Elemi algebra 1. – útmutatások

A1.1. Négyzetre emeléssel szimmetrikussá tehetjük a törtet.

Más megoldási lehetőségek:

A homogén másodfokú egyenletből megkaphatjuk az $\frac{x}{y}$ arányt, vagy

alkalmazhatunk paraméterezést: $\frac{x+y}{x-y}$ = p paraméterezéssel megoldjuk az egyenletrendszert.

Eredmény:

$$\frac{x+y}{x-y} = \pm\sqrt{2}.$$

A1.2. Bontsunk parciális törtekre!

Eredmény:

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+20a^2}}{2}, \text{ ha } a \neq 0.$$

A1.3. Jelölések: x: kezdő lányok, y: haladó lányok, z: kezdő fiúk, w: haladó fiúk. Ekkor z + w = 0,55(x + y + z + w), $\frac{z}{w} = \frac{x+z}{y+w}$ és keresendő $\frac{w}{y}$.

Írjuk fel $\frac{z+w}{w}$-t, s mutassuk meg, hogy $\frac{w}{y+w}$ = 0,55.

Eredmény:

$$\frac{y}{w} = \frac{9}{11}.$$

A1.4. Ha $a \neq 0$, akkor alkalmazzuk az $x = -\frac{b}{a}$, majd x = 0 helyettesítést.

Egy másik lehetőség:

vizsgáljuk a két függvény határértékét a – ∞-ben.

Eredmény:

a = 1, b = 0.

A1.5. Az egyenletet átalakítva $\sum (x_i)(x_i - a) = 0$.

Eredmény:

A megoldásszám 2^n.

Elemi algebra 2. – útmutatások

A2.1. Szorozzuk be az egyenletet $(x + 1) – (x – 2)$-vel, s használjuk fel $a^{2002} – b^{2002}$ nevezetes szorzattá alakítását.

Eredmény:

$x = \frac{1}{2}$.

A2.2. Szorozzuk meg az egyenletet $x + y + z$-vel!

A2.3. Rendezés után $(a + b)x^2 + (a + b)^2x + (a + b)ab = (a + b)(a + x)(b + x) = 0$. Itt $a = – b$ esetén minden $x \neq 0$ megoldás; $a \neq – b$ esetén $x = – a$ vagy $x = – b$.

A2.4. Ld. az előző feladatot. Rendezve $(a + b)(b + c)(a + c) = 0$ adódik, amiből az állítás következik.

Megjegyzés:

Régi KöMaL-feladat volt a következő: Bizonyítsuk be, hogy ha $x + y + z = a$ és $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}$, akkor az x, y, z számok közül valamelyik egyenlő a-val.

A2.5. Mutassuk meg, hogy $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right) = 2^x$.

Eredmény:

$$\frac{1}{2^{\frac{1}{2002}}-1}-\frac{1}{3}.$$

Egészrész, törtrész 1.

A3.1. Mutassuk meg, hogy nincs megoldás, ha 1) $x < – 1$; 2) $– 1 \leq x \leq 1$; 3) $2 \leq x$.

Eredmény:

$x = \sqrt[3]{5}$.

A3.2. Adjuk össze a három egyenletet, és használjuk fel, hogy $[r] + \{r\} = r$.

Eredmény:

(x, y, z) = (100,15; 100,95; 99,05).

A3.3. a) $m^2 \le n < (m + 1)^2$.
b) Az előzőek alapján n = m^2, $m^2 + m$ vagy $m^2 + 2m$ lehet.

A3.4. $2^{998} \equiv -1 \pmod{1997}$, ezért az $1, 2, 2^2, \dots, 2^{1995}$ számok különböző, nemzérus maradékokat adnak (mod 1997). Így az

$$\left\lfloor \frac{1}{1997} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{1997} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{2^{1995}}{1997} \right\rfloor = \left(\frac{1}{1997} - \left\{ \frac{1}{1997} \right\} \right) + \dots + \left(\frac{2^{1995}}{1997} - \left\{ \frac{2^{1995}}{1997} \right\} \right)$$

átírás után az $\frac{1+2+\dots+2^{1995}}{1997}$ összeg mellett a törtrészek összege – a zérus nélküli teljes maradékrendszer miatt – $\frac{1+2+\dots+1996}{1997}$.

A3.5. Mutassuk meg, hogy n = 1, 2, … , 111 esetén 1979n + 16 teljes maradékrendszert alkot mod 111! Az összeg értéke emiatt $\sum_{0}^{110} \frac{i}{111}$ = 55.

Egészrész, törtrész 2.

A4.1. Mutassuk meg, hogy $2 \le x < 3$!

A4.2. Alakítsuk teljes négyzetté a gyök alatti kifejezést, s a jobb oldal értékkészlete alapján vizsgáljuk meg az egyes eseteket. ([2 – sinx] = 2 vagy [2 – sinx] = 1 lehetséges csak.)

Eredmény:

x = 0 vagy $3 + \frac{\sqrt{65}}{14} < x \le 3 + \frac{\sqrt{93}}{14}$.

A4.3. Minden i-re i^2 és $(i + 1)^2$ között 2i darab egész szám van, amelyek egész része i. Mivel $2001 = 44^2 + 65$, a keresett összeg $\sum_{i=1}^{43} i(2i+1) + 44 \cdot 66$.

Eredmény:

58718.

Megjegyzés:

Hasonló feladatot tűztek ki az 1984. évi erdélyi Kockafej matematika versenyen, innen származnak az alábbi általánosítások (Bencze Mihály: Erdélyi és nemzetközi magyar matematika versenyek, 1997, Fulgur):

Bizonyítsuk be, hogy

a) $\left[\sqrt{1}\right]^2+\left[\sqrt{2}\right]^2+\ldots+\left[\sqrt{n^2-1}\right]^2=\frac{1}{6}n(n-1)(3n^2-n-1)$;

b) $\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+\ldots+\left[\sqrt{n^2-1}\right]=\frac{1}{6}n(n-1)(4n+1)$;

c/ $\left[\sqrt[3]{1}\right]+\left[\sqrt[3]{2}\right]+\ldots+\left[\sqrt[3]{n^2-1}\right]=\frac{1}{4}n^2(n-1)(3n+1)$;

d/ $1\left[\sqrt{1}\right]^2+2\left[\sqrt{2}\right]^2+\ldots+\left(n^2-1\right)\left[\sqrt{n^2-1}\right]^2=\frac{1}{60}(n-1)n(n+1)(2n-1)(2n+1)(5n-6)$.

