Elemi algebra 1.

A1.1. Macedónia, 2002, 9. évf. I. ford.

Határozzuk meg $\frac{x+y}{x-y}$ értékét, ha x, y pozitív valós számok és $x^2 + y^2 = 6xy$.

A1.2. Horvátország, 2002, regionális verseny, 10. évf. 3/4.

Határozzuk meg azon a valós számokat, amelyekre az alábbi egyenlet minden megoldása valós szám:

$$\frac{a^2}{x(x+1)}+\frac{a^2}{(x+1)(x+2)}+\frac{a^2}{(x+2)(x+3)}+\frac{a^2}{(x+3)(x+4)}+\frac{a^2}{(x+4)(x+5)}=1.$$

A1.3. Görögország, Matematikai Olimpia, 2002. február (juniorok) 2/4.

A Hellén Matematikai Társaság matematikaversenyén résztvevő fiúkat és lányokat két csoportba osztották: kezdők (adott korosztályig) és haladók. A versenyen résztvevő fiúk aránya 55%, a kezdő fiúk és haladó fiúk számának aránya megegyezik az összes kezdő és haladó versenyző számának arányával. Határozzuk meg a kezdő fiúk és lányok számának arányát.

A1.4. Litvánia, 1997

Határozzuk meg az a, b valós számokat, ha $ae^x + b = e^{ax+b}$ minden x-re teljesül.

A1.5. Pán-Afrikai Matematikai Olimpia 2001, 2. nap (idő: 4.5 óra) 1/3.

Legyen $n \geq 1$ egész szám és $a > 0$ valós szám. Határozzuk meg a $\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2+(a-x_i)^2\right)=na^2$ egyenlet $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ megoldásainak számát, ha $x_i \in [0, a]$, minden $i = 1, 2, \dots, n$ esetén.

Elemi algebra 2.

A2.1. Ausztria, Matematikai Olimpia 2001. április, területi verseny 2/3.

Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok körében:

$(x + 1)^{2001} + (x + 1)^{2000}(x - 2) + (x + 1)^{1999}(x - 2)^2 + \dots + (x + 1)^2(x - 2)^{1999} + (x + 1)(x - 2)^{2000} + (x - 2)^{2001} = 0.$

A2.2. Macedónia, 2002, II. ford. 9. évf. 3/4.

Legyen x, y, z olyan valós szám, amelyre $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}=1$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}=0$.

A2.3. Horvátország, városi verseny, 2002, 10. évf. 2/4.

Oldjuk meg az $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}=\frac{1}{a+b+x}$ egyenletet, ha a, b nullától különböző valós számok.

A2.4. Spanyolország, Matematikai Olimpia 1999, 2. helyi forduló, 2. nap 3/3.

Legyenek a, b, c ≠ 0 valós számok (és a + b + c ≠ 0), amelyekre $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$.
Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\frac{1}{a^{1999}}+\frac{1}{b^{1999}}+\frac{1}{c^{1999}}=\frac{1}{a^{1999}+b^{1999}+c^{1999}}$.

A2.5. Albánia, Matematikai Olimpia, 2002. március, 11. évf. 1/5.

Határozzuk meg az alábbi összeg értékét, ha $f(x)=\frac{2^{\frac{1+x}{x}}-2^x}{3}$, $x \in R^*$:

$$f\left(\frac{1}{2002}\right)+f\left(\frac{2}{2002}\right)+\ldots+f\left(\frac{2001}{2002}\right)+f\left(\frac{2002}{2002}\right)+2f\left(\frac{2002}{2001}\right)+2f\left(\frac{2002}{2000}\right)+\ldots+2f\left(\frac{2002}{1}\right).$$

Egészrész, törtrész 1.

([x] és {x} az x egész részét, illetve törtrészét jelenti)

A3.1. Litvánia, 2001. október

Oldjuk meg az $x^3 = 4 + [x]$ egyenletet!

A3.2. Észtország, 2001. október, őszi nyílt verseny, juniorok, 3/5.

Határozzuk meg azon (x, y, z) valós számhármasokat, amelyek eleget tesznek az alábbi feltételeknek:

x + [y] + {z} = 200,2;
{x} + y + [z] = 200,1;
[x] + {y} + z = 200,0.

A3.3. Albánia, Matematikai Olimpia, 2002. március, 10. évf. 2/5.

a) Bizonyítsuk be, hogy ha $n = m^2 + m$, $m \in N$, akkor $\lfloor\sqrt{n}\rfloor = m$.
b) Határozzuk meg az összes n természetes számot, amelyre $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ osztja n-et.

A3.4. Belorusszia, 1997, válogatóverseny

Határozzuk meg az $\left\lfloor \frac{1}{1997} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{1997} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^2}{1997} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{2^{1995}}{1997} \right\rfloor$ összeget.

A3.5. (Arany Dániel-verseny a speciális matematika osztályok számára, haladók, második (döntő) forduló, 1979. május 3.)

Határozzuk meg a következő összeg értékét:

$$\left\{\frac{1979\cdot 1+16}{111}\right\} + \left\{\frac{1979\cdot 2+16}{111}\right\} + \ldots + \left\{\frac{1979\cdot 110+16}{111}\right\} + \left\{\frac{1979\cdot 111+16}{111}\right\}.$$

Egészrész, törtrész 2.

([x] és {x} az x egész részét, illetve törtrészét jelenti)

A4.1. Ausztria, Matematikai Olimpia, 2002. június, kezdők

Bizonyítsuk be, hogy az $x^{[x]} = \frac{9}{2}$ egyenletnek nincs pozitív racionális megoldása.

A4.2. Litvánia, 1997

Oldjuk meg a $\sqrt{\left[-7x^2+3x+4\right]}$ = [2 – sinx] egyenletet.

A4.3. Pán-Afrikai Matematikai Olimpia, 2001. július, 2. nap (idő: 4.5 óra) 2/3.

