Átvételi vizsga

A feladatok megoldására 120 perc áll rendelkezésre. A feladatok megoldásához számológép és elektronikus segédeszköz nem használható. A válaszokat indokolni kell.

1. (5 pont) Péter vásárolt egy mobiltelefont, amelyet aztán drágábban szeretett volna eladni. Sajnos az általa kitalált árért senki nem vette meg a mobiltelefont. Bosszankodva ugyan, de úgy döntött, hogy akkor 20%-kal olcsóbban adja a mobiltelefont. Ekkor sikerült is eladni azt. Így végül 20%-os haszonra tett szert. Hány százalékos haszna lett volna akkor, ha az eredetileg tervezett áron sikerült volna eladni a mobiltelefont?

2. (6 pont) Három jóbarát együtt horgászott; és nem volt köztük kettő, aki ugyanannyi halat fogott volna. Másnap ezt mesélik:

   A: Én fogtam a legtöbb halat, C pedig a legkevesebbet.

   B: Én fogtam a legtöbb halat, többet, mint A és C együttvéve.

   C: Én fogtam a legtöbb halat, B csak feleannyit fogott, mint én.

   Ki fogta a legtöbb halat, ha a gyerekek 6 állításából pontosan 3 igaz? Eldönthető-e, hogy ki fogta a legkevesebbet?

3. a. (2 pont) Lehet-e mutatni két különböző pozitív egész számot, melyek összege 1000, és mindkét szám ugyanazokból a számjegyekből áll, csak más sorrendben?
   b. (4 pont) Lehet-e mutatni két különböző, 10-zel nem osztható pozitív egész számot, melyek összege 10 000, és mindkét szám ugyanazokból a számjegyekből áll, csak más sorrendben?

4. Egy automatába kétféle korongot dobhatunk be, pirosat vagy zöldet. A gép 1 piros korongért 5 zöldet ad és 1 zöldért 5 pirosat.
   a. (3 pont) Ha valaki 1 zöld koronggal kezd el játszani, elérheti-e, hogy ugyanannyi zöld korongja legyen, mint piros, ha elég sokáig játszik?
   b. (4 pont) Mi a helyzet akkor, ha 1 helyett 2 zöld koronggal kezdődik a játék?

5. (8 pont) Az $ABCDEF$ konvex hatszög mindegyik szöge egyforma. Tudjuk, hogy $AB = 3$, $BC = 4$, $CD = 5$ és $DE = 6$. Milyen hosszú a hatszög maradék két oldala?

6. Valaki gondolt öt különböző pozitív számra. A belőlük képezhető tíz darab kéttagú összegből elárulta nekünk a legkisebb és a legnagyobb kivételével a maradék nyolcat: 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23.
   a. (4 pont) Bizonyítsd be, hogy a gondolt számok között van olyan, amely nem egész.
   b. (4 pont) Mi lehet az öt gondolt szám?

Megoldások

1. Jelölje a mobiltelefon árát x, a tervezett ár pedig legyen y. Végül a telefont 20%-os haszonnal, azaz $1,2 \cdot x$ áron adta el. Erről tudjuk, hogy a tervezett ár $80\% - a$, azaz egyenlő $0,8 \cdot y$-nal. Tehát $1,2 \cdot x = 0,8 \cdot y$, és innen $y = 1,5 \cdot x$, azaz eredetileg 50%-os haszonnal szerette volna Peti eladni a telefont.

2. A gyerekek első állításai közül csak egy lehet igaz, mert azok páronként ellentmondóak. Ezért a második állítások közül pontosan kettő igaz. Mivel A és C második állítása is ellentmondó, ezért közülük az egyik hamis, tehát B második állítása biztosan igaz. Ebből következik, hogy B-nek az első állítása is igaz. Tehát B fogta, a legtöbb halat. Ebből az is következik, hogy C második állítása is hamis, vagyis A második állítása igaz, azaz C fogta a legkevesebb halat. Összefoglalva megállapíthatjuk, hogy C mindkét állítása hamis, B mindkét állítása igaz, és A első állítása hamis, a második pedig igaz.

3. **a.** Két ilyen szám például a 185 és 815.