A4.4. A $2\sqrt{n+1}>\sqrt{n}+\sqrt{n+2}$ egyenlőtlenség segítségével mutassuk meg, hogy $\sqrt{9n+8}<\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}<\sqrt{9n+9}$. $9n+8$ és $9n+9$ szomszédos természetes számok, közöttük nem lehet négyzetszám.

A4.5. Mivel $\frac{1}{\alpha}=2-\sqrt{3}<1$, $\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(2-\sqrt{3}\right)^n$ kifejtett alakja α^n –nél nagyobb és α^n+1-nél kisebb páros egész szám lesz.

Megjegyzés:

Egy a többféle általánosítási lehetőség közül:

Legyen $\alpha=x+\sqrt{x^2-1}$. Bizonyítsuk be, hogy $\alpha^n-[\alpha^n]=1-\alpha^{-n}$, ha n nemnegatív egész.

Magasabbfokú egyenletek 1.

A5.1. Vegyük észre, hogy $a=x^2+3x-4$ és $b=2x^2-5x+3$ helyettesítéssel az egyenlet $a^3+b^3=(a+b)^3$ alakú lesz.

Eredmény:

$x=-4,\ -\frac{1}{3},\ 1,\ \frac{1}{3}$ (x = 1 háromszoros gyök).

Megjegyzés:

Ugyanezt a feladatot tűzték ki az 1993. évi váci II.Nemzetközi Magyar Matematikaverseny 12. osztályosai számára.

A5.2. Alkalmazzuk a $\sqrt{x^2+25x+80}$ = a helyettesítést.

Eredmény:

31.

A5.3. A Vieta-formulák felhasználásával négy egyenletet kapunk négy ismeretlennel. Innen p-re harmadfokú egyenletet adódik, melynek egy gyökét könnyen megtalálhatjuk.

A5.4. Nyilván $n \in Z$. Az a, b, c gyökök esetén írjuk fel a gyökök és együtthatók közötti összefüggéseket az $a + b + c$, $ab + bc + ac$ és abc kifejezésekre, s innen fejezzük ki $a^2 + b^2 + c^2$-et. Kapjuk: $a^2 + b^2 + c^2 = 6$.

Eredmény:

$n = \pm 2$.

A5.5. a) Alkalmazzuk a számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenséget az xy, yz, xz számokra, innen $xyz \le 8$; majd a 2, x, y, z számokra alkalmazva az egyenlőtlenséget, $xyz \ge 8$, s egyenlőség esetén $x = y = z = 2$.

b) Az $x + y + z$, $xy + yz + xz$ és xyz segítségével írjuk fel a harmadfokú egyenlet Vieta-formuláit: $x + y + z = a$, $xy + yz + xz = 12$ és $xyz = a + 2$ esetén az $f(t) = t^3 - at^2 + 12t - a - 2 = 0$ egyenlet három gyöke x, y és z. Legyen pl. $a = -7$; ekkor $f(-5) < 0$, $f(-4) > 0$, $f(-2) > 0$, $f(-1) < 0$, $f(0) > 0$.

Magasabbfokú egyenletek 2.

A6.1. A négyzetre emelések után kapott negyedfokú egyenletnek $x = 3$ és $x = -2$ is gyöke.

Eredmény:

$x = 3$.

Második megoldás:

Bevezetve a $t = x - 2$ ismeretlent és az $f(t) = \sqrt{4-3t}$ függvényt az egyenlet $f(f(t)) = t$ alakú. f fogyó, így lehet olyan megoldás is, amelyre $f(t) \neq t$, ekkor viszont t és f(t) is megoldások. Ha van $t \neq f(t)$ alakú megoldáspár is, akkor a $t = f(t)$ típussal együtt van három megoldása a négyzetre emelések után kapott negyedfokú egyenletnek. Így kell lennie egy negyediknek is, ami csak $t \neq f(t)$ típusú lehet, így viszont már öt megoldást kapunk, ami ellentmondás.

A6.2. Az $(x^2 + x + a)^2 - x^4$ különbség szorzattá alakítható.

Eredmény:

$a = -1$ $(x = 1)$ és $a = -3$ $(x = 1)$.

A6.3. Az $x = \operatorname{tg}\alpha$ (ekkor $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{x}$) helyettesítéssel szimmetrikus (hatodfokú) egyenletet kapunk. Az $x + \frac{1}{x} = y$ bevezetése után adódó harmadfokú egyenletnek $y = 4$ gyöke.

Eredmény:

$\operatorname{tg}\alpha = 2 \pm \sqrt{3}$. Innen a háromszög két hegyesszöge 15° és 75°.

A6.4. A gyökök a 0-ra szimmetrikus helyzetűek.

Eredmény:

$a = -\frac{82}{9}$.

A6.5. Az egyenes egyenletének felírása után a metszéspontokra harmadfokú egyenletet kapunk, melynek két gyökét ismerjük.

Eredmény:

$x_3 = 1929$.

Algebrai egyenletrendszerek 1.

A7.1. Adjuk össze az egyenleteket, és alakítsunk négyzetösszeggé!

Eredmény:

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 2, 3, 4, 5)$.

A7.2. Legyen pl. $xy = p$, s alkalmazzuk a Vieta-formulákat és az elemi szimmetrikus polinomok tételét!

Eredmény:

A lehetséges értékek: $a \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

A7.3. A ciklikus szimmetria miatt az egyenletrendszernek pontosan akkor van egy x, y, z megoldása, ha $x = y = z$. Ekkor az egyenleteket összeadva alakítsunk ki négyzetösszegeket.

Eredmény:

$p = \pm 1$.

A7.4. Mutassuk meg, hogy $\sqrt[3]{\frac{ax^3}{x} + \frac{by^3}{y} + \frac{cz^3}{z}} = x\sqrt[3]{a} \left(= y\sqrt[3]{b} = z\sqrt[3]{c}\right)$.

A7.5. A $4 = \frac{a^2}{yz} + \frac{b^2}{zx} + \frac{c^2}{xy} + \frac{abc}{xyz}$ egyenlet helyettesítéssel $4 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_1y_1z_1$ alakba írható; innen pedig áttérhetünk a $4 = 4\sin^2 u + 4\sin^2 v + z_1^2 + 4\sin u \cdot \sin v \cdot z_1$ egyenletre. Az a = $2\sqrt{yz}\sin u$, b = $2\sqrt{zx}\sin v$, c = $2\sqrt{xy}(\cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v)$ összefüggéseket felhasználva az első egyenletből $\left(\sqrt{x}\cos v - \sqrt{y}\cos u\right)^2 + \left(\sqrt{x}\sin v + \sqrt{y}\sin u - \sqrt{z}\right)^2 = 0$.

Eredmény:

(x, y, z) = $\left(\frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$.