Számítsuk ki $\left\lfloor\sqrt{1}\right\rfloor + \left\lfloor\sqrt{2}\right\rfloor + \ldots + \left\lfloor\sqrt{2001}\right\rfloor$ értékét.

A4.4. Kanada, 1996, olimpiai előkészítő (levelező)

Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges nemnegatív egész n számra

$$\left[n^{\frac{1}{2}} + (n+1)^{\frac{1}{2}} + (n+2)^{\frac{1}{2}}\right] = \left[(9n+8)^{\frac{1}{2}}\right].$$

A4.5. Írország, Matematikai Olimpia, 2002. május, 2. forduló (idő: 3 óra) 4/5.

Ha $\alpha = 2 + \sqrt{3}$, bizonyítsuk be, hogy $\alpha^n - [\alpha^n] = 1 - \alpha^{-n}$, minden n = 0, 1, 2, … esetén.

Magasabbfokú egyenletek 1.

A5.1. Horvátország, 2002, országos verseny, 10. évf. 1/4.

Határozzuk meg az alábbi egyenlet összes valós megoldását:

$(x^2 + 3x - 4)^3 + (2x^2 - 5x + 3)^3 = (3x^2 - 2x - 1)^3$.

A5.2. Japán, 1990, IMO válogatóverseny, 1. forduló

Határozzuk meg az $x^2 + 25x + 52 = 3\sqrt{x^2 + 25x + 80}$ egyenlet valós gyökeinek szorzatát.

A5.3. Spanyolország, Matematikai Olimpia, 2002, 1. forduló 1/8.

Határozzuk meg az $x^3 + 2px^2 - px + 10 = 0$ egyenlet gyökeit, ha tudjuk, hogy számtani sorozatot alkotnak (p valós paraméter).

A5.4. Olaszország, Matematikai Olimpia, 2002. május, 4/6.

Határozzuk meg azon n értékeket, amelyekre az $x^3 - 3x + n = 0$ egyenlet gyökei egész számok!

A5.5. Brit Matematikai Olimpia, 1998

a) Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert, ha x, y, z pozitív számok:

$xy + yz + xz = 12,$
$xyz = 2 + x + y + z.$

b) Mutassuk meg, hogy van olyan megoldás is, ahol x, y, z különböző, nem szükségképpen pozitív számok.

Magasabbfokú egyenletek 2.

A6.1. Vietnám, Matematikai Olimpia, 2002. március, 1. nap 1/3.

Oldjuk meg az $\sqrt{4-3\sqrt{10-3x}} = x-2$ egyenletet.

A6.2. Bulgária, 2001. február

Határozzuk meg az a paraméter mindazon értékeit, amelyekre az $\log_x(x^2 + x + a)^2 = 4$ egyenletnek pontosan egy megoldása van.

A6.3. Horvátország, 2002, városi verseny, 11. évf. 4/4.

Határozzuk meg a derékszögű háromszög α és β szögét, ha $\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{tg}^2\beta + \mathrm{tg}^3\alpha + \mathrm{tg}^3\beta = 70$. (Elég tgα és tgβ értékét meghatározni.)

A6.4. Litvánia, 1997

Határozzuk meg az *a* paraméter értékét, ha az $x^8 + ax^4 + 1 = 0$ egyenlet négy gyöke számtani sorozatot alkot.

A6.5. Japán, Matematikai Olimpia, 1992, 1. forduló

Az xy-síkbeli E görbe egyenlete $y^2 = x^3 + 2691x - 8019$. A (3, 9) és (4, 53) pontokon átmenő egyenes egy további P pontban metszi a görbét. Határozzuk meg P x-koordinátáját.

Algebrai egyenletrendszerek 1.

A7.1. Ausztria, Matematikai Olimpia, 2002. április, selejtező verseny 2/4.

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a valós számok halmazán:

$$
\begin{aligned}
2x_1 &= x_5^2 - 23,\\
4x_2 &= x_1^2 + 7,\\
6x_3 &= x_2^2 + 14,\\
8x_4 &= x_3^2 + 23,\\
10x_5 &= x_4^2 + 34.
\end{aligned}
$$

A7.2. Görögország, 2001, IMO válogatóverseny 2/4.

Határozzuk meg az a paraméter lehetséges értékeit, ha az x, y, a valós számokra
$x + y = x^3 + y^3 = x^5 + y^5 = a$.

A7.3. Csehország és Szlovákia, Matematikai Olimpia, 2001. december, 1. forduló

Határozzuk meg a p valós paraméter értékét úgy, hogy az alábbi egyenletrendszernek pontosan egy megoldása legyen:

$x^2 + 1 = (p + 1)x + py - z,$
$y^2 + 1 = (p + 1)y + pz - x,$
$z^2 + 1 = (p + 1)z + px - y.$

A7.4. Horvátország, 2002, városi verseny, 10. évf. 3/4.

Bizonyítsuk be, hogy ha $ax^3 = by^3 = cz^3$ és $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$, akkor
$\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$.

A7.5. Irán, Matematikai Olimpia, 1995

Legyenek a, b, c pozitív valós számok, s határozzuk meg azon x, y, z valós számokat, amelyekre
$x + y + z = a + b + c,$
$4xyz - (a^2x + b^2y + c^2z) = abc.$

Algebrai egyenletrendszerek 2.

A8.1. Írország, Matematikai Olimpia, 1999, 2. nap (idő: 3 óra) 1/5.

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:
$y^2 = (x + 8)(x^2 + 2)$,
$y^2 – (8 + 4x)y + (16 + 16x – 5x^2) = 0$.

A8.2. Horvátország, 2002, városi verseny, 4. évf. 3/4.

Határozzuk meg az alábbi egyenletrendszer valós megoldásait:

$x_1 + x_2 + \dots + x_{2002} = 2002$,
$x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_{2002}^4 = x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_{2002}^3$.

A8.3. Görögország, 2002. április (junior válogatóverseny, döntő) 1/4.

Határozzuk meg az a paraméter lehetséges értékeit, ha az *x*, *y*, *a* valós számokra
$x + y = x^2 + y^2 = x^3 + y^3 = a$.