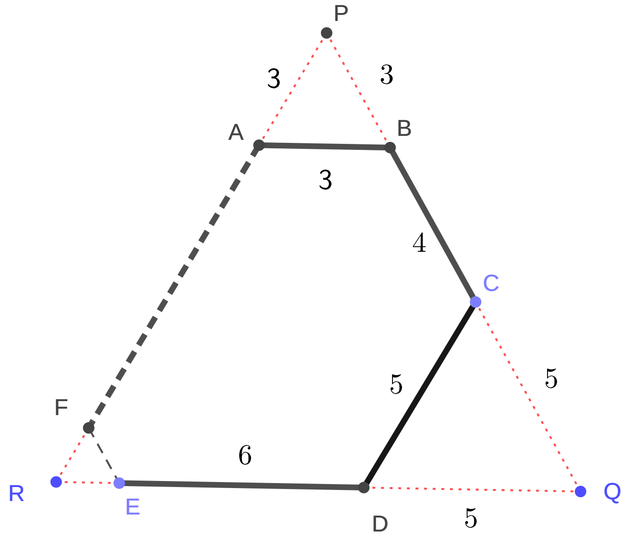
   b. Nem lehet találni két ilyen számot. Képzeljük el, hogy van két ilyen szám. Mivel 10-zel nem oszthatók, ezért az utolsó számjegyük nem nulla, viszont az összegük 0-ra végződik, ezért az összegük 10 (20-at már nem lehet leérni). Mivel van 1 átvitel, így az utolsó számjegyek elhagyásával kapott számok összege 999: ez a két jegy legyen d és $10 - d$. Mivel két számjegy összege csak átvitel nélkül tud 9 lenni, ezért ez csak úgy lehetséges, hogy ha az egyik szám a, b, c jegyekből áll, akkor a másik az ezt 9-re kiegészítő számjegyekből áll: $9 - a$, $9 - b$ és $9 - c$. Ha összeadjuk a két szám jegyeit, akkor 9+9+9+10=37 az eredmény, ez viszont azt jelenti, hogy nem állhatnak ugyanabból a jegyekből, csak más sorrendben, mert akkor páros lenne az összeg.

4. **a.** A korongok száma kezdetben páratlan (1 db). Majd mindegyik lépésben 4-gyel növekszik, így minden későbbi állásban is páratlan lesz az összes korongok száma, emiatt nem lehet egyforma a piros és zöld korongok száma.

   b. Ha az automatába bedobunk egy zöld korongot, ezek száma 1-gyel csökken, a piros korongok száma 5-tel nő. (Ha piros koronggal kezdenénk, hasonló volna a helyzet.) Azaz minden korong bedobásakor a különböző színű korongok számának különbsége 6-tal változik. Kezdéskor a különbség 2 volt, így minden bedobás után a különböző színű korongok száma közti különbség $6k + 2$ alakú, ahol k egy egész szám. Ha a két színből ugyanannyi korong lenne, ez azt jelentené, hogy $6k + 2 = 0$, ami lehetetlen. Soha nem lehet tehát a piros és zöld korongok száma egyenlő.

   Ezzel általánosabban azt is beláttuk, hogy amennyiben a kétféle színű korongok számának különbsége kezdetben nem osztható 6-tal, akkor sohasem egyezhet meg később a kétféle színű korongok száma. Amennyiben kezdetben a különbség $6k$, akkor a kisebb korongszámot addig növelhetjük, amíg a darabszám ki nem egyenlítődik.

5. Rajzoljuk meg a feladat ábráját



A hatszög belső szögeinek összege $4 \cdot 180°$, ezért, a feladatban szereplő hatszögnek mindegyik szöge $120°$. Az AF, BC és DE oldalegyenesek egymást $60°$-os szögben metszik, a metszéspontok alkotta PQR háromszög tehát szabályos. A szabályos háromszög PQ oldalának hosszát ismerjük, mert $PQ = PB + BC + CQ = AB + BC + CD = 12$. Ebből azonnal adódik, hogy $EF = ER = QR - DE - DQ = 12 - 5 - 6 = 1$, illetve $AF = PR - FR - PA = 12 - 3 - 1 = 8$.

6. **a. I. megoldás.** Tegyük fel (indirekt módon), hogy a feladatnak van egész számokból álló megoldása. Legyen az öt egész szám nagyság szerint növekvő sorrendben x_1, x_2, x_3, x_4 és x_5. A tíz összeg legkisebbike $x_1 + x_2$, ez tehát kisebb 15-nél, a legnagyobbik pedig x_4+x_5, ami nagyobb 23-nál. A második legkisebb összeg x_1+x_3, a második legnagyobb pedig $x_3 + x_5$. A feltétel szerint így

$$x_1 + x_3 = 15 \qquad \text{és} \qquad x_3 + x_5 = 23. \tag{1}$$

A két egyenletet összeadva $x_1 + x_5 + 2x_3 = 38$ adódik, vagyis $x_1 + x_5$ páros szám. A tíz összeg közül ez nem a legkisebb és nem is a legnagyobb, így háromféle értéke lehet: 16, 18 és 20.

Mindhárom esetben (1) -gyel együtt egy-egy háromismeretlenes egyenlet rendszert kapunk x_1, x_3 és x_5 ismeretlenekkel. Egy szerencsés észrevétellel azonban elkerülhetjük annak vizsgálatát, hogy az egyes esetekben az egyenletrendszerek megoldásai kiterjeszthetők-e a feladat megoldásává.

A tíz összeg legnagyobbikat (x_4+x_5) és legkisebbikét (x_1+x_2) elhagyva a megmaradt nyolc összeg összege

$$3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) + x_3 = 149, \tag{2}$$

vagyis x_3 2 maradékot ad 3-mal osztva. Az $x_1+x_5+2x_3 = 38$ feltétel szerint x_1+x_5 1 maradékot ad 3-mal osztva, vagyis $x_1 + x_5 = 16$.