Algebrai egyenletrendszerek 2.

A8.1. A második egyenlet szorzattá alakítható, pl. x-et paraméternek tekintve.

Eredmény:

(x, y) = (– 2, 6), (– 2, – 6), (0, 4), (– 5, 9), (19, 99).

A8.2. Vonjuk ki a második egyenletből az elsőt:
$\left(x_1^3 - 1\right)\left(x_1 - 1\right) + \left(x_2^3 - 1\right)\left(x_2 - 1\right) + \ldots + \left(x_{2002}^3 - 1\right)\left(x_{2002} - 1\right) = 0$,
majd a bal oldalt alakítsuk nem-negatív együtthatójú négyzetösszegekké.

Eredmény:

$x_k = 1$, $1 \le k \le 2002$.

A8.3. Ld. **A.7.2.**

Eredmény:

$a \in \{0, 1, 2\}$.

A8.4. Adjuk össze az egyenletek négyzetét!

Eredmény:

$a^2 + b^2 = \sqrt[3]{2002}$.

Megjegyzés:

Ha z = a + bi, akkor $z^3 = \sqrt{402} - 40i$ és így $\left(z \cdot \bar{z}\right)^3 = 2002$, azaz $a^2 + b^2 = z \cdot \bar{z} = \sqrt[3]{2002}$.

A8.5. Az első egyenletből geometriai megfontolásokkal 4y = 3x adódik. (Az A(0; 0), B(4; 3), P(x; y) pontokra PA + PB = AB.)

Eredmény:

(x; y) = (2; 1,5).

Algebrai egyenlőtlenségek 1.

A9.1. A $(2a - 3c)^2 + (b - c)^2 + (a - 2b)^2 - 2(2a - 3c)$ átalakítás után írjuk fel a kifejezést négyzetek összegeként!

Eredmény:

A minimum értéke – 1 és akkor adódik, ha (a, b, c) = (– 2, – 1, – 1).

A9.2. Vizsgáljuk meg az x^y kifejezés és 1 nagyságviszonyát, pl. ab előjele alapján!

A9.3. a) Először mutassuk meg, hogy $\frac{x^2}{x+y} \geq \frac{3x-y}{4}$, majd a szimmetrikus egyenlőtlenségeket alkalmazzuk a többi tagra is.
b) $x = y = z = t = \frac{1}{4}$.

A9.4. Alkalmazzuk az a + b = x, a + c = y, b + c = z (x, y, z > 0) helyettesítést, s mutassuk meg, hogy x, y, z lehet egy háromszög három oldala. Ekkor 2s = x + y + z bevezetésével $xy \geq 2\sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$.

A9.5. A Vieta-formulákat alkalmazva $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$, $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} = \frac{n^2 b}{b} = n^2$.

Felírva az $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ és $\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}\right)$ vektorokra a Cauchy-Schwartz-Bunyakovszkij-egyenlőtlenséget, kapjuk, hogy csak az $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{1}{n}$ esetben állhat fenn egyenlőség.

Algebrai egyenlőtlenségek 2.

A10.1. Az $a^6 + 1 = 2\left(a + \frac{1}{a}\right)$ átalakítás segít az alsó becslésben; az $1 + \frac{2}{a^3} = a^2 + \frac{1}{a^2}$ pedig a felső becslést adja. (Alkalmazzuk a reciprok-egyenlőtlenséget.)

A10.2. A feltételt átalakítva $-bc^3 \geq -bc$. Ezt a célállítással egybevetve elég belátni, hogy $10(a^2 + b^2 + c^2 - bc^3) \geq 2ab + 5ac$. Alkalmazzuk a Cauchy-Schwartz-Bunyakovszkij-egyenlőtlenséget az (1, 2, 5) és (a, b, c) vektorokra!

Más megoldási lehetőség:

A $10a^2 - (2c + 5b)a + 10b^2 + 10c^2 - 10bc \geq 0$ paraméteres egyenlőtlenségben (az a változóban másodfokú) vizsgálhatjuk a diszkriminánst (esetleg újabb másodfokú paraméterezéssel).

A10.3. Az indirekt feltevésből $ab - bc - ac \leq -1$; fejtsük ki $(a + b - c)^2$-t.

A10.4. Induljunk ki $(a + b + c)^2$ kifejtett alakjából s becsüljük alulról 2ab-t $2b^2$-tel stb.

A10.5. Alkalmazzuk a $b = n - k$ helyettesítést, ekkor $\frac{1}{n+1}n^n < \binom{n}{k}k^k b^b < n^n$ a bizonyítandó egyenlőtlenség. Mivel $n^n = (k + b)^n$, a binomiális tételből a jobboldali egyenlőtlenség következik.

Ezután mutassuk meg, hogy tetszőleges $j > 0$-ra $\frac{\binom{n}{k}k^k b^b}{\binom{n}{k+j}k^{k+j}b^{b-j}} > 1$, s ebből már következik a bal oldali egyenlőtlenség.

Algebrai egyenlőtlenségek 3.

A11.1. Gyöktelenítsük a bal oldali tört nevezőjét, majd alkalmazzuk az $y = \sqrt{x+1}$ helyettesítést.

Eredmény:

$-1 < x < 3$, $x \neq 0$.

A11.2. A kifejezés x és y változókban szimmetrikus, ezért $x \leq y \leq z$ és $x \leq z \leq y$ és a $z \leq x \leq y$ a megvizsgálandó esetek. Alkalmazzunk az első esetben $y = x + \varepsilon$ és $z = x + \varepsilon + \delta$ helyettesítést ($\varepsilon, \delta \geq 0$), s hasonlót a másik esetben is. A harmadik eset triviális.

A11.3. Mutassuk meg, hogy $\frac{x}{1+y+zx} \leq \frac{1}{x+y+z}$.

A11.4. Igen, következik. Előbb mutassuk meg, hogy igaz az egyenlőtlenség 4 tagra, majd alkalmazzuk a kapott eredményt x_1, x_2, x_3 és $\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$ tagokra!

Megjegyzés:

Tetszőleges n-re is adódik, hogy $f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n}$; ez a Jensen-egyenlőtlenség.

A11.5. Legyen $x_1 = \sqrt{a^2(b^2+1)}$, $x_2 = \sqrt{b^2(c^2+1)}$, $x_3 = \sqrt{c^2(a^2+1)}$, $y_1 = \sqrt{\frac{a}{b^2+1}}$, $y_2 = \sqrt{\frac{b}{c^2+1}}$, $y_3 = \sqrt{\frac{c}{a^2+1}}$, s alkalmazzuk az ($x_1$, x_2, x_3) és (y_1, y_2, y_3) vektorokra a Cauchy-Schwartz egyenlőtlenséget. Ebből következően elég belátni, hogy $\frac{4}{3} \geq a^2(b^2 + 1) + b^2(c^2 + 1) + c^2(a^2 + 1)$. Ehhez használjuk fel az $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ feltételt és alkalmazzuk a rendezési tételt.