A8.4. Albánia, Matematikai Olimpia, 2002. március, 9. évf. 1/5.

Az a és b valós számok kielégítik az alábbi egyenleteket:

$a^3 – 3ab^2 = \sqrt{402}$,
$b^3 – 3a^2b = 40$.

Határozzuk meg $a^2 + b^2$ értékét.

A8.5. Belorusszia, Minszk, 1995, 11. o.

Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletrendszert:

$\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2} = 5$,
$3x^2 + 4xy = 24$.

Algebrai egyenlőtlenségek 1.

A9.1. Litvánia, 2001. október

Határozzuk meg az $5(a^2 + b^2 + 2c^2) – 2(2ab + 6ac + bc – 2a + 3c)$ kifejezés minimumát, ha a, b, c valós számok.

A9.2. Észtország, tavaszi nyílt verseny, 2002. február, szeniorok, 2/5.

Legyenek a, b valós számok, $|a| \neq |b|$. Bizonyítsuk be, hogy $\left|\frac{a+b}{a-b}\right|^{ab} \geq 1$.

A9.3. Albánia, Matematikai Olimpia, 2002. március, 10. évf. 1/5.

Az x, y, z, t pozitív számokra x + y + z + t = 1.

a) Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\frac{x^2}{x+y}+\frac{y^2}{y+z}+\frac{z^2}{z+t}+\frac{t^2}{t+x}\geq\frac{1}{2}$.

b) Mikor áll fenn egyenlőség?

A9.4. Brazília, Matematikai Olimpia, 2001, 1. nap 1/3.

Bizonyítsuk be, hogy a pozitív valós a, b, c számokra $(a + b)(a + c) \geq 2\sqrt{abc(a+b+c)}$.

A9.5. Ausztrália, Matematikai Olimpia, 1986, 6. feladat

Adottak az a, b, a_2, a_3, … , a_{n-2} valós számok, $ab \neq 0$. Az

$$ax^n - ax^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-2}x^2 - n^2bx + b = 0$$

egyenlet minden gyöke pozitív szám. Bizonyítsuk be, hogy a gyökök egyenlők.

Algebrai egyenlőtlenségek 2.

A10.1. Horvátország, 2002, városi verseny, 9. évf. 4/4.

Legyen *a* olyan valós szám, amelyre $a^5 - a^3 + a = 2$. Bizonyítsuk be, hogy $3 < a^6 < 4$,

A10.2. Görögország, Matematikai Olimpia, 2002. február, 1/4.

Az a, b, c valós számokra $bc \neq 0$ és $\frac{1-c^2}{bc}\geq 0$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $10(a^2 + b^2 + c^2 - bc^3) \geq 2ab + 5ac$.

A10.3. Litvánia, 1997

Az a, b és c pozitív számokra $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{7}{4}$. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}<\frac{1}{abc}$.

A10.4. Új-Zéland, 1990

Bizonyítsuk be, hogy a pozitív a, b, c számokra ha $a \geq b \geq c$ és $a + b + c \leq 1$, akkor $a^2 + 3b^2 + 5c^2 \leq 1$.

A10.5. Ázsiai Matematikai Olimpia, 2000. március, 4/5.

Legyenek n és k adott pozitív egész számok, n > k. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}}<\frac{n!}{k!(n-k)!}<\frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}}.$$

Algebrai egyenlőtlenségek 3.

A11.1. Írország, Matematikai Olimpia, 1999, 1. nap (idő: 3 óra) 1/5.

Határozzuk meg az x valós számokat, ha $\frac{x^2}{\left(x+1-\sqrt{x+1}\right)^2}<\frac{x^2+3x+18}{(x+1)^2}$.

A11.2. Kanada, 2001. február, Manitoba verseny

Bizonyítsuk be, hogy ha x, y, z pozitív valós számok, akkor $(x + y - z)(x - y)^2 + z(x - z)(y - z) \geq 0$.

A11.3. Ukrajna, Matematikai Olimpia, 1998. április, 11. évf.

Bizonyítsuk be, hogy ha $x, y, z \in (0; 1]$, akkor $\frac{x}{1+y+zx}+\frac{y}{1+z+xy}+\frac{z}{1+x+yz}\leq\frac{3}{x+y+z}$.

A11.4. Litvánia, 2001. október

Tegyük fel, hogy az f valós-valós függvényre $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$. Következik-e ebből, hogy $f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}$?

A11.5. Görögország, 2001, IMO válogatóverseny 4/4.

Bizonyítsuk be, hogy ha az a, b, c nem-negatív valós számokra $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, akkor $\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\geq\frac{3}{4}\left(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}\right)^2$. Mikor áll fenn egyenlőség?

Algebrai egyenlőtlenségek 4.

A12.1. Litvánia, 1997

Határozzuk meg $5|x| - 3|y|$ minimumát, ha x és y egész számok és $4x + 5y = 7$.

A12.2. Írország, Matematikai Olimpia, 1998, 1. nap (idő: 3 óra) 1/5.

Mutassuk meg, hogy ha $x \neq 0$ valós szám, akkor $x^8-x^5-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}\geq 0$

A12.3. Macedónia, 2002, 2. forduló 10. évf. 1/4.

A $p(t) = at^2 + bt + c$ polinom együtthatói nemnegatív valós számok. Bizonyítsuk be, hogy $(p(xy))^2 \le p(x^2)p(y^2)$.

A12.4. Balkán Matematikai Olimpia, 2002, juniorok, 4/4.

Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a, b, c pozitív valós számokra
$\frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{c(b+c)} + \frac{1}{a(a+c)} \ge \frac{27}{2(a+b+c)^2}$.

A12.5. Vietnám, Matematikai Olimpia, 2002. március, 2. nap 1/3.

