Átvételi vizsga - megoldás 2019
speciális matematika tagozat

Számológép nem használható. Munkaidő 120 perc.

1. feladat András, Balázs és Csongor ugyanolyan könyvet szeretnének vásárolni. András pénzéből azonban hiányzik a könyv árának az $\frac{1}{3}$ része, Balázs pénzéből az $\frac{1}{4}$ része, Csongor pénzéből pedig az $\frac{1}{5}$ része. Ha a könyv 470 Ft-tal olcsóbb lenne, akkor a hármójuk pénzét teljesen elköltve éppen három darabot tudnának venni. Hány forintba kerül a könyv? (6 pont)

Megoldás: Jelölje a könyv árát x. Ekkor a szöveg alapján felírható az alábbi egyenlet:

$$\frac{2}{3} \cdot x + \frac{3}{4} \cdot x + \frac{4}{5} \cdot x = 3 \cdot (x - 470).$$

Szorzunk a nevezők legkisebb közös többesével, 60-nal

$$40x + 45x + 48x = 180(x - 470),$$

ennek megoldása pedig $x = 1800$. A könyv 1800 forintba került.

Ellenőrzés: ekkor Andrásnak 1200Ft-ja, Balázsnak 1350Ft-ja, Csongornak 1440Ft-ja volt, ezek összege 3990Ft. Másrészt 1800-470=1330 és ennek háromszorosa is 3990Ft, a megoldás jó.

2. feladat A négyjegyű pozitív egész S szám jegyei a 3, 4, 5 és 6 valamilyen sorrendben. A szám közepén levő két jegy közül a nagyobbat jelölje n, a kisebbet k. Mi lehet S ha n-nel maradékosan osztva éppen k a maradék? (8 pont)

Megoldás: S jegyeinek összege 18, ezért osztható 3-mal. Eseteket vizsgálunk a lehetséges n értékek szerint.

Ha $n = 6$ a maradék csak 3 lehet. Ekkor a szám páratlan, így utolsó jegye az 5, első jegye a 4. Két ilyen szám van, az $S_1 = 4635$ és az $S_2 = 4365$.

Ha $n = 5$, akkor a szám maradéka az utolsó jegyének ötös maradéka. Mivel a négy jegy között nincs kettő, amelynek azonos lenne az ötös maradéka ilyen S szám nincs.

Végül ha $n = 4$, akkor a maradék nála kisebb lehet, azaz $k = 3$, tehát a szám páratlan. Ebből következik, hogy az utolsó jegy az 5 és az első a 6. A 4-gyel osztva 3-as maradékot adó szám a $S_3 = 6435$.

3. feladat Egy szabályos 12-szög oldalai pirosak. A sokszöget néhány átlójával háromszögekre vágjuk úgy, hogy a behúzott átlók nem metszik egymást a 12-szög belsejében. Legyenek ezek az átlók kékek. Az így kapott háromszögek közül azokat, amelyeknek van piros oldaluk "határos"-nak nevezzük. Azokat, amelyeknek minden oldala kék "belső"-nek nevezzük. Lehet-e ugyanannyi határos és belső háromszög? (8 pont)

Megoldás: A háromszögeknek legfeljebb két piros oldala lehet. Mivel 12 piros szakaszunk van, ezért legalább 6 határos háromszög lesz. Mivel összesen 10 háromszög keletkezik, ezért a határos háromszögek száma mindenképpen több, mint a belső háromszögek száma.

Megjegyzés: Legyen a határosak száma h. Ekkor a $h = 6, 7, 8, 9, 10$ esetek mindegyikéhez készíthető megfelelő felbontás.

4. feladat Egy 20×20-as táblázat első oszlopának minden mezőjébe 1-et írtunk. A második oszlop minden mezőjébe 2-őt, a harmadik oszlop minden mezőjébe 3-at és így tovább egészen a huszadik oszlopig, amelynek minden mezőjébe 20-at írtunk. A táblázat bal felsőtől a jobb alsó sarkáig futó átlója mentén kitöröltük a számokat. Igazoljuk, hogy ezen átló felett a megmaradt számok összege éppen kétszer akkora, mint az átló alatti számok öszege. (8 pont)

Megoldás: Megmutatjuk, hogy tetszőleges $n \times n$-es táblázat esetén igaz az állítás, ha a feladatben leírt módon töltjük ki. A kitörölt átló alatt álló számokat soronként adjuk össze. A k-adik sorban álló számok $1, 2, ..., k-1$, ezek összege $(k-1)k/2$. A kitörölt átló felett álló számokat oszloponként adjuk össze, a k-adik oszlopban $k-1$ darab k áll, ezek összege $k(k-1)$, ami éppen a megfelelő sor összegének a kétszerese, ezzel készen is vagyunk.

5. feladat Az ABC háromszögben $AC = BC$ és $ACB\angle = 40°$. A háromszög belső P pontjára $AP < BP$ és $APB\angle = 110°$. A BP szakaszfelező merőlegese D-ben metszi a BC oldalt, a DP egyenes pedig E-ben az AC oldalt.
(a) Bizonyítsuk be, hogy $AE + DB = ED$.
(b) Az ED szakasz felezőpontján át párhuzamost húzunk BC-vel, ez AB-t G-ben metszi. Mekkora az $EGD\angle$? (10 pont)

Megoldás: Az ABC háromszög egyenlőszárú, c-nél levő szöge $40°$, így az alapokon fekvő szögei $70°$-osak. A PAB háromszög A-nál és B-nél levő szögét jelölje α és β. Mivel $APB\angle = 110°$, így $\alpha + \beta = 70°$. Ezeket összevetve $EAP\angle = \beta$ és $PBD\angle = \alpha$. Mivel D rajta van PB felezőmerőlegesén, így $PD = DB$ és ezért $PBD\angle = BPD\angle = \alpha$. Ekkor $APE\angle = 180° - 110° - BPD\angle = \beta$. Azt kaptuk, hogy AEP háromszögbn A-nál és E-nél is β szög van, azaz $AE = EP$. A feladat (a) részét igazoltuk, hiszen $AE + DB = EP + PD = ED$.

(b) Húzzunk E-nát is párhuzamost BC-vel, ez AB-t H-ban metszi. Legyen ED felezőpontja F. Mivel AEH az ABC-hez hasonló háromszög, ezért $AE = EH$. Az $EHBD$ trapézban FG középvonal, így $FG = (EH + DB)/2 = (AE + DB)/2 = ED/2$. Ebből következik, hogy G rajta van ED Thalesz körén, azaz $EGD\angle = 90°$.

6. feladat Anna és Bea választanak egy egy pozitív egész számot és megsúgják számukat Cilinek. Cili közli, hogy a számok összege, vagy szorzata 120. Anna megjegyzi, hogy ebből még nem tudja kitalálni, mi Bea száma. Ezt hallva, némi töprengés után Bea azt mondja, nem tudja, mi Anna száma. Mi volt Bea száma? (10 pont)

Megoldás: Legyen Anna száma a Bea száma pedig b. Ha a nem osztja a 120-at, akkor Anna azonnal tudja, hogy Bea száma csakis $120 - a$ lehet. Anna első mondatából így az következik, hogy a a 120 valamely pozitív osztója. Viszont maga a 120 sem lehet, hiszen akkor $b = 1$ lehet csak, így Anna ki tudná találni Bea számát. Összefoglalva a lehetséges értékeinek H halmaza $H = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 60\}$

Bea némi töprengése azt jelzi, hogy mindezt ő is átgondolta, de ennek ellenére nem tudja Anna számát. Ezért Bea száma is egy H-beli szám, mégpedig olyan, hogy található H ban olyan $a_1 \neq a_2$, amelyre $a_1 + b = 120$ és $a_2 \cdot b = 120$. Mivel H minden eleme legfeljebb 60, ezért az említett két feltétel közül az első csak $b = 60$ esetén teljesülhet. Bea száma a 60, Anna száma pedig vagy a 2, vagy a 60.