Egyenlőség az $a = b = c = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ esetben teljesül.

Algebrai egyenlőtlenségek 4.

A12.1. Két esetet vizsgáljunk x és y (különböző) előjele alapján.

Eredmény:

A minimum 1, ha $x = -2$ és $y = 3$.

A12.2. $x^{12} - x^9 - x^3 + 1 = (x^3 - 1)^2(x^6 + x^3 + 1)$.

A12.3. Az $(a(xy)^2 + b(xy) + c)^2 \leq (a(x^2)^2 + b(x^2) + c)(a(y^2)^2 + b(y^2) + c)$ egyenlőtlenség átalakítás után $0 \leq abx^2y^2(x^2 + y^2 - 2xy) + ac(x^4 + y^4 - 2x^2y^2) + bc(x^2 + y^2 - 2xy)$ alakot ölti.

A12.4. A Cauchy-Schwartz egyenlőtlenségből

$$\big((a+b)+(b+c)+(a+c)\big)\left(\frac{1}{b(a+b)}+\frac{1}{c(b+c)}+\frac{1}{a(a+c)}\right) \geq \left(\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2,$$ ezt

átfogalmazva elég belátni, hogy $(a+b+c)\left(\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 \geq 27$ .Ezután alkalmazhatjuk a számtani és négyzetes közép közötti egyenlőtlenséget.

A12.5. Az egyenlőtlenséget átalakítva $-6a(a^2 - 2b) \leq -27c + 10(a^2 - 2b)^{3/2}$. Ha α, β, γ a három gyök, a Vieta-formulákkal $6(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \leq 27\alpha\beta\gamma + 10(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{3/2}$ a bizonyítandó egyenlőtlenség. Ha $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0$, bontsuk meg a szimmetriát: $|\alpha| \leq |\beta| \leq |\gamma|$, s alkalmazzuk az $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 9$ helyettesítést. Innen $\alpha = -1$, $\beta = \gamma = 2$ következik. Egyenlőség akkor és csak akkor lehet, ha $(\alpha, \beta, \gamma) = (-t, 2t, 2t)$, ill. ezek permutációi.

Eredmény:

$(a, b, c) = (-3t, 0, 4t^3)$.

Algebrai egyenlőtlenségek 5.

A13.1. Alkalmazzuk az $x = 1 + d$, $y = 1 - d$ szimmetrizációt ($0 \le d \le 1$)!

A13.2. Legyen $\frac{a}{b} = p$, $\frac{b}{c} = q$, ekkor $p + q + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 4$ és $\left(p + \frac{1}{p}\right)\left(q + \frac{1}{q}\right)$ maximumát keressük. Mivel p és q ellenkező előjelű, pl. $\left(p + \frac{1}{p}\right) \le -2$ és így $\left(q + \frac{1}{q}\right) \ge 6$.

Eredmény:

$$\left(p + \frac{1}{p}\right)\left(q + \frac{1}{q}\right) \le -12.$$

A13.3. Ha a nevezőket megnöveljük $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$-re, az összeget csökkentettük; ugyanakkor $\left(1 - \frac{a_1}{a_1 + a_2}\right) + \left(1 - \frac{a_2}{a_2 + a_3}\right) + \ldots + \left(1 - \frac{a_n}{a_n + a_1}\right)$ az eredeti összeget adja.

Eredmény:

$K \le 1$, $G \ge n - 1$.

A13.4. Induljunk ki az $\frac{a^2}{a + b} \ge \frac{3a - b}{4}$ típusú egyenlőtlenségekből.

Más megoldási lehetőség:

A Cauchy – Schwarz – Bunyakovszki egyenlőtlenséget alkalmazhatjuk az $\left(\frac{a}{\sqrt{a + b}}, \frac{b}{\sqrt{b + c}}, \frac{c}{\sqrt{c + d}}, \frac{d}{\sqrt{d + a}}\right)$ és $\left(\sqrt{a + b}, \sqrt{b + c}, \sqrt{c + d}, \sqrt{d + a}\right)$ vektorokra.

A13.5. $\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2 = x + y + 2\sqrt{xy} \le 2(x + y)$, majd legyen $x = a + b - c$, $y = a - b + c$; ekkor $\sqrt{a + b - c} + \sqrt{a - b + c} \le 2\sqrt{a}$.

Hatványközepek 1.

A14.1. Párosítsuk az i, 2003 – i számokat s alkalmazzuk rájuk a számtani – mértani közép közötti egyenlőtlenséget!

A14.2. Alkalmazzuk a számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenséget az x^2, $2xy$, $2xy$, $4y^2$, z^2, z^2 számokra!

Eredmény:

$(x, y, z) = (4, 2, 4)$ esetén 96 a minimum.

A14.3. A mértani és négyzetes közép közötti egyenlőtlenség miatt elég belátni, hogy

$2(a^{p+2} + b^{p+2} + c^{p+2}) \geq a^p(b^2 + c^2) + b^p(c^2 + a^2) + c^p(a^2 + b^2)$, ehhez pedig használjuk fel, hogy $a^{p+2} + b^{p+2} \geq a^pb^2 + b^pa^2$.

A14.4. Alkalmazzuk a számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenséget az $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ számokra, majd az a, b, c számokra a számtani-négyzetes közép közötti egyenlőtlenséget. Ezekből következik, hogy $3\sqrt{3} \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$, s innen szorozzunk $\left(\sqrt{3} + 1\right)\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ -tel.

Eredmény:

Egyenlőség az a = b = c esetben állhat fenn.

A14.5. Legyen $\frac{y_i}{x_i} = \alpha_i$, ekkor $S = x_1(\alpha_1 - 1) + x_2(\alpha_2 - 1) + \ldots + x_n(\alpha_n - 1) \geq 0$ az állítás. Az $S_i = (\alpha_1 - 1) + (\alpha_2 - 1) + \ldots + (\alpha_n - 1)$ bevezetésével $S = S_1(x_1 - x_2) + S_2(x_2 - x_3) + \ldots + S_{n-1}(x_{n-1} - x_n) + S_nx_n$. Ezután elég belátni, hogy $S_i \geq 0$, amely a számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenségből következik az $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, i számokra felírva.

Megjegyzés:

Az állítás az Abel-egyenlőtlenség nyilvánvaló következménye.