Az a, b, c olyan valós számok, amelyekre a $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ polinomnak három valós (nem szükségképpen különböző) gyöke van. Bizonyítsuk be, hogy
$12ab + 27c \le 6a^3 + 10\left(a^2 - 2b\right)^{\frac{3}{2}}$. Mikor teljesül az egyenlőség?

Algebrai egyenlőtlenségek 5.

A13.1. Dél-Afrika, Potchefstroom-verseny, 2001. július, 2. verseny (idő: 4.5 óra) 1/4.

Az $x \ge 0$, $y \ge 0$ valós számokra $x + y = 2$. Bizonyítsuk be, hogy $x^2y^2(x^2 + y^2) \le 2$.

A13.2. Litvánia, Matematikai Olimpia, 1998

Az a, b, c, d különböző valós számokra $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} = 4$ és $ac = bd$. Legfeljebb mekkora értéket vehet fel $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} + \frac{c}{a} + \frac{d}{b}$?

A13.3. Japán, 1990, IMO válogatóverseny, 2. forduló

Legyen $n > 2$ egész szám. Határozzuk meg K maximumát és G minimumát, ha bármely a_1, a_2, … , a_n pozitív valós számokra $K < \frac{a_1}{a_1 + a_2} + \frac{a_2}{a_2 + a_3} + ... + \frac{a_n}{a_n + a_1} < G$.

A13.4. Írország, Matematikai Olimpia, 1999, 2. nap, (Idő: 3 óra) 3/5.

Az a, b, c, d pozitív számok összege 1. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a} \ge \frac{1}{2}$, s az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a = b = c = d = \frac{1}{4}$.

A13.5. Ázsiai Matematikai Olimpia, 1996

Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \le \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$, ha a, b, c egy háromszög oldalai.

Hatványközepek 1.

A14.1. Görögország, Matematikai Olimpia, 2002. február, juniorok, 4/4.

Bizonyítsuk be, hogy $1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 2002<\left(\frac{2003}{2}\right)^{2002}$.

A14.2. Brit Matematikai Olimpia, 2000, 2. forduló

x, y, z pozitív valós számok, xyz = 32. Határozzuk meg $x^2 + 4xy + 4y^2 + 2z^2$ minimumát!

A14.3. Horvátország, 2002, országos verseny, 9. évf. 2/4.

Bizonyítsuk be, hogy minden a, b, c > 0 és p ≥ 0 valós számra teljesül az
$a^{p+2} + b^{p+2} + c^{p+2} \ge a^p bc + b^p ca + c^p ab$ egyenlőtlenség.

A14.4. Albánia, Matematikai Olimpia, 2002. március, 12. évf. 3/5.

Bizonyítsuk be, hogy az a, b, c pozitív számokra
$(a+b+c)+\sqrt{a^2+b^2+c^2}\le\frac{\sqrt{3}+1}{3\sqrt{3}}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)$.
Mikor áll fenn egyenlőség?

A14.5. Észtország, 1998, selejtező verseny

Legyenek $x_1, x_2, \dots, x_n$ és $y_1, y_2, \dots, y_n$ olyan valós számok, amelyekre $x_1 \ge x_2 \ge \dots \ge x_n > 0$ és $y_1 \ge x_1$, $y_1y_2 \ge x_1x_2$, …, $y_1y_2\dots y_n \ge x_1x_2\dots x_n$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $y_1 + y_2 + \dots + y_n \ge x_1 + x_2 + \dots + x_n$.

Hatványközepek 2.

A15.1. Albánia, Matematikai Olimpia, 2002. március, 9. évf. 5/5.

a, b, c nemnegatív számok, melyekre a + b + c = 1. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $7(ab + bc + ac) \le 2 + 9abc$. Mikor áll fenn egyenlőség?

A15.2. Horvátország, 2002, országos verseny, 10. évf. 2/4.

Bizonyítsuk be, hogy ha a, b, c 1-nél nagyobb valós számok, akkor

$$\log_a\left(\frac{b^2}{ac}-b+ac\right)\cdot\log_b\left(\frac{c^2}{ab}-c+ab\right)\cdot\log_c\left(\frac{a^2}{bc}-a+bc\right)\ge 1.$$

A15.3. Görögország, Matematikai Olimpia, 2000, 3/4.

Határozzuk meg azt a legnagyobb k számot, amelyre $\frac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2)(3x^2+y^2)}} \le \frac{1}{k}$ teljesül minden pozitív x, y számra.

A15.4. Ausztria, Matematikai Olimpia, 2001. május, országos verseny, 1. nap 2/3.

Határozzuk meg az összes olyan (x, y, z) pozitív számokból álló számhármast, amelyek kielégítik az alábbi egyenleteket:
$x + y + z = 6$ és $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = 2-\frac{4}{xyz}$.

A15.5. Írország, Matematikai Olimpia, 2002. május, 1. forduló (Idő: 3 óra) 4/5.

Bizonyítsuk be, hogy ha $0 < a, b, c < 1$, akkor $\frac{a}{1-a}+\frac{b}{1-b}+\frac{c}{1-c} \ge \frac{3\sqrt[3]{abc}}{1-\sqrt[3]{abc}}$. Mikor áll fenn egyenlőség?

Hatványközepek 3.

A16.1. Japán, Matematikai Olimpia, 1998, 1. forduló

Határozzuk meg az $\frac{x^3y^2z}{x^6+y^6+z^6}$ kifejezés maximumát, ha x, y, z pozitív számok.

A16.2. Írország, Matematikai Olimpia, 1998, 2. nap (Idő: 3 óra) 2/5.

Bizonyítsuk be, hogy ha a, b, c pozitív számok, akkor
a) $\frac{9}{a+b+c} \le 2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\right)$;
b) $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$.

A16.3. Ausztria, Matematikai Olimpia, 2002. április, selejtező, 4/4.

Tekintsük az $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{2002}$ valós számokat.

a) Bizonyítsuk be, hogy az $a_k(1 - a_{2002-k})$, $0 \le k \le 2002$ számok legkisebbike nem nagyobb, mint $\frac{1}{4}$.
b) Kaphatunk-e egyenlőséget az előző esetben, ha $0 \le k \le 2002$?
c) Bizonyítsuk be, hogy az a) állítás akkor is igaz, ha az $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{2002}$ számok mind pozitívak.

