Átvételi vizsga, MEGOLDÁSOK 2023. január
speciális matematika tagozat

Számológép nem használható. Munkaidő 120 perc.

1. feladat Négy ember vezetékneve Kanász, Halász, Vadász és Madarász. Az egyikük foglalkozása kanász, a másiké halász, a harmadiké vadász, a negyediké pedig madarász. Tudjuk, hogy a Kanász nem halász, a Halász nem vadász, a Vadász nem madarász, a Madarász nem kanász és nem halász, valamint egyikük foglalkozása sem egyezik meg vezetéknevével. Mi a foglalkozása a Vadász vezetéknevű embernek? (6 pont)

Megoldás: A feladat szövege alapján Madarász csak vadász lehet. Ekkor Kanász se nem halász, se nem vadász, tehát madarász. Így Halász se nem vadász, se nem madarász, azaz kanász. Ebből megkaptuk, hogy Vadász foglalkozása halász.

2. feladat Egy dobókockán a 2, 3, és 5 számok szerepelnek, mindegyik éppen kétszer. Anna háromszor gurít, a kapott számok szorzatát jelölje A. Ugyanezt teszi Botond is, az ő számát jelölje B. Tudjuk, hogy A ötre végződik, $A + B$ páratlan, továbbá A és B legnagyobb közös osztója a 3. Mi lehet A és B? (8 pont)

Megoldás: A legnagyobb közös osztó miatt mindkét számban szerepel a 3-as prímtényező. Mivel A 5-re végződik, ezért 5-tel osztható, azaz van benne 5-ös prímtényező. Mivel A páratlan, a harmadik szám 3, vagy 5 lehet, így $A = 45$, vagy $A = 75$. Mivel $A + B$ páratlan és A páratlan, ezért B páros, tehát szerepel benne a 2-es prímtényező. Ha $A = 45$, akkor B-ben a harmadik szám csak a 2 lehet, ha $A = 75$, akkor lehet a 2 és a 3 is.

Összesen három jó $(A; B)$ számpár lehet, ezek: (45;12); (75;12) és (75;18).

3. feladat Tekintsük azokat a négyjegyű pozitív egészeket, amelyekben nem szerepel a 0 számjegy és található benne olyan 1-es, ami után közvetlenül 2-es áll. Hány ilyen szám van? (8 pont)

Megoldás: Jelölje a számot $\overline{abcd}$. Nézzük, balról melyik az első 1-es, ami után 2-es áll. Ha ez a, akkor c és d is 9 féle lehet egymástól függetlenül, 81 ilyen szám van. Ha ez b, akkor a és d is 9 féle lehet egymástól függetlenül, 81 ilyen szám van. Végül ha ez c, akkor a és d is 9 féle lehet egymástól függetlenül, de ezek közül az $a = 1$ és $b = 2$ esetet már számoltuk, így 80 ilyen szám van.

Összesen tehát 242 megfelelő szám van.

4. feladat Az ABC háromszög BC oldalán van a D és E pont, $BD < BE$. Tudjuk, hogy $AB = AD = DE$, $AE = CE$ és $AC = BC$. Hány fokosak a háromszög szögei? (8 pont)

Megoldás: Legyen az ABC C-nél levő szöge γ. Az AEC háromszög egyenlőszárú, C-nél és A-nál γ szöge van, az E-nél levő külső szög ekkor 2γ. Ez éppen az egyenlőszárú ADE háromszög E-nél levő szöge, ami ugyanakkora, mint az A-nál levő szög. Így a D-nél levő külső szög $BDA\sphericalangle = 4\gamma$. Az ABD háromszög is egyenlőszárú, ezért $ABD\sphericalangle$ szintén 4γ. Az $AC = BC$ feltétel miatt ugyanekkora a $BAC\sphericalangle$. Az ABC szögeinek összege $9\gamma = 180°$, amiből A-nál és B-nél $80°$-os szög van, C-nél pedig $20°$-os.

5. feladat Egy lapra 100-nál kisebb pozitív egészeket írtak, nincs köztük két azonos. A számok 60 százaléka páratlan, 60 százaléka kétjegyű. Háromszor annyi páratlan kétjegyű szám van, mint páros egyjegyű. A legkisebb páros szám a 6. Hány számot írtak a lapra? (10 pont)

Megoldás: Legyen a számok x százaléka páros egyjegyű. Ekkor a páratlan kétjegyűek a számok $3x$ százaléka, a páros kétjegyűek $60 - 3x$ és a páratlan egyjegyűek is $60 - 3x$ százaléka. Az említett négy csoport páronként diszjunkt és együtt megadják az összes számot, így $100 = x + 60 + (60 - 3x)$, amiből $x = 10$. Mivel a legisebb páros egyjegyű a 6, ezért legfeljebb két páros egyjegyű szám lehet: vagy a 6 egyedül, vagy a 6 és a 8. Az első eset azt jelenti, hogy 10 szám van a papíron és ez lehetséges. (pl 6, 12, 14, 16, 3, 5, 7, 11, 13, 15, a feladat minden feltétele teljesül.) A második eset nem lehetséges, hiszen ekkor 6 darab páratlan egyjegyű szám lenne, ilyenből viszont csak öt van.

6. feladat Hány egyenes lehet a síkon, ha mindegyiket éppen hat másik egyenes metszi? *Készíts ábrát a válasz összes lehetséges értékéhez és magyarázd meg, hogy más lehetőség miért nem lehetséges.* (10 pont)

Megoldás: Legyen az egyenesek száma n. Az egyenesek között lehetnek párhuzamosak. Az egyeneseket csoportosítsuk irányuk szerint. Ha lenne két csoport, amelyekben nem ugyanannyi egyenes van, egyikben x, a másikban y, akkor az első csoport egyeneseit $n - x$, a másikat $n - y$ metszené. Ez ellentmondás, hiszen mindkét értéknek 6-nak kell lennie. Ezért minden csoportban ugyanannyi egyenes van. Jelölje a csoportok számát c, egy csoporton belül az ilyen irányú egyenesek számát d. A feladat szövege alapján $n = c \cdot d$ és $n - d = 6$, amiből $6 = d(c - 1)$. Mivel d a 6 osztója, értéke négyféle lehet: (i) ha $d = 1$, akkor $c = 7$ és $n = 7$; (ii) ha $d = 2$, akkor $c = 4$ és $n = 8$; (iii) ha $d = 3$, akkor $c = 3$ és $n = 9$; (iv) ha $d = 6$, akkor $c = 2$ és $n = 12$.