Hatványközepek 2.

A15.1. A $7(ab + bc + ac)(a + b + c) \leq 2(a + b + c)^3 + 9(abc)$ egyenlőtlenségből $a^2b + b^2a + b^2c + c^2b + c^2a + a^2c \leq 2(a^3 + b^3 + c^3)$ következik.
Innen a számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenség páronkénti felírásával léphetünk tovább, pl. az a^3, a^3, b^3 számokra alkalmazva stb.

A15.2. Induljunk ki az $\frac{a^2}{bc}$ és bc számokra felírt számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenségből! (Következmény: $\frac{a^2}{bc} - a + bc \geq a$.)

A15.3. Négyzetre emelés és $x^2 = a$, $y^2 = b$ helyettesítés után kapjuk, hogy $k^2 - 4 \leq \frac{3a^2 + b^2}{ab}$.
A $\frac{3a}{b}$ és $\frac{b}{a}$ számokra felírva a azámtani – mértani közép közötti egyenlőtlenséget, $2\sqrt{3} \leq \frac{3a^2 + b^2}{ab}$, s innen $k^2 - 4 \leq 2\sqrt{3}$.

Más megoldási lehetőség:

A $c = \frac{a}{b}$ helyettesítés után vizsgáljuk meg, hogy a $3c^2 - (k^2 - 4)c + 1 \geq 0$ egyenlőtlenségnek milyen k értékekre van megoldása.

Eredmény:

$k = 1 + \sqrt{3}$.

A15.4. Vezessük be az a = x + y + z, b = xy + yz + zx, c = abc szimmetrikus helyettesítést, majd alkalmazzuk az a, b, c számokra a számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenséget, csakúgy, mint az xy, yz, zx, 4 számokra. Az $r \leq 8$ és $r \geq 8$ feltételekből r = 8.

Eredmény:

x = y = z = 2.

A15.5. Alkalmazzuk a számtani – mértani közép közötti egyenlőtlenséget az $\frac{a}{1-a}, \frac{b}{1-b}, \frac{c}{1-c}$ pozitív számokra, majd hasonló módon mutassuk meg, hogy $\sqrt[3]{(1-a)(1-b)(1-c)} \leq 1 - \sqrt[3]{abc}$.

Második megoldás:

Mutassuk meg, hogy az $f(x) = \frac{x}{1-x}$ függvény a [0; 1[intervallumon konvex, s alkalmazzuk a Jensen-egyenlőtlenséget.

Hatványközepek 3.

A16.1. Alkalmazzuk az $\frac{x^6}{3}, \frac{x^6}{3}, \frac{x^6}{3}, \frac{y^6}{2}, \frac{y^6}{2}, z^6$ számokra a számtani-mértani közép közötti összefüggést!

Eredmény:

A maximum $\frac{\sqrt[6]{3^3 \cdot 2^2}}{6}$.

A16.2. a) Pl. a + b = x stb. helyettesítés után alkalmazzuk a számtani – mértani közép közötti egyenlőtlenséget.

b) Induljunk ki a $\frac{4}{a+b} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ típusú egyenlőtlenségekből!

A16.3. a) Az a_{1001} számra $a_{1001}(1 - a_{1001}) \leq \frac{1}{4}$.

b) Nem, ellenpélda pl. $a_k = -1$, $1 \leq k \leq 1001$, és $a_m = 2$, $1002 \leq m \leq 2002$.

c) Ha $a_k \geq 1$ legalább egy számra, akkor az állítás teljesül. Egyébként az $\left(\frac{1}{4}\right)^{2002}$ -nel becsülhetünk.

A16.4. a) Az $\frac{a}{b}$ = t helyettesítéssel $1 + t^2 = \frac{1}{b^2}$. Súlyozott hatványközepeket alkalmazva $(1 + t^2)^{1-t}(t^2)^t < 1 + t^2 - t$. Kapjuk: $\frac{\left(a^2\right)^{\frac{a}{b}}}{b^2} < 1 + t^2 - t < 1$.

b) Az a) feladat $\frac{\left(a^2\right)^{\frac{a}{b}}}{b^2} < 1$ egyenlőtlenségéből már következik.

A16.5. Vegyük észre, hogy ha $x_{n+1} = x_1$, akkor $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2 - x_{i+1}^2}{x_i + x_{i+1}} = \sum_{i=1}^{n} x_i - x_{i+1} = 0$, s így $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{x_i + x_{i+1}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i+1}^2}{x_i + x_{i+1}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2 + x_{i+1}^2}{x_i + x_{i+1}}$. Ezután alkalmazzuk a szomszédos x_i és x_{i+1} tagokra a számtani-négyzetes közép közötti egyenlőtlenséget.

Hatványközepek 4.

A17.1. A $z = (x - y)^2$ helyettesítéssel $\frac{(z+2)(z+8)}{z}$ minimumát keressük, ami a reciprok-egyenlőtlenséggel vagy a számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenség alkalmazásával határozható meg.

Eredmény:

C = 18, ha (x, y) = $\left(1+\sqrt{3}, -1+\sqrt{3}\right)$, $\left(1-\sqrt{3}, -1-\sqrt{3}\right)$, $\left(-1+\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}\right)$, $\left(-1-\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}\right)$.

A17.2. Alkalmazzuk a számtani – harmonikus közép közötti egyenlőtlenséget az x, $\frac{y}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{3}, \frac{z}{3}, \frac{z}{3}$ számokra.

Eredmény:

A minimum 36.

A17.3. Legyenek a számok $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_{15} \leq b$. A számtani – négyzetes közép közötti egyenlőtlenség miatt $\sum_{i=1}^{15} a_i^2 - \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15} a_i \geq 0$, s innen b-re másodfokú kifejezést kapunk.

A17.4. Végezzük el az $\frac{1+ab}{1+a} = \frac{1+c}{c(1+a)}$ típusú átalakításokat, s alkalmazzuk a számtani-mértani közép közötti összefüggést.

A17.5. Becsüljünk és alkalmazzuk a számtani-mértani közép közötti összefüggést: (a + 3b)(b + 4c)(c + 2a) ≥ (2a + 2b) $\frac{5}{2}$ (b + c) $\frac{3}{2}$ (a + c) = $\frac{15}{2}$ (a + b)(b + c)(a + c) ≥

$\frac{15}{2} \cdot 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ac}$.

Számtani sorozatok

A18.1. Ha a kezdőtag a > 0, a differencia d, akkor az első 1999 tag összegére 1999a + 999·1999d = 2000. Innen $d = \frac{2000 - 1999a}{999 \cdot 1999}$, s ennek kell 0 és 1 közé esnie.