A16.4. Albánia, Matematikai Olimpia, 2002. március, 11. évf. 5/5.

Bizonyítsuk be, hogy ha a, b pozitív számok, melyekre $a < b$ és $a^2 + b^2 = 1$, akkor

a) $\left(a^2\right)^{\frac{a}{b}} < 1 - ab$;
b) $a^a < b^b$.

A16.5. Kanada, 1996, olimpiai előkészítő (levelező)

Bizonyítsuk be, hogy ha $x_1, x_2, \dots, x_n$ pozitív valós számok, akkor

$$\frac{x_1^2}{x_1 + x_2} + \frac{x_2^2}{x_2 + x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}^2}{x_{n-11} + x_n} + \frac{x_n^2}{x_n + x_1} \geq \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + \dots + x_n).$$

Hatványközepek 4.

A17.1. Ausztria, Matematikai Olimpia, 2002. május, döntő, 1. nap 2/4.

Határozzuk meg a legnagyobb C valós számot, amelyre ha $xy = 2$, akkor minden valós x, y számra ($x \neq y$) $\frac{((x+y)^2 - 6)((x-y)^2 + 8)}{(x-y)^2} \geq C$. Milyen (x, y) értékekre lép fel egyenlőség?

A17.2. Japán, 1990, NMO válogatóverseny

Az x, y, z pozitív valós számokra $x + y + z = 1$. Határozzuk meg $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z}$ minimumát.

A17.3. Kanada, 1996, nyílt verseny

16 pozitív szám összege 100, négyzetösszege 1000. Bizonyítsuk be, hogy egyik szám sem nagyobb, mint 25.

A17.4. Ukrajna, Matematikai Olimpia, 1998. április, 9. évf.

Bizonyítsuk be, hogy ha az a, b, c pozitív valós számokra $abc = 1$, akkor

$$\frac{1+ab}{1+a} + \frac{1+bc}{1+b} + \frac{1+ac}{1+c} \geq 3.$$

A17.5. Törökország, Matematikai Olimpia, 1998. december, 1. nap (Idő: 4.5 óra) 2/3.

Bizonyítsuk be, hogy $(a + 3b)(b + 4c)(c + 2a) \geq 60abc$ minden $0 \leq a \leq b \leq c$ valós számra.

Számtani sorozatok

A18.1. Spanyolország, Matematikai Olimpia, 1999, 1. helyi forduló, 1. nap 1/3.

Határozzuk meg a kezdőtagját annak a számtani sorozatnak, amelyre az alábbiak teljesülnek:

1) A sorozat minden tagja pozitív.
2) A differencia 0 és 1 közé esik.

3) Az első 1999 tag összege 2000.

A18.2. Oroszország, Matematikai Olimpia, 2002, 4. (körzeti) forduló, 10. évf. 1/8.

Legfeljebb hány pozitív egész számból állhat az $a_1, a_2, \dots, a_n$ számtani sorozat, ha differenciája 2, és minden k = 1, 2, … , n-re $a_k^2 + 1$ prímszám?

A18.3. Macedónia, 2002, 1. forduló 12. évf.

Az $a_1, a_2, \dots, a_n$ számok számtani sorozatot alkotnak. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{a_1 a_n} + \frac{1}{a_2 a_{n-1}} + \dots + \frac{1}{a_n a_1} = \frac{2}{a_1 + a_n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right).$$

A18.4. Észtország, 2001. október, őszi nyílt verseny, szeniorok, 2/5.

Egy háromszög oldalainak hosszai és beírt körének átmérője – ebben a sorrendben – számtani sorozatot alkot. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög derékszögű.

A18.5. Új-Zéland, 1991

Mutassuk meg, hogy az 1, 14, 27, 40, … számtani sorozatban végtelen sok 222…2 alakú természetes szám van.

Sorozatok

A19.1. Új-Zéland, Matematikai Olimpia, 1998, 1. kategória 2/5.

Egy sorozat első tagja 7. Ezután minden lépésben kiszámoljuk az előző tag négyzetét, majd az így kapott szám számjegyeinek összegét 1-gyel megnövelve kapjuk az új tagot. Pl.: $7^2 = 49$, 4 + 9 + 1 = 14 a második tag; $14^2 = 196$, 1 + 9 + 6 + 1 = 17 a következő stb. Mi lesz a sorozat 1999. tagja?

A19.2. Brazília, Matematikai Olimpia, 2001, 2. ford. 12. évf. 6/6.

Legyen $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$. Határozzuk meg az

$$f\left(\frac{1}{1}\right)+f\left(\frac{2}{1}\right)+f\left(\frac{3}{1}\right)+\ldots+f\left(\frac{n}{1}\right)+$$
$$+f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{2}{2}\right)+f\left(\frac{3}{2}\right)+\ldots+f\left(\frac{n}{2}\right)+$$
$$+f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)+f\left(\frac{3}{3}\right)+\ldots+f\left(\frac{n}{3}\right)+$$
$$+\ldots+$$
$$+f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{3}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{n}{n}\right)$$

összeget, ha n pozitív egész szám.

A19.3. Japán, Matematikai Olimpia, 1998, 1. ford.

Kiválasztunk 10 (egyforma) követ, melyek mindegyike fehér vagy fekete, és sorba rendezzük őket úgy, hogy két fekete nem kerül egymás mellé. (Mindkét színű kőből elegendő mennyiségű áll rendelkezésünkre.) Hányféle sorrend készíthető?

A19.4. Horvátország, 2002, országos verseny, 12. évf. 4/4.

Legyen (a_n), $n \in N$ pozitív egész számok egy növekvő sorozata. Azt mondjuk, hogy a sorozat a_k tagja „jó", ha felírható a sorozat néhány másik (nem szükségképpen különböző) tagjának összegeként. Bizonyítsuk be, hogy véges sok kivétellel a sorozat minden tagja „jó".

