geometriai trigonometria 1.

G25.1. Horvátország, 2002, városi verseny, 11. évf. 4/4.

Az ABC hegyesszögű háromszög magasságpontját jelöljük H-val. Bizonyítsuk be, hogy $BC \cdot \operatorname{ctg}\alpha = AH$.

G25.2. Szlovénia, Matematikai Olimpia, 1998, 1. forduló, 11. évf. 3/4.

Az ABC háromszög BC oldalán vegyük fel a D pontot úgy, hgy $|BD| = |AC| = 1$ és $BAD\angle = \frac{1}{3} DAC\angle = 30°$ legyen. Határozzuk meg a CD szakasz hosszát!

G25.3. Brit Matematikai Olimpia, 2002. február, 2. forduló (idő: 3.5 óra) 1/4.

Az ABC hgyesszögű háromszög egyik csúcsából húzott magasság a szemköztes oldalt D-ben metszi. Meghúzzuk D-ből a másik két oldalra merőleges DE és DF szakaszokat. Bizonyítsuk be, hogy EF hossza független attól, hogy melyik csúcsból húztuk meg a magasságot.

G25.4. Thaiföld, Matematikai Olimpia, 2001

Az ABC háromszög k_1 körülírt körének sugara R. A háromszög köré írt körhöz az A, B, C pontokban érintőket húzunk, melyek egymást a P, Q, R pontokban metszik. A PQR háromszög kerülete k. Határozzuk meg a $\mathrm{tg}ABC\angle + \mathrm{tg}BCA\angle + \mathrm{tg}CAB\angle$ összeg értékét R és k segítségével.

G25.5. Dél-Afrika, 2001. július, Potchefstroom-verseny, 5. forduló (idő: 4.5 óra) 3/4.

Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges ABC háromszögben
$\frac{\cos A}{1+\sin A}+\frac{\cos B}{1+\sin B}+\frac{\cos C}{1+\sin C}\geq 6-3\sqrt{3}$.

Geometriai trigonometria 2.

G26.1. Horvátország, 2002, városi verseny, 12. évf. 2/4.

Az A csúcsú α hegyesszög szárain úgy vettük fel a D és E pontokat, hogy AD = m és AE = n. A D és E pontokban merőlegeseket állítottunk a szárakra, ezek a merőlegesek a szögtartomány belsejében az F pontban metszik egymást. Bizonyítsuk be, hogy
$\frac{DF}{EF}=\frac{n-m\cos\alpha}{m-n\cos\alpha}$.

G26.2. Észtország, 2001. október, őszi nyílt verseny, szeniorok 4/5.

Az ABC háromszögben $\beta = 2\gamma$ és az A csúcsból húzott szögfelező a BC oldalt D-ben metszi úgy, hogy $|AB| = |CD|$. Határozzuk meg α-t.

G26.3. Irán, Matematikai Olimpia, 2002, 1. forduló 5/6. (idő: 2x4 óra)

Az ABC háromszögben (AB > AC) a B és C csúcshoz tartozó belső szögfelezők a szemköztes oldalt rendre P, ill. Q pontban metszik. A szögfelezők metszéspontját jelöljük I-vel. Határozzuk meg az $A\angle$ értékét, ha IP = IQ.

G26.4. Szlovénia, Matematikai Olimpia, 1998, 1. forduló, 12. évf. 3/4.

A hegyesszögű ABC háromszög magasságpontja H, súlypontja T, és HT párhuzamos AB-vel. Bizonyítsuk be, hogy α és β a háromszög megfelelő csúcsainál lévő belső szögek, akkor $\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta = 3$.

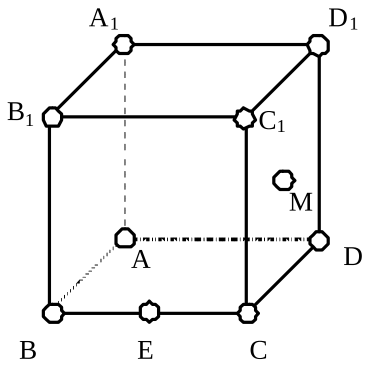
G26.5. Albánia, Matematikai Olimpia, 2002. március, 11. évf. 3/5.

Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszögben ekvivalensek az alábbi egyenletek:
a) $\alpha = 2\gamma$,
b) $b = 4c\cos\left(30°+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30°-\frac{\alpha}{2}\right)$.

Térgeometria

G27.1. Belgium, Matematikai Olimpia, 1998, döntő, 2/4.

Az egységélű $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka BC élének felezőpontja E, a CDD_1C_1 lapjának középpontja M (ábra). Határozzuk meg az AEM sík által a kockából kimetszett alakzat területét!



G27.2. Ukrajna, Matematikai Olimpia, 1998. április, 11. évf.

Két különböző sugarú gömb kívülről érinti egymást a P pontban. Az AB és CD közös külső érintőszakaszok, az első gömböt A-ban és C-ben, a másodikat B-ben és D-ben érintik. Legyen M és N az AC, illetve BD szakasz felezőpontjának merőleges vetülete a két gömb centrálisára. Bizonyítsuk be, hogy PM = PN.

G27.3. Macedónia, 2002, országos verseny, 1. forduló, 11. évf.

A négyzet alapú szabályos gúla oldaléleit egy sík a gúla csúcsától rendre a, b, c, d távolságban az A, B, C, D pontokban metszi. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b}+\frac{1}{d}$.

G27.4. Szerbia, Matematikai Olimpia, 1999, 11. évf. (idő: 4 óra) 1/5.

Az ABCD tetraéder AC és BC, valamint AD és BD élei merőlegesek egymásra. Bizonyítsuk be, hogy $\cos(AC, BD) < \frac{CD}{AB}$.

G27.5. Kanada, 1996, olimpiai előkészítő (levelező)

Az ABCD tetraéder AB, BC és CA oldala a, míg az AD, BD és CD oldala b hosszúságú. Az AB és CD oldalak felezőpontjait jelöljük rendre M-mel és N-nel, továbbá tekintsünk egy síkot, amelyik áthalad az M, N pontokon. Messe ez a sík az AD és BC szakaszokat P és Q pontban.

a) Bizonyítsuk be, hogy AP : AD = BQ : BC.

b) Határozzuk meg az AP : AD arányt, ha az MQNP négyszög területe minimális.