Eredmény:

$0 < a < \frac{2000}{1999}$.

A18.2. Mutassuk meg az 5-ös maradékok vizsgálatával, hogy n ≤ 3, s adjunk konstrukciót.

Eredmény:

Legfeljebb három tagú lehet a sorozat; $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 6$.

A18.3. Jelöljük az $a_1, a_2, \dots, a_n$ számok átlagát z-vel. Ekkor $\frac{1}{a_i a_{n-i+1}} = \left(\frac{1}{a_i} + \frac{1}{a_{n-i+1}}\right)\frac{1}{2z}$.

A18.4. Legyen 2r a beírt kör átmérője, d a sorozat differenciája, s a félkerület. A területet kétféleképpen felírva $sr = \sqrt{s(s-(2r+d))(s-(2r+2d))(s-(2r+3d))}$. Mivel $s = \frac{3(2r+2d)}{2}$, 6r = 2r + 4d következik, tehát az oldalak 2r + d = 3d stb.

A18.5. 222 = 1 + 13·17, 222222 = 13·17094, 222222222 = 13·17094·10^3 + 13·17 + 1 stb.

Sorozatok

A19.1. Az első néhány tagot felírva 7, 14, 17, 20, 5, 8, 11, 5, … 3-hosszú periódust vehetünk észre.

A19.2. Vegyük észre, hogy $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$!

Eredmény:

Az összeg értéke $\frac{n^2}{2}$.

A19.3. Megjelennek 2-től kezdődően a Fibonacci-számok.

Eredmény:

144.

A19.4. Ha a sorozat a_p és a_q két tagja ($p > q$) ugyanazt a maradékot adja (mod a_1), akkor $a_p = a_q + ma_1$.

A19.5. Vegyük észre, hogy az i. és a (101 – i). tag összege 1.

Eredmény:

Az összeg értéke 51.

Rekurziók 1.

A20.1. a) A rekurzió miatt a_n pontosan akkor osztható 5-tel, ha a_{n-2} is.
b) Pl. az $a_{n+1} = 24a_{n-1} - 5a_{n-2}$ átalakítás miatt a_{n+1} pontosan akkor osztható 3-mal, ha ha a_{n-2} is, ezért elég megvizsgálni a_1, a_2 és a_3 értékét mod 3.

Eredmény:

a) Ha n páratlan.
b) ha $n = 6k + 1$ alakú.

A20.2. Mutassuk meg, hogy $a_{n+2} = k - a_n$, s innen $a_{4m} = 4mk + 1$, $a_{4m+1} = k - 1$, $a_{4m+2} = (4m + 3)k - 1$, $a_{4m+3} = 1$.

Eredmény:

$k = 3, 23, 87, 667, 2001$.

A20.3. $u_2 = 1995$ nem prím. Ezután mutassuk meg pl. m ($m \geq 1$) szerinti teljes indukcióval, hogy $u_{2m} = u_m(u_{m+1} - u_{m-1})$ és $u_{2m+1} = u^2_{m+1} - u^2_m$.

Eredmény:

Nincs prím tagja a sorozatnak.

A20.4. Vegyük észre, hogy n paritásától függően $a_n + a_{n+2} = 2a_{n+1}$ vagy $4a_{n+1}$.

Másképpen:

A rekurzióból $a_na_{n-3} - a_{n-1}a_{n-2} = a_{n+1}a_{n-2} - a_na_{n-1}$, ahonnan rendezés után $b_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n-1} + a_{n-3}}{a_{n-2}} = b_{n-2}$ ($n \ge 4$). $b_2 = 2$, $b_3 = 4$ egészek és így $a_{n+1} = b_na_n - a_{n-1}$ egész, innen $a_{n+1} - a_n \ge a_n - a_{n-1}$ pozitív ($b_n \ge 2$).

A20.5. Legyen $b_n = a_{n+1} + a_n$ és $c_n = 1 + 5a_na_{n+1}$, ekkor $5a_{n+1} = b_{n+1} + b_n$, $a_{n+2} - a_n = b_{n+1} - b_n$, végül
$c_{n+1} - c_n = b^2_{n+1} - b^2_n$. Innen $c_{n+1} - b^2_{n+1} = c_n - b^2_n$, vagyis a különbségsorozat állandó.
$c_1 - b^2_1 = 3\cdot 167$, s mivel $c_n = m^2$ négyzetszám, $(m + b_n)(m - b_n) = 3\cdot 167$.

Eredmény:

Megmutatható, hogy a c_n sorozat monoton, s ezért $n = 3$ az egyetlen megoldás.

Rekurziók 2.

A21.1. Mutassuk meg, hogy $x_5 = x_0$ és $x_6 = x_1$, s ezért a sorozat periodikus.

Eredmény:

$$x_{1998} = \frac{1 + x_0 + x_1}{x_0x_1}.$$

Másképpen:

A rekurzióból: $1 = x_nx_{n+2} - x_{n+1} = x_{n-1}x_{n+1} - x_n$, ahonnan $x_{n+3} = \frac{1 + x_{n+2}}{x_{n+1}} = \frac{1 + x_{n-1}}{x_n} = x_{n-2}$ ($n \ge 2$), tehát a sorozat öt szerint periodikus.

A21.2. Összeadva az $a_{i+1}^2 = a_i^2 + 2 + \frac{1}{a_i^2}$ típusú egyenleteket, $a_{100}^2 = 199 + \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + ... + \frac{1}{a_{99}^2}$; ezután mutassuk meg (tudván, hogy a sorozat növekvő), hogy a jobb oldal nem éri el a 225-öt.

Eredmény:

$[a_{100}] = 14$.

A21.3. Először mutassuk meg, hogy a sorozat szigorúan monoton növekvő. Mivel $a_n > 2$, ha $n > 2$, az $a_{n+1} = \frac{a_n^2 \pm 1}{a_{n-1}}$ tört nem adhat a $\pm$ értékek mindegyikére egész értéket. Ezután elég belátni, hogy az $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}$ rekurzió kielégíti a sorozatot.

A21.4. Először bizonyítsuk n szerinti teljes indukcióval, hogy k és E_n relatív prímek. Ezután mutassuk meg, hogy $n > m$ esetén $E_n = q_{nm}E_m + k$ alakban írható, ahol q_{nm} egész szám. Innen már következik, hogy E_n és E_m relatív prímek.

A21.5. Vegyük észre, hogy $\left(1+\sqrt{2}\right)^n = a_n + \sqrt{2}b_n$ és $\left(1-\sqrt{2}\right)^n = a_n - \sqrt{2}b_n$ alakú, ahol a_n, b_n $\in$ Z, s innen $\left(\sqrt{2}-1\right)^n = (-1)^n\left(\sqrt{a_n^{\ 2}} - \sqrt{2b_n^{\ 2}}\right)$.