A19.5. Ázsiai Matematikai Olimpia, 2000. március, 1/5.

Határozzuk meg az $S=\sum_{i=0}^{101}\frac{x_i^3}{1-3x_i+3x_i^2}$ összeget, ahol $x_i=\frac{i}{101}$.

Rekurziók 1.

A20.1. Észtország, tavaszi nyílt verseny, 2002. február, juniorok, 4/5.

Az $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ sorozatra $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_n = 5a_{n-1} - a_{n-2}$, ha $n > 2$. Mely n értékekre osztható a_n a) 5-tel, b) 15-tel?

A20.2. Brit Matematikai Olimpia, 2000, 2. ford.

Az (a_n) sorozatot $a_0 = 1$, $a_n = kn + (-1)^n a_{n-1}$, $n \geq 1$ módon definiáljuk, ahol k, n pozitív egész. Határozzuk meg k azon értékeit, amelyekre 2000 tagja a sorozatnak.

A20.3. Kanada, 1996, olimpiai előkészítő (levelező)

Az $\{u_n\}$ sorozatot $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_n = 1995u_{n-1} - u_{n-2}$ $(n \geq 2)$ rekurzióval definiáljuk. Határozzuk meg azon $n > 1$ értékeket, amelyekre u_n prím.

A20.4. Írország, Matematikai Olimpia, 2002. május, 1. forduló (Idő : 3 óra) 4/5.

Az $a_1, a_2, a_3, \dots$ sorozatot $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1$, $a_{n+1}a_{n-2} - a_na_{n-1} = 2$ módon definiáljuk. Bizonyítsuk be, hogy a_n pozitív egész szám, ha $n \geq 1$.

A20.5. Balkán Matematikai Olimpia, 2002. április, 2/4.

Az $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ sorozat rekurzív alakja $a_1 = 20$, $a_2 = 30$, $a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n$, ha $n > 1$. Határozzuk meg azon pozitív egész n értékeket, amelyekre $1 + 5a_na_{n+1}$ négyzetszám.

Rekurziók 2.

A21.1. Írország, Matematikai Olimpia, 1998, 2. nap (Idő : 3 óra) 4/5.

Az x_n számsorozatra x_0, x_1 tetszőleges pozitív valós számok, $x_{n+2} = \dfrac{1+x_{n+1}}{x_n}$, ha $n = 0, 1, 2, \dots$ Határozzuk meg x_{1998} értékét.

A21.2. Japán, 1990, NMO válogatóverseny, 1. ford.

Az $\{a_n\}$ sorozatra $a_1 = 1$ és $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n}$, ha $n \geq 1$. Határozzuk meg $[a_{100}]$ értékét.

A21.3. Brit Matematikai Olimpia, 1998, 1. ford. 4/5.

Mutassuk meg, hogy az egész számok halmazán csak egyetlen sorozat van, amely kielégíti a következő feltételeket: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_4 = 12$ és $a_{n+1}a_{n-1} = a_n^2 \pm 1$, ha $n = 2, 3, 4, \dots$

A21.4. Észtország, 1998, selejtező

Legyen k adott pozitív egész szám, s definiáljuk az (E_n) sorozatot a következőképpen: $E_1 = k + 1$, $E_{n+1} = E_n^2 - kE_n + k$ $(n \geq 1)$. Bizonyítsuk be, hogy (E_n) elemei páronként relatív prímek.

A21.5. Kanada, 1996, olimpiai előkészítő (levelező)

Legyen n pozitív egész szám. Bizonyítsuk be, hogy van olyan k pozitív egész szám, amelyre $\left(\sqrt{2}-1\right)^n = \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$.

Rekurziók 3.

A22.1. Japán, Matematikai Olimpia, 1992, 1. ford.

Mennyi az $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ és $a_{n+2} = a_n + (a_{n+1})^2$ módon definiált $\{a_n\}$ sorozat a_{1991} tagjának 7-tel vett osztási maradéka?

A22.2. Belorusszia, 1995, 11. évf.

Az a_n sorozatra $a_0 = a_1 = 1$ és $a_{n+2} = (n + 3)a_{n+1} – (n + 1)a_n$, ha $n \geq 0$. Határozzuk meg a_{1995} értékét.

A22.3. Németország, 1999, országos verseny, 1. ford.

Az $a_1, a_2, a_3, \ldots$ és $b_1, b_2, b_3, \ldots$ sorozatokat $a_1 = b_1 = 1$ és $a_{n+1} = a_n + b_n$, $b_{n+1} = a_n \cdot b_n$ módon definiáljuk, ha $n = 1, 2, 3, \ldots$ Bizonyítsuk be, hogy az a_n sorozat bármely két eleme relatív prím.

A22.4. Bulgária, 2001. február

Az $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sorozatot a következő módon definiáljuk: $a_1 = k$, $a_2 = 5k – 2$ és $a_{n+2} = 3a_{n+1} – 2a_n$, $n \geq 1$, ahol k valós szám. Bizonyítsuk be, hogy ha k = 1, akkor $a_{n+2} = \left[\dfrac{7a_{n+1}^2 - 8a_n a_{n+1}}{1 + a_n + a_{n+1}}\right]$, ha $n \geq 1$. ([x] az x egész részét jelöli.)

A22.5. Brit Matematikai Olimpia, 2002. február, 2. ford. (Idő : 3.5 óra) 3/4.

Bizonyítsuk be, hogy az $y_0 = 1$, $y_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(3y_n + \sqrt{5y_n^2 - 4}\right)$, $(n \geq 0)$ sorozat minden tagja egész szám.

Polinomok

A23.1. Macedónia, 2002, 1. ford. 12. évf.

Alakítsuk szorzattá a $P(x) = x^4 + x^3 – 8x^2 + 3x + 5$ polinomot!