Mivel x_3 legalább 2-vel kisebb, mint x_5, ezért $x_1 + x_3$ legfeljebb 14 lehet, ami ellentmond (1)-nek.

A feladatnak tehát nincsen egész számokból álló megoldása.

a. II. megoldás. Rendezzük ismét nagyság szerint az öt ismeretlen számot. Ekkor teljesülnek az alábbi egyenlőtlenségek:

$$x_1 + x_2 < x_1 + x_3 < x_1 + x_4 < x_1 + x_5 < x_2 + x_5 < x_3 + x_5 < x_4 + x_5, \quad (3)$$

$$x_1 + x_2 < x_1 + x_3 < x_2 + x_3 < x_2 + x_4 < x_3 + x_4 < x_3 + x_5 < x_4 + x_5. \quad (4)$$

Látható, hogy $x_1 + x_2$ a legkisebb, $x_1 + x_3$ az utána következő; $x_4 + x_5$ a legnagyobb, és $x_3 + x_5$ az előtte levő. A többi 6 összeg értéke tehát valamilyen sorrendben 16, 17, 18, 19, 20 és 21. E hat összeg összege:

$$2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) + x_2 + x_4 = 111, \quad (5)$$

vagyis $x_2 + x_4$ páratlan szám: értéke 17, 19 vagy 21.

Másfelől $x_2 + x_4$ biztosan kisebb, mint $x_3 + x_4$ és $x_2 + x_5$, viszont biztosan nagyobb, mint $x_1 + x_4$ és $x_2 + x_3$. A három szóba jövő páratlan szám közül csak a 19-nél van legalább két kisebb és legalább két nagyobb a hat szám között, tehát $x_2 + x_4 = 19$. A megadott összegek közül pontosan kettő nagyobb nála, a 20 és a 21. Ezek tehát valamilyen sorrendben az $x_3 + x_4$ és az $x_2 + x_5$. E két összeg összege így

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 41.$$

Mivel $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = (x_2 + x_4) + (x_3 + x_5)$ és $x_2 + x_4 = 19$, kapjuk, hogy $x_3 + x_5 = 22$. Ez pedig lehetetlen, hiszen a 22 nem szerepel a megadott összegek között.

Azt kaptuk tehát, hogy nincs olyan öt különböző pozitív egész szám, amelyekre teljesülnének a feltételek.

b. A valós számok körében már van megoldása a feladatnak. A második megoldás gondolatmenete szerint elindulva most $x_2 + x_4$ páros is lehet. Mivel a vizsgált hat „középső” összeg között van legalább két nála kisebb és legalább két nála nagyobb, ezért $x_2 + x_4 = 18$.

A 18-nál kisebb két szóba jövő összeg a 16 és 17, ezek tehát valamelyik sorrendben az $x_1 + x_4$ és az $x_2 + x_3$. így most

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 33.$$

(5) alapján $111 = 2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 2x_5 + (x_2 + x_4)$, ahonnan $x_5 = 13,5$. Mivel $x_3 + x_5 = 23$ és $x_1 + x_3 = 15$, kapjuk, hogy $x_3 = 9,5$ és $x_1 = 5,5$.

A tíz érték közül eddig megkaptuk a 15, a 18, a 19 és a 23-at. A hiányzó hat összeg $x_2 + x_1$, $x_2 + x_3$, $x_2 + x_5$, $x_4 + x_1$, $x_4 + x_3$ és $x_4 + x_5$. E hat összeg közül kettő értéke nem szerepel a nyolc szám között ($x_1 + x_2$ és $x_4 + x_5$), a megmaradt négy pedig a 16, 17, illetve a 20 és 21 értékeket állítja elő valamilyen sorrendben.

Mivel $x_2 + x_5$ és $x_2 + x_3$ különbsége 4, és ugyanennyi $x_4 + x_3$, valamint $x_4 + x_1$ különbsége is ($x_5 - x_3 = x_3 - x_1 = 4$), ezért attól függően, hogy milyennek választjuk

$x_2 + x_5$ és $x_3 + x_4$ nagyságviszonyát, vagy $x_2 + x_5 = 20$ és $x_3 + x_4 = 21$, vagy pedig $x_2 + x_5 = 21$ és $x_3 + x_4 = 20$. Az első esetben $x_2 = 6,5,\ x_4 = 11,5$, a másodikban pedig $x_2 = 7,5,\ x_4 = 10,5$. Látható, hogy mind a két esetben megoldást kapunk.

A valós számok körében tehát két megoldása van a feladatnak. Ezek

$$x_1 = 5,5; \quad x_2 = 6,5; \quad x_3 = 9,5; \quad x_4 = 11,5; \quad x_5 = 13,5,$$

illetve

$$x_1 = 5,5; \quad x_2 = 7,5; \quad x_3 = 9,5; \quad x_4 = 10,5; \quad x_5 = 13,5.$$