Eredmény:

Ha n páros, $\left(\sqrt{2}-1\right)^n = \sqrt{2b_n^{\ 2}+1} - \sqrt{2b_n^{\ 2}}$, ha n páratlan, $\left(\sqrt{2}-1\right)^n = \sqrt{a_n^{\ 2}+1} - \sqrt{a_n^{\ 2}}$.

Rekurziók 3.

A22.1. A maradékok 10-hosszú ciklust alkotnak.

Eredmény:

2.

A22.2. Adjuk össze az a_i-re felírt egyenleteket!

Eredmény:

a_{1995} = 1995!, általában a_n = n!.

A22.3. $b_{n+1} = a_1a_2\ldots a_n$, $a_{n+1} - a_n = a_1a_2\ldots a_{n-1}$. Mivel $(a_1, a_2) = 1$, azt mutassuk meg teljes indukcióval, hogy a_{n+1} relatív prím minden korábbi taghoz.

A22.4. Mutassuk meg pl. teljes indukcióval, hogy $a^n = 2^n - 1$, s ebből az állítás algebrai átalakításokkal adódik.

A22.5. A rekurziót átalakítva $y_{n+1}^2 - 3y_{n+1}y_n + y_n^2 + 1 = 0$, majd n helyére n – 1-et helyettesítve $(y_{n+1} - y_{n-1})(y_{n+1} - 3y_n + y_{n-1}) = 0$. Ezután alkalmazzunk teljes indukciót!

Polinomok

A23.1. Két másodfokú polinom szorzatát az együtthatók egyeztetésének módszerével keressük.

A23.2. Egyeztessük a másodfokú polinom együtthatóit!

Eredmény:

Hat megoldás van: $p(x) = \pm(x^2 - 9)$, vagy $p(x) = \pm(x^2 \pm 6x + 9)$.

A23.3. Vizsgáljuk meg a $P(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + dx^{n-3} + \dots$ polinomra a felírható egyenletet. Az együtthatók egyeztetése után $2\binom{n}{2}a - 2\binom{n}{1}a + 2c = 2c$, ill. $2\binom{n-1}{2}b - 2\binom{n-1}{1}b + 2d = 2d$ összefüggéseket kapjuk.

Eredmény:

$P(x) = ax^3 - ax + d$, ahol a, d tetszőleges valós számok.

Más megoldási lehetőség:

Helyettesítsünk x helyébe 1-et és – 1-et!

A23.4. Helyettesítsük rendre az x = 1, x = 2, majd x = 4 értékeket az egyenletbe! Innen $p(x) = (x-2)(x-4)(x-8)q(x)$ következik, melyet visszahelyettesítve $q(2x) = q(x)$ minden x-re. Ez csak úgy lehetséges, ha q(x) konstans polinom.

Eredmény:

$p(x) = c(x-2)(x-4)(x-8)$, $c \in \mathbb{R}$.

A23.5. A binomiális tétel szerint $(1 + x)^p$ kifejtett alakjában x^i együtthatója $\binom{p}{i} = \frac{p(p-1)...(p-i+1)}{i!}$, s ez p többszöröse. Ezután vizsgáljuk meg sorra $(1 + x)^p = (1 + x)^2(1 + x)^{p-2} = 1 + (a_1 + 2)x + (a_2 + 2a_1 + 1)x^2 + \dots + a_{p-2}x^p$ együtthatóit.

Racionális számok

A24.1. a) Indirekt okoskodással ellentmondást kapunk a számelmélet alaptételével.
b) Pl. $\sqrt{2}^{\log_{\sqrt{2}} 3}$.

A24.2. Az $\{a_n\}$ sorozat periodikus, hiszen véges sok végződés lehetséges.

Megjegyzés:

Egyébként $9(9a_n + 8) + 8 = 81a_n + 80 \equiv a_n \pmod{10}$ miatt a periódus hossza 2.

Hasonlóan mutatható meg, hogy tetszőlegesen sok utolsó számjegyet és tetszőleges magasabbrendű, egész együtthatós lineáris rekurziót tekintve is igaz az állítás.

A24.3. Ha a racionális, az $a^2 - [a]a - 1 = 0$ egyenlet diszkriminánsának négyzetszámnak kellene lennie, de ez nem teljesül.

A24.4. Mutassuk meg, hogy $x = \frac{y}{3}$ alakú, ahol y egész; majd az $y^3 - 3y^2 + 9m = 0$ egyenlet gyökeire vonatkozó Vieta-formulákat alkalmazhatjuk. (Az $a^2 + b^2 + c^2 = 9$ egyenletnek lényegében két különböző megoldása van.)

Eredmény:

$m = 0$.

A24.5. Vegyük fel a $(0, -1)$ ponton áthaladó, racionális meredekségű egyeneseket.

Algebrai trigonometria

A25.1. Párosítsuk a $\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}$ és $\frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}$ tagokat!

Eredmény:

A kifejezés értéke 2n.

A25.2. Először lássuk be, hogy $|\cos\alpha| + |\cos 2\alpha| \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$; ezután alkalmazzuk a $2(|\cos x| + |\cos 2x| + |\cos 4x| + \ldots + |\cos 2^n x|) \ge (|\cos x| + |\cos 2x|) + (|\cos 2x| + |\cos 4x|) + \ldots + (|\cos 2^{n-1}x| + |\cos 2^n x|)$ becslést.

A25.3. $\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \le \frac{1}{\cos\alpha\cos\beta}$ átalakítás után elég megmutatni, hogy $\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\cos\beta} \ge 2\sqrt{\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta}}$ (itt pedig teljes négyzetté alakíthatunk).

A25.4. a) Mutassuk meg, hogy $a\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2} + \frac{R}{2}\sin(2\alpha)$ és $\sin(2\alpha) + \sin(2\beta) + \sin(2\gamma) = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$, valamint alkalmazzuk a háromszögek területképleteit!

b) Alkalmazzuk a számtani és négyzetes közép közötti egyenlőtlenséget a $\sqrt{a}\cos\frac{\alpha}{2}$, $\sqrt{b}\cos\frac{\beta}{2}$, $\sqrt{c}\cos\frac{\gamma}{2}$ számokra.