A23.2. Litvánia, 2001. október

Határozzuk meg az összes p(x) polinomot, amelyre $p(3x)p(– 3x) = 81(x^2 – 1)^2$ minden valós x-re teljesül.

A23.3. Cseh és szlovák, 2001. október

Határozzuk meg a valós együtthatós P(x) polinomot, ha minden valós x-re

$(x + 1)P(x – 1) + (x – 1)P(x + 1) = 2xP(x)$.

A23.4. Szlovénia, Matematikai Olimpia, 1998, döntő, 11. évf. 2/4.

Határozzuk meg azon p(x) valós együtthatós polinomokat, amelyekre igaz, hogy minden valós x-re $(x – 8)p(2x) = 8(x – 1)p(x)$.

A23.5. Kanada, 1996, olimpiai előkészítő (levelező)

Legyen p páratlan prím és $(1 + x)^{p-2} = 1 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{p-2}x^{p-2}$. Mutassuk meg, hogy az $a_1 + 2$, $a_2 - 3$, $a_3 + 4$, …, $a_{p-3} - (p - 2)$, $a_{p-2} + (p - 1)$ számok p többszörösei.

Racionális számok

A24.1. Albánia, Matematikai Olimpia, 2002. március, 10. évf. 4/5.

a) Bizonyítsuk be, hogy $\log_{\sqrt{2}} 3$ irracionális szám.

b) Vannak-e olyan x, y irracionális számok, amelyekre x^y racionális szám?

A24.2. Szlovénia, Matematikai Olimpia, 1998, 1. forduló, 12. évf. 2/4.

Legyen a_1 tetszőleges számjegy ($a_1 \in \{0, 1, \ldots, 9\}$). Ezután minden $n \in N$ esetén a_{n+1} jelentse a $19a_n + 98$ szám tízes számrendszerbeli alakjában az utolsó számjegyet. Bizonyítsuk be, hogy $0,a_1a_2a_3\ldots$ racionális szám.

A24.3. Észtország, 1998, döntő

Legyen a olyan valós szám, amelyre $\frac{1}{a} = a - [a]$, ahol [a] az a szám egészrészét jelenti. Bizonyítsuk be, hogy a nem racionális szám.

A24.4. Ausztria, Matematikai Olimpia, 2001. május, országos verseny, 2. nap 2/3.

Határozzuk meg az összes olyan m egész számot, amelyre a $3x^3 - 3x^2 + m = 0$ egyenlet gyökei racionális számok.

A24.5. Litvánia, 2001. október

Bizonyítsuk be, hogy az origó középpontú egységsugarú kör kerületén végtelen sok olyan pont van, amelynek mindkét koordinátája racionális szám.

Algebrai trigonometria

A25.1. Macedónia, 2002, 1. ford. 11. évf.

Határozzuk meg az alábbi kifejezés értékét:

$$\frac{\sin 3x}{\sin x}+\frac{\sin 6x}{\sin 2x}+\ldots+\frac{\sin 3nx}{\sin nx}-\frac{\cos 3x}{\cos x}-\frac{\cos 6x}{\cos 2x}-\ldots-\frac{\cos 3nx}{\cos nx}.$$

A25.2. Litvánia, 1997

Bizonyítsuk be, hogy minden valós x-re és pozitív egész n számra $|\cos x| + |\cos 2x| + |\cos 4x| + \ldots + |\cos 2^n x| > \frac{n}{3}$.

A25.3. Cseh és szlovák Matematikai Olimpia, 2002. január, 2. ford.

Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\alpha, \beta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ esetén $\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\cos\beta} \geq 2\sqrt{\tan\alpha + \tan\beta}$.
Mikor áll fenn egyenlőség?

A25.4. Albánia, Matematikai Olimpia, 2002. március, 10. évf. 5/5.

Bizonyítsuk be, hogy bármely háromszögben teljesül az alábbi egyenlőség és egyenlőtlenség (s a háromszög félkerülete, r és R a beírt, ill. körülírt kör sugara):

a) $a\cos^2\frac{\alpha}{2} + b\cos^2\frac{\beta}{2} + c\cos^2\frac{\gamma}{2} = s\left(1 + \frac{r}{R}\right)$;

b) $\sqrt{a}\cos\frac{\alpha}{2} + \sqrt{b}\cos\frac{\beta}{2} + \sqrt{c}\cos\frac{\gamma}{2} \leq \sqrt{3s\left(1 + \frac{r}{R}\right)}$.

A25.5. Észtország, 2002, NMO válogatóverseny, 2. nap 2/3.

Legyen $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ és $x_1, x_2, \dots, x_n$ olyan valós számok, melyekre $\sin x_1 + \sin x_2 + \dots + \sin x_n \geq n\cdot\sin\alpha$. Bizonyítsuk be, hogy $\sin(x_1 - \alpha) + \sin(x_2 - \alpha) + \dots + \sin(x_n - \alpha) \geq 0$.

Függvények, függvényegyenletek 1.

A26.1. Albánia, Matematikai Olimpia, 2002. március, 11. évf. 1/5.

Határozzuk meg az f: R^* **a** R függvényt, ha $f(x) - 3f\left(\frac{1}{x}\right) = 3^x, \quad \forall x \in R^*$.

A26.2. Észtország, Matematikai Olimpia, 1999, döntő, 11. évf. 2/5.

Határozzuk meg az $f\left(\frac{1}{2000}\right) + f\left(\frac{2}{2000}\right) + \dots + f\left(\frac{1999}{2000}\right) + f\left(\frac{2000}{2000}\right) + f\left(\frac{2000}{1999}\right) + \dots + f\left(\frac{2000}{1}\right)$ kifejezés értékét, ha $f(x) = \frac{x^2}{1 + x^2}$.

A26.3. Dél-Afrika, Rhodes-verseny, 2001. április, 1. forduló (Idő : 4.5 óra) 1/3.

