Megoldások

1. feladat
Zsófi egy szép reggelen hosszú útra indult. Délben a már megtett út úgy aránylott a még hátralevő úthoz, mint 2:3. Délután folytatta útját, megtett még 80 kilométert. Estére a megtett és a hátralevő távolság aránya 6:5 lett. Hány kilométeresre tervezte Zsófi az útját, mekkora távolságot tett meg reggeltől estig? (5 pont)

Megoldás:
Zsófi délig az egész út 2/5 részét, estig 6/11 részét tette meg. A teljes út 6/11 – 2/5= 8/55 része 80 kilométer, így a teljes út 550 kilométer.

2. feladat
Az a) 1,2,3,4,5,6 b) 0,1,2,3,4,5,6 számjegyek mindegyikét pontosan egyszer használjuk fel. Létezik-e olyan *N* pozitív egész szám az a) illetve a b) esetben, amelyre az alábbi állítások mindegyike teljesül:

- Az *N* számból a 2-es számjegy kihagyásával kapott (eggyel kevesebb számjegyből álló) szám osztható 2-vel.
- Az *N* számból a 3-as számjegy kihagyásával kapott szám osztható 3-mal.
- Az *N* számból a 4-es számjegy kihagyásával kapott szám osztható 4-gyel.
- Az *N* számból az 5-ös számjegy kihagyásával kapott szám osztható 5-tel.
- Az *N* számból a 6-os számjegy kihagyásával kapott szám osztható 6-tal.

(6 pont)

Megoldás
a) Nincs ilyen szám, hiszen az 5 elhagyása után se 5, se 0 számjegyünk nincsen, vagyis a módosított szám nem lehet osztható 5-tel.
b) Van ilyen szám: 6531420 például minden feltételnek megfelel.

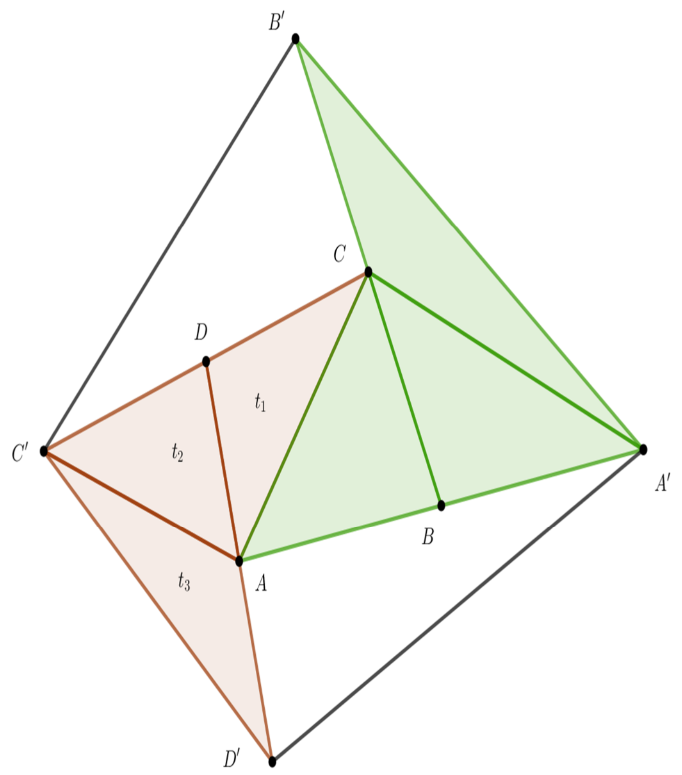
3. feladat
Egy moziban 7 sor mindegyikében 10 szék van. 50 gyerek ebben a moziban megtekintette A matematika furcsaságai című filmet. Egy hét múlva ugyanezek a gyerekek a Rejtélyes fizika című filmet nézték meg ugyanebben a moziban. Bizonyítsd be, hogy legalább két gyerek ugyanabban a sorban ült a két előadáson! (7 pont)

Megoldás
Egy gyerek az első előadáson 7 sorba ülhetett, a második napon is 7 sorba ülhetett, vagyis 49 lehetősége van a két nap alatt a neki tetsző sor kiválasztására. Mivel ötvenen vannak, ezért legalább ketten ugyanazokat a sorokat választják a két nap alatt.

4. feladat
Az *ABCD* konvex négyszög *A* csúcsát a *B* pontra, *B* csúcsát *C*-re, *C* csúcsát *D*-re, végül *D*-t *A*-ra tükröztük, így kaptuk rendre az *A*’, *B*’, *C*’, *D*’ pontokat. Hányszorosa az *A*’*B*’*C*’*D*’ négyszög területe az *ABCD* négyszög területének? (8 pont)

Megoldás
Húzzuk meg az *AC* átlót! Az ábrán pirossal jelölt háromszögek egyenlő területűek:

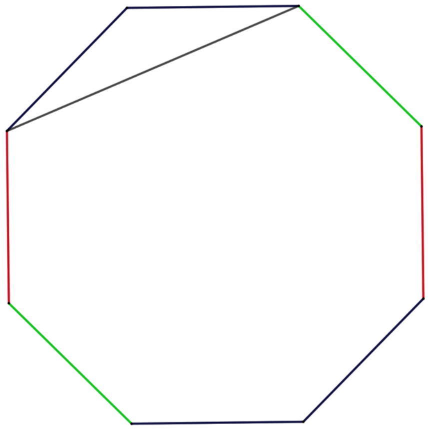
ADC és *ADC*’ háromszögek *A*-ból induló magassága közös, a tükrözés miatt *DC*=*DC*’, így területük egyenlő egymással.
C’*DA* és *C*’*AD*’ háromszögek *C*’-ből induló magassága közös, és a tükrözés miatt *DA*=*DA*’, így ezek is egyenlő területűek, ezért a három piros háromszög egyenlő területű.



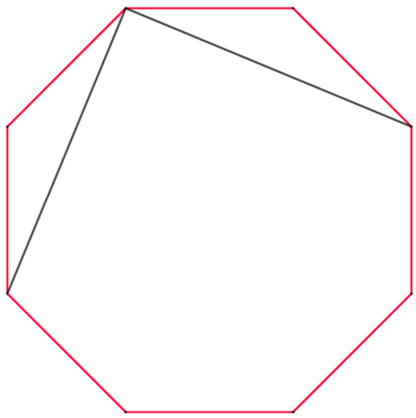
A három zöld háromszög területének egyenlőségét ugyanezzel a gondolatmenettel láthatjuk be. Így azt kaptuk, hogy t(*DC*’*B*’)+t(*BA*’*B*’)=2t(*ABCD*).
Húzzuk meg a *BD* átlót! A fenti gondolatmenet ismétlésével kapjuk, hogy t(*CB*’*C*’)+t(*AD*’*A*’)= 2t(*ABCD*). A két eredményből következik, hogy az *A*’*B*’*C*’*D*’ négyszög területe az *ABCD* négyszög területének ötszöröse.

5. feladat
Egy szabályos nyolcszög csúcsai közül kiválasztottunk *n* darabot, majd ezeket összekötve egy olyan konvex *n*-szöget kaptunk, amelynek nincsenek párhuzamos oldalai. Legfeljebb mekkora lehet *n*? (10 pont)

Megoldás
Megmutatjuk, hogy hat csúcsot még ki lehet választani úgy, hogy a feltétel teljesüljön, de hetet már nem.
A szabályos nyolcszögnek négy párhuzamos oldalpárja van. Ha csak egy csúcsot hagyunk ki, akkor két párhuzamos oldalpár biztosan megmarad, vagyis hét csúcsa nem lehet a sokszögnek. Az ábrán a piros és a zöld szakaszok megmaradnak, az egyforma színűek egymással párhuzamosak.



Két csúcs elhagyásával mind a négy párhuzamos oldalpár egyik szakaszát meg tudjuk szüntetni. Az új szakaszok az eredeti nyolcszög egyetlen oldalával sem párhuzamosak, találtunk a feltételeknek megfelelő hatszöget.



6. feladat

a) Kiszámoltuk az 1,2,…,n pozitív egész számok összegét. Bizonyítsd be, hogy ha az összeg két szomszédos egész szám szorzata, akkor $n^2 + (n+1)^2$ négyzetszám!

b) Bizonyítsd be, hogy ha $n^2 + (n+1)^2$ négyzetszám, akkor 1-től n-ig a pozitív egész számok összege felírható két szomszédos egész szám szorzataként!

(7 + 7 pont)

Megoldás

a) A számok összege $\frac{n(n+1)}{2}$. Feltételünk szerint:

$\frac{n(n+1)}{2} = a(a+1)$, ahol a egész számot jelöl.

Néhány szám kipróbálása után az a sejtésünk, hogy az összeg $(2a+1)^2$ lesz. Bizonyítás:

$n^2 + (n+1)^2 = 2n^2 + 2n + 1 = 4\frac{n(n+1)}{2} + 1 = 4a(a+1) + 1 = (2a+1)^2$.

b) Mivel két szomszédos négyzetszám összege páratlan, ezért a feltétel így írható:

$n^2 + (n+1)^2 = (2k+1)^2$, ahol k egész szám.

$2n^2 + 2n = (2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k+1)$

$\frac{n(n+1)}{2} = k(k+1)$, ami a bizonyítandó állítás.