A25.5. Az indirekt feltételből $\cos x_1 + \cos x_2 + \ldots + \cos x_n > \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}(\sin x_1 + \ldots + \sin x_n) \ge n\cdot\cos\alpha$, innen $(\sin x_1 + \sin x_2 + \ldots + \sin x_n)^2 + (\cos x_1 + \cos x_2 + \ldots + \cos x_n)^2 > n^2$. Ugyanakkor a bal oldal $\le n^2$. (n darab egységvektor összege abszolút értékének a négyzete.)

Függvények, függvényegyenletek 1.

A26.1. Helyettesítsünk x-et, majd $\frac{1}{x}$-et, s küszöböljük ki az $f\left(\frac{1}{x}\right)$-es tagokat.

Eredmény:

$$f(x) = -\frac{1}{8}\left(3^x + 3\cdot 3^{\frac{1}{x}}\right).$$

A26.2. Mutassuk meg, hogy $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.

Eredmény:

$1999\frac{1}{2}$.

A26.3. Vegyük észre, hogy f(n) az n szám 2-es számrendszerbeli alakjában a számjegyek összege.

Eredmény:

f(n) maximuma 10, s ezeket felveszi az 1023, 1535, 1791, 1919, 1983 helyeken.

A26.4. Előbb írjuk fel a páros helyettesítési értékeket, s szorozzuk össze az egyenleteket; majd ugyanezt végezzük el a páratlan helyettesítési értékekre is. Innen algebrai átalakításokkal következik már az állítás.

A26.5. Helyettesítsünk y helyére – x-et, majd x helyébe 0-t!

Eredmény:

$f(x) = 4x^2 - 115$.

Függvények, függvényegyenletek 2.

A27.1. Haladjunk a külső függvény felől!

Eredmény:

2 megoldás van: x = 1 vagy x = 2.

A27.2. Helyettesítsünk 1 – x-et x helyébe, s ejtsük ki f(1 – x)-et.

Eredmény:

$$f(x) = \frac{-x^3 + 3x^2 - 2x + 1}{x^2 - x + 1}.$$

A27.3. Először mutassuk meg az együtthatók egyeztetésével, hogy $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^2$, majd összegezzük $f[x(x + 1)] – f[x(x – 1)]$-et az $x = 1, 2, \dots , n^7$ értékekre.

Eredmény:

$p(n) = 3n^4 + 6n^3 – n^2 – 4n + 2$.

A27.4. Tekintsük a $g(x) = f(x) – x$ függvényt! Erre az a) és c) feltétel érvényben marad, a b) $g(x + 1) = g(x)$ alakra módosul. Az első két feltételből $g(0) = g(– 1) = 0$, majd $x \neq 0, – 1$ esetén általában is megmutathatjuk, hogy $g(x) = – g(x)$.

Eredmény:

$f(x) = x$.

A27.5. Alkalmazzuk az $x = y = 0$ helyettesítést, majd haladjunk aszerint, hogy $f(0) = 2$ vagy $f(0) = 0$. (Ez utóbbi a nehezebb; $x = y = 2$ helyettesítés után $f(2) = 0$ vagy $f(2) = 2$ lehet.)

Eredmény:

$f(x) = 0$, $f(x) = 2$ vagy $f(x) = x$.

Függvények, függvényegyenletek 3.

A28.1. Ha $f(x)$ periodikus, akkor $f(x) + f(– x)$ is az; de $\cos(x^2)$ zérushelyei nem periodikusak.

Eredmény:

Nem.

A28.2. Legyen n a legkisebb egész szám, amelyre $f(x) < n$, ha $x \neq 0$. Mutassuk meg, hogy ekkor $\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 < 1$, $f\left(\frac{1}{x}\right) > – 1$, s helyettesítsünk az eredeti egyenletbe x helyére $\frac{1}{x}$-et.

Eredmény:

Nincs ilyen függvény.

A28.3. Páratlan prímekre 1) miatt $f(2p) = f(2)f(p)$. Rendre meghatározhatjuk $f(4)$, $f(5)$, $f(7)$ értékeit $f(3)$ függvényében, majd $f(12) = f(4\cdot3)$ és $f(12) = f(5 + 7)$ összefüggésekből $f(3)$-at. Hasonlóan folytathatjuk $f(5)$, $f(7)$, $f(14)$, $f(11)$, $f(13)$ stb. értékekkel.

A28.4. Legyen $x = \frac{p}{q}$ alakú (p, q relatív prím egész számok, p > 0, q ≠ 0), és mutassuk meg, hogy a feltételeknek eleget tevő függvényre $f\left(\frac{p}{q}\right) = pq + 2$.

Eredmény:

(p, q) = (1, 2000), (16, 125) és fordítva; így x = 2000, $\frac{125}{16}$, $\frac{16}{125}$, $\frac{1}{2000}$ lehet.

A28.5. Helyettesítsünk x = y = 0-t az egyenletbe, majd vegyük észre, hogy f(a) + f(b) = $f\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)$ kielégíti a függvényegyenletet. Innen g(a) = $f\left(\sqrt{a}\right)$, majd $a = \sqrt{x}, b = \sqrt{y}$ helyettesítéssel g(x + y) = g(x) + g(y), minden pozitív x, y-ra; azt pedig tudjuk, hogy a lineáris függvény ezen egyenlet megoldása.

Eredmény:

$f(x) = kx^2$, $x \geq 0$.

Analízis

A29.1. Szorozzuk meg (1 – x)-szel, majd $(1 - x)^2$-tel és $(1 - x)^3$-nal s-et!

Eredmény:

$s = \frac{1+x}{(1-x)^3}$.

A29.2. Mivel $d_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n - v_n)$ s $d_1 = -1$, $d_{n+1} = -\frac{1}{4^n}$. Ezután u_{n+1} rekurzív alakjából küszöböljük ki v_n-et.

Eredmény:

$u_n = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{4^{n-1}}\right)$, $v_n = u_n + \frac{1}{4^{n-1}}$, mindkét sorozat határértéke $\frac{2}{3}$.

A29.3. Mivel $a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n)$, a különbségsorozat mértani sorozat. Ennek konvergenciája elégséges feltétel.

Eredmény:

$k = \frac{1}{2}$.

Megjegyzés:

A sorozat tagjai közötti összefüggésekre mutat rá az A.22.4. feladat.

A29.4. $x + y + \frac{2}{x + y} + \frac{1}{2xy} \geq x + y + \frac{2}{x + y} + \frac{2}{(x + y)^2}$, s a = x + y helyettesítéssel $\frac{a^3 + 2a + 2}{a^2}$ minimumát keressük. Célt érhetünk pl. deriválás segítségével.

Eredmény:

A minimális érték x = y = 1 esetén $\frac{7}{2}$.

A29.5. Mutassuk meg, hogy az f(x) = $\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$ függvény páratlan.

Eredmény:

0.