Az $f: Z^+ \to Z^+$ függvényre teljesül, hogy $f(1) = 1$, $f(2n) = f(n)$ és $f(2n + 1) = f(2n) + 1$ minden pozitív egész n számra.
a) Határozzuk meg f(n) maximumát, ha $n \in N$, $1 \leq n \leq 2001$!
b) Határozzuk meg azon $n \in N$, $1 \leq n \leq 2001$ értékeket, amelyekre f(n) felveszi a maximumát!

A26.4. Thaiföld, Matematikai Olimpia, 2001

A természetes számok halmazán értelmezett f(x) függvényre f(0) = f(1) = 1 és $f(n)=\frac{-f(n-2)}{n}$, ha n ≥ 2. Bizonyítsuk be, hogy minden n-re $f(2n)=\frac{(-1)^n}{2^n n!}$ és $f(2n+1)=\frac{(-1)^n 2^n n!}{(2n+1)!}$.

A26.5. Brazília, Matematikai Olimpia, 2001, 2. forduló, 12. évf. 3/6.

Határozzuk meg az f: R → R függvényt, ha f(x) = f(– x) és f(x + y) = f(x) + f(y) + 8xy + 115 minden valós x, y-ra.

Függvények, függvényegyenletek 2.

A27.1. Brazília, Matematikai Olimpia, 2001, 1. forduló, 12. évf.

Tekintsük az $f(x) = x^2 - 3x + 4$ függvényt. Hány megoldása van az f(f(…(f(x)))) = 2 egyenletnek, ahol az f függvényt 2001-szer alkalmazzuk?

A27.2. Szlovénia, Matematikai Olimpia, 1998, döntő, 12. évf. 2/4.

Határozzuk meg azon f: R → R függvényeket, amelyekre $f(x) + xf(1 - x) = x^2 + 1$ minden x ∈ R esetén.

A27.3. Thaiföld, Matematikai Olimpia, 2001

Legyen az $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2$ függvényre $f[x(x + 1)] - f[x(x - 1)] = x^7$ (a, b, c valós számok). Határozzuk meg f(x) segítségével a p(n) polinomot, ha $1^7 + 2^7 + 3^7 + \ldots + n^7 = \frac{n^2}{24}(n+1)^2 p(n)$, ahol p(n) csak n-től függ.

A27.4. Észtország, 1996

Határozzuk meg azon f: R → R függvényeket, amelyek minden x valós számra eleget tesznek az alábbi feltételeknek:
a) f(x) = – f(– x);
b) f(x + 1) = f(x) + 1;
c) $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}f(x)$, if x ≠ 0.

A27.5. Belorusszia, 1997, válogatóverseny

Határozzuk meg az összes f(x) függvényt, amelyre f: R → R, f(x + y) + f(x)f(y) = f(xy) + f(x) + f(y) teljesül.

Függvények, függvényegyenletek 3.

A28.1. Litvánia, 1997

Periodikus az $f(x) = \sin x + \cos(x^2)$ függvény?

A28.2. Irán, Matematikai Olimpia, 1995

Van-e olyan $f: R \to R$ függvény, amely eleget tesz az alábbi feltételeknek:
a) $f(1) = 1$,
b) van olyan $M > 0$ valós szám, amelyre $-M < f(x) < M$,
c) ha $x \neq 0$, akkor $f\left(x + \frac{1}{x^2}\right) = f(x) + \left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2$?

A28.3. Írország, Matematikai Olimpia, 1999, 2. nap (Idő : 3 óra) 2/5.

Az $f: N \to N$ függvényre (ahol N a pozitív egész számok halmaza) teljesül, hogy
a) $f(ab) = f(a)f(b)$, ha a és b relatív prímek;
b) $f(p + q) = f(p) + f(q)$, ha p és q prímek.
Bizonyítsuk be, hogy $f(2) = 2$, $f(3) = 3$ és $f(1999) = 1999$.

A28.4. Japán, Matematikai Olimpia, 2002, 1. forduló

A racionális számok halmazát jelöljük Q-val. Tekintsük azokat az $f: Q \to Q$ függvényeket, amelyek eleget tesznek az alábbi feltételeknek:

1) $f(0) = 2$, $f(1) = 3$;
2) $f(x + n) - f(x) = n(f(x + 1) - f(x))$, minden racionális x-re és egész n-re;
3) minden nemzérus racionális x-re $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

Határozzuk meg az $f(x) = 2002$ egyenletnek eleget tevő racionális számokat.

A28.5. Románia, 1997, NMO válogatóverseny

Határozzuk meg azon $f: R \to [0, \infty)$ függvényeket, amelyekre minden valós x, y esetén $f(x^2 + y^2) = f(x^2 - y^2) + f(2xy)$.

Analízis

A29.1. Horvátország, 2002, országos verseny, 12. évf. 1/4.

Határozzuk meg az $s = 1 + 4x + 9x^2 + \ldots + n^2x^{n-1} + \ldots$ összeg értékét, ha $|x| < 1$.

A29.2. Új-Zéland, 1992

Az u_n és v_n sorozatokat $n = 1, 2, \ldots$ esetén $u_1 = 0$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n)$; $v_1 = 1$, $v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n)$ módon definiáljuk.

a) Határozzuk meg a sorozatok első négy tagját.

b) Mutassuk meg, hogy u_n $\frac{2}{3}$-hoz tart, ha n közelít a végtelenhez.

c) Mennyi v_n határértéke?

A29.3. Bulgária, 2001. február

Az $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sorozatot a következő módon definiáljuk: $a_1 = k$, $a_2 = 5k - 2$ és $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$, $n \geq 1$, ahol k valós szám.
Határozuk meg azon k értékeket, amelyekre az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat konvergens.

A29.4. Japán, Matematikai Olimpia, 2002, 1. forduló

Határozzuk meg az alábbi kifejezés minimumát: $x + y + \frac{2}{x+y} + \frac{1}{2xy} \quad (x, y > 0)$.

A29.5. Észtország, Matematikai Olimpia, 1999, döntő, 12. évf. 2/5.

Határozzuk meg $\int_{-1}^{1} \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) dx